Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1997/98 година

ТРАЖИМ ИНВАРИЈАНТУ

Ратко Тошић, Нови Сад

Као повод за овај чланак послужио је задатак 7 основне варијанте 14. Турнира градова (8 – 9 разред).

ЗАДАТАК. (*А. Белов*) *На правој AB дато је неколико плавих и црвених тачака. Дозвољено је уклонити две тачке исте боје међу којима нема уочених тачака. Дозвољено је, такође, додати две тачке исте боје (плаве или црвене) тако да између њих нема уочених тачака. Претпоставимо да су на почетку дате само две тачке: A – плава и B – црвена, при чему се тачка B налази десно од тачке A. Могу ли се после извесног броја примена дозвољених операција добити, такође, само две тачке: A – црвена и B – плава?*

Задатак на први поглед изгледа тривијалан; међутим, покушаји његовог решавања не доводе лако до успешног решења. Већ из саме формулације задатка, види се да је природан приступ у његовом решавању – коришћење неке инваријанте. У сваком од три решења која ћемо навести, користе се инваријанте; оне су, међутим, веома различите природе, и на најбољи начин показују разноврсност и елеганцију метода инваријанти. У првом решењу је приступ геометријски, у другом се користи бинарни запис бројева, док би се за трећи – изненађујуће једноставан, могло рећи да је комбинаторан.

Решење 1. Уочимо тачке P и Q на правој AB. Црвеној тачки придружимо симетрију те праве у односу на тачку P, плавој – симетрију у односу на тачку Q. Претпоставимо да у датом тренутку на правој имамо известан број црвених и плавих тачака. Идући по тим тачкама слева надесно множимо симетрије које одговарају тим тачкама. На почетку имамо производ две симетрије – са центром у тачки P и са центром у тачки Q. Њихов производ је транслација за вектор $2\overrightarrow{PQ}$. При сваком додавању две суседне тачке исте боје, производ симетрија се не мења, јер је производ симетрије са самом собом – идентичко пресликавање. То исто важи и за уклањање две суседне тачке исте боје. Према томе, после сваког корака, производ симетрија остаје непромењен. Међутим, за две тачке, црвену – A и плаву – B, као производ одговарајућих симетрија добија се транслација за вектор $2\overrightarrow{QP}$ ($\neq 2\overrightarrow{PQ}$). Дакле, није могуће постићи да тачке A и B замене боје.

Приметимо да у горњем закључивању битну улогу има асоцијативност производа трансформација (централних симетрија).

Решење 2. Означимо сваку црвену тачку са 1, а сваку плаву са 0. Тада сваком распореду црвених и плавих тачака на правој одговара један низ нула и јединица, тј. бинарни запис неког броја. Дозвољеним трансформацијама одговарају следеће операције са бројевима. На сваком месту између цифара бинарног записа, испред броја или иза њега, дозвољено је написати 11 или 00, а такође и одстранити било које две једнаке суседне цифре. Дакле, из сваког броја облика

$\overline{AxxB}$, где је $x \in \{0,1\}$, A и B ненегативни цели бројеви у бинарном запису, може се добити број $\overline{AB}$, и обрнуто.

Размотримо разлику тих бројева (узимајући да B садржи n бинарних цифара):

$$\overline{AxxB} - \overline{AB} = (A \cdot 2^{n+2} + x \cdot 2^{n+1} + x \cdot 2^n + B) - (A \cdot 2^n + B) = 3(A + x) \cdot 2^n.$$

Дакле, посматрана разлика је увек дељива са 3. Међутим, полазни број $01_2 = 1$ и завршни $10_2 = 2$, дају различите остатке при дељењу са 3; према томе, ниједан се не може добити из оног другог.

Решење 3. Размотримо број разнобојних парова тачака (не само суседних), у којима је лева тачка пара – црвена. Очигледно се парност тога броја не мења при дозвољеним трансформацијама. На почетку је, међутим, тај број једнак 1, а на крају – 0, одакле следи да је жељену ситуацију немогуће постићи.

Литература

1. Р. Тошић, *Инваријанте*, Алеф, Нови Сад, 1996.
2. А. Я. Канель–Белов, А. К. Ковальджи, *Как решают нестандартные задачи, МЦНМО, Москва, 1997.*