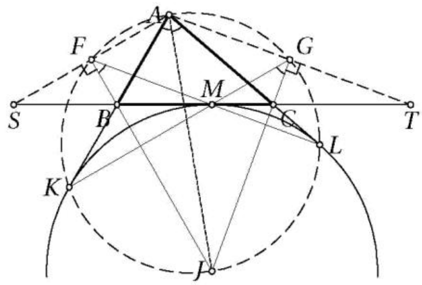
LIII олимпијада

1. Во триаголникот ABC точката J е центар на припишаната кружница наспроти темето A. Оваа кружница ја допира BC во M, а продолженијата на страните AB и AC во K и L, соодветно. Правите LM и BJ се сечат во F, а правите KM и CJ се сечат во G. Нека S е пресечната точка на правите AF и BC, а T е пресечната точка на правите AG и BC. Докажи дека M е средина на отсечката ST.

Решение. Од

$$\measuredangle JFL = \measuredangle JBC - \measuredangle LMC$$
$$= (90^\circ - \tfrac{\measuredangle ABC}{2}) - \tfrac{\measuredangle ACB}{2}$$
$$= \tfrac{\measuredangle BAC}{2} = \measuredangle JAL,$$



следува дека точката F припаѓа на кружницата која минува низ точките A, J и L, т.е. на кружницата над дијаметар AJ, па затоа $\measuredangle AFB = \measuredangle AFJ = 90^\circ$. Од $\measuredangle SBF = \measuredangle ABF$ следува дека триаголниците SBF и ABF се складни и $\overline{SB} = \overline{AB}$. Сега:

$$\overline{SM} = \overline{SB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \overline{BK} = \overline{AK}$$

и аналогно $\overline{TM} = \overline{AL} = \overline{AK}$, па затоа $\overline{SM} = \overline{TM}$.

2. Нека $n \geq 3$ е природен број и $a_2, a_3, ..., a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_2 a_3 ... a_n = 1$. Докажи, дека

$$(1+a_2)^2 (1+a_3)^3 ... (1+a_n)^n > n^n. \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(1+a_k)^k = (\tfrac{1}{k-1} + ... + \tfrac{1}{k-1} + a_k)^k \geq (k \cdot \sqrt[k]{(\tfrac{1}{k-1})^{k-1} a_k})^k = \tfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k.$$

Множејќи ги овие неравенства за $k = 2, 3, ..., n$ добиваме

$$(1+a_2)^2 (1+a_3)^3 ... (1+a_n)^n \geq n^n.$$

Во последното неравенство знак за равенство ќе важи ако и само ако $a_k = \frac{1}{k-1}$ за $k = 2, 3, ..., n$. Но, во овој случај важи $a_2 a_3 ... a_n \neq 1$, па затоа е точно неравенството (1).

3. *Погодувалка* е игра која ја играат двајца играчи A и B. Правилата на играта зависат од природните броеви k и n кои се познати и на едниот и на другиот играч.

На почетокот на играта A избира броеви x и N такви што $1 \leq x \leq N$.

Играчот A на играчот B не му соопштува информација за бројот x, но му ја соопштува точната вредност на бројот N. Играчот B пробува да добие информации за бројот x поставувајќи му на играчот A прашања од следниот вид: во секое прашање B избира произволно подмножество S на множеството природни броеви (може да избира исто подмножество повеќе пати) и го прашува играчот A дали x припаѓа на S. Играчот B може да поставува колку сака прашања. По секое прашање играчот A одговара со *да* или со *не*, но може и да лаже. Единствено ограничување е меѓу $k+1$ последователни одговори барем еден мора да е вистинит.
Откако B ќе постави колку што сака прашања, тој треба да избере множество X кое се состои од најмногу n природни броеви. Ако x припаѓа на X тогаш B победува, а во спротивно B губи. Докажи дека:

а) Ако $n \geq 2^k$, тогаш B има победничка стратегија.

б) За секој доволно голем k постои природен број $n \geq 1{,}99^k$ така што A има победничка стратегија.

Решение. За одговорот o на играчот A на прашањето: „*Дали* $b \in S$" ќе велиме дека *не е согласен* со бројот b ако $o = да$ и $b \notin S$, или $o = не$ и $b \in S$.

а) Ќе докажеме дека во секое множество Y со 2^k+1 броеви, B со сигурност може да определи барем еден број кој не е x. Нека без ограничување на општоста претпоставиме дека $Y = \{0,1,2,\dots,2^k\}$. Играчот B почнува така што го повторува прашањето „*Дали* $x = 2^k$". Ако $k+1$ пати по ред добие одговор *не*, тој знае дека $x \neq 2^k$. Во спротивно, кога ќе добие одговор *да*, тој редоследно го поставува прашањето „*Дали* $i-$*тата бинарна цифра на бројот* x *е еднаква на* 1" за $i = 1,2,\dots,k$. Без разлика какви се одговорите, сите тие не се согласни со некој број b, $0 \leq b \leq 2^k - 1$. Ако се има предвид претходниот одговор *да* за бројот 2^k, B може да заклучи дека $x \neq b$.

б) Нека $1 < \lambda < 2$. За секој $i = 1,2,\dots,N$, нека $a_i(m)$ го означува тековниот број последователни одговори по $m-$тото прашање кои не се согласни со i.

Разгледуваме $\phi(m) = \sum_{i=1}^{N} \lambda^{a_i(m)}$. Јасно, A ја постигнува целта ако може да одговара така што ќе важи $\phi(m) < \lambda^{k+1}$ за секој m.

Со S_m да го означиме множеството броеви со кои одговорот *да* на $m-$тото прашање ќе биде несогласен. Ако A на $m-$тото прашање одговори *да,* тогаш важи $a_i(m) = a_i(m-1)+1$, за $i \in S_m$ и $a_i(m) = 0$ за $i \notin S_m$, па затоа важи

$$\phi(m) = f_1 = \lambda \sum_{i \in S_m} \lambda^{a_i(m-1)} + \sum_{i \notin S_m} 1.$$

Од друга страна, ако A одговори *не*, тогаш $a_i(m) = a_i(m-1)+1$, за $i \notin S_m$ и $a_i(m) = 0$ за $i \in S_m$, па затоа важи

$$\phi(m) = f_2 = \lambda \sum_{i \notin S_m} \lambda^{a_i(m-1)} + \sum_{i \in S_m} 1.$$

Бидејќи $f_1 + f_2 = \lambda\phi(m-1) + N$, на $m-$тото прашање A може да одговори така што ќе биде $\phi(m) = \frac{\lambda}{2}\phi(m-1) + \frac{N}{2}$.

На почетокот е $\phi(0) = N$. Врз основа на претходните разгледувања со едноставна индукција се докажува дека A може да избира одговори така што секогаш ќе важи $\phi(m) \le \frac{N}{2-\lambda}$. Специјално, ако $N < (2-\lambda)\lambda^{k+1}$, тогаш $\phi(m) \le \lambda^{k+1}$, па затоа A има победничка стратегија.

Конечно, ако $1,99 < \lambda < 2$, тогаш за доволно голем k важи

$$(2-\lambda)\lambda^{k+1} > 1,99^k + 1,$$

со што тврдењето е докажано.

4. Определи ги сите функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такви што за секои цели броеви a,b,c за кои $a+b+c=0$ е точно равенството

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a). \qquad (*)$$

Решение. Во (*) ставаме $a=b=c=0$ и добиваме $f(0)=0$. Сега за $c=0$ и $b=-a$ од (*) следува $f(-a) = f(a)$. Понатаму, со решавање на квадратната равенка

$$f(c)^2 - 2(f(a)+f(b))f(c) + (f(a)^2 - 2f(a)f(b) + f(b)^2) = 0$$

добиваме

$$f(c) = f(a) + f(b) \pm 2\sqrt{f(a)f(b)}$$

и ако земеме предвид дека $c = -a-b$ и $f(-x) = f(x)$ добиваме

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \pm 2\sqrt{f(a)f(b)}. \qquad (1)$$

Оттука следува дека $f(a)f(b) \ge 0$ за секои $a,b \in \mathbb{Z}$. Ако $f(1)=0$, тогаш по индукција следува $f(a)=0$ за секој $a \in \mathbb{N}$, т.е. $f \equiv 0$. Затоа во натамошните разгледувања ќе претпоставиме дека $f(1) \ne 0$. Од претходните разгледувања следува $\frac{f(a)}{f(1)} > 0$, за $a \in \mathbb{N}$. Да означиме $g(a) = \sqrt{\frac{f(a)}{f(1)}}$. Сега релацијата (1) се сведува на

$$g(a+b) = \pm g(a) \pm g(b), \text{ за секои } a,b \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

Имаме $g(1)=1$ и $g(2)\in\{0,2\}$. Понатаму, ако $g(2)=2$, тогаш $g(3)\in\{1,3\}$. Да забележиме дека ако $g(d)=0$, тогаш функцијата g е периодична со период d.

i) Ако $g(2)=0$, функцијата има период 2, па затоа $g(2a)=0$ и $g(2a+1)=1$, за $a\in\mathbb{N}_0$. Оваа функција ја задоволува релацијата (2). Навистина, ако $2\,|\,a+b$, тогаш важи $g(a)=g(b)$ и $g(a+b)=0$, а ако $2\nmid a+b$, тогаш важи $\{g(a),g(b)\}=\{0,1\}$ и $g(a+b)=1$.

ii) Нека $g(2)=2$ и $g(3)=1$. Тогаш од

$$g(4)=\pm g(3)\pm g(1)\in\{0,2\} \text{ и } g(4)=\pm g(2)\pm g(2)\in\{0,4\},$$

следува $g(4)=0$, што значи дека g има период 4. Според тоа, $g(4a)=0,\ g(4a+2)=2$ и $g(4a+3)=g(4a+1)=1$, за $a\in\mathbb{N}_0$.

Ако $g(a)=0$ (аналогно $g(b)=0$), тогаш $4\,|\,a$ и $g(a+b)=g(b)$. Ако $g(a)=1$ (аналогно $g(b)=1$), тогаш a е непарен, еден од броевите b и $a+b$ е парен, а другиот е непарен, па затоа $\{g(b),g(a+b)\}=\{0,1\}$ или $\{1,2\}$. Конечно, за $g(a)=g(b)=2$ имаме $a\equiv b\equiv 2 \pmod 4$ и $g(a+b)=0$. Значи, во секој случај важи (2).

iii) Конечно, ако $g(2)=2$ и $g(3)=3$, со индукција се докажува дека $g(a)=a$ за секој $a\in\mathbb{N}$. Тоа важи за $a\le 3$, а при претпоставка дека важи за $a<n$ ($n\ge 4$), имаме

$$g(n)=\pm g(n-1)\pm g(1)\in\{n-2,n\} \text{ и } g(n)=\pm g(n-2)\pm g(2)\in\{n-4,n\},$$

па следува дека $g(n)=n$. Јасно, оваа функција тривијално ја задоволува (2).

Од претходните разгледувања следува дека единствени решенија се следниве функции, за некоја константа $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$:

$$f_1(x)=0,\quad f_2(x)=kx^2,\quad f_3(x)=\begin{cases}0, & 2\,|\,x\\ k, & 2\nmid x\end{cases} \quad\text{и}\quad f_4(x)=\begin{cases}0, & x\equiv 0 \pmod 4\\ k, & x\equiv 1,3 \pmod 4\\ 4k, & x\equiv 2 \pmod 4).\end{cases}$$

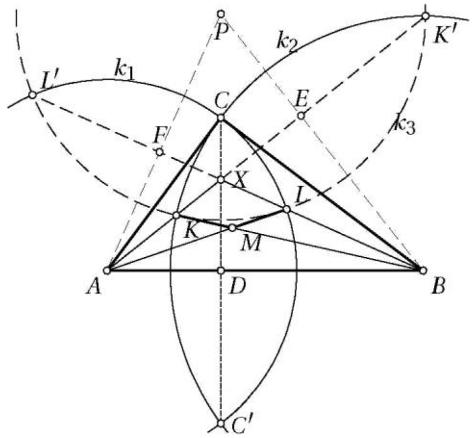
5. Нека ABC е триаголник во кој $\measuredangle BCA=90^\circ$ и нека D е подножјето на висината повлечена од темето C. Во внатрешноста на отсечката CD е избрана точка X. Нека K е точка на отсечката AX таква што $\overline{BK}=\overline{BC}$, а L е точка на отсечката BX таква што $\overline{AL}=\overline{AC}$. Правите AL и BK се сечат во точката M. Докажи дека $\overline{MK}=\overline{ML}$.

Решение. *Прв начин.* Да ги разгледаме кружниците $k_1(A,\overline{AC})$ и $k_2(B,\overline{BC})$.

Нека AX повторно ја сече k_2 во K', а BX повторно ја сече k_1 во L', и нека k_1 и k_2 се сечат во C и C'. Од степенот на точката X во однос на кружниците k_1 и k_2 добиваме

$$\overline{XL}\cdot\overline{XL'}=\overline{XC}\cdot\overline{XC'}=\overline{XK}\cdot\overline{XK'},$$

што значи дека точките K, K', L, L' лежат на една кружница, да кажеме k_3. Бидејќи $\measuredangle BCA=90^\circ$, правата AC ја допира k_2 и правата BC ја допира k_1, па од степенот на точката A во однос на k_2 добиваме



$$\overline{AL}^2=\overline{AC}^2=\overline{AK}\cdot\overline{AK'},$$

т.е. AL ја допира k_3 во L. Аналогно, BK ја допира k_3 во K. Следува дека MK и ML тангентни отсечки од точката M на k_3, па затоа $\overline{MK}=\overline{ML}$.

Втор начин. Нека AF и BE се висините и P е ортоцентарот на триаголникот ABX. Од

$$\overline{AL}^2=\overline{AC}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AB}=\overline{AF}\cdot\overline{AP}$$

следува дека правата AL е тангента на кружницата FLP. Дијаметар на оваа кружница е AP, па затоа $\measuredangle ALP=90^\circ$. Аналогно $\measuredangle BKP=90^\circ$. Сега

$$\overline{LP}^2=\overline{PF}\cdot\overline{PA}=\overline{PE}\cdot\overline{PB}=\overline{PK}^2, \text{ т.е. } \overline{PL}=\overline{PK}.$$

Според тоа, триаголниците MLP и MKP се складни, па затоа $\overline{MK}=\overline{ML}$.

6. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат ненегативни цели броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ такви што важи

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+...+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+...+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$

Решение. *Прв начин.* Ако постојат $a_1, a_2, ..., a_n$, тогаш множејќи го десното равенство со 3^a, каде $a=\max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и сведувајќи го по модул 2 добиваме

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}\equiv 1 \pmod 2.$$

Според тоа, $n\equiv 1 \pmod 4$ или $n\equiv 2 \pmod 4$. Затоа во натамошните разгледувања ќе земеме $n\equiv 1, 2 \pmod 4$. Ќе докажеме дека во овие случаи броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ постојат.

Низата реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ ќе ја наречеме употреблива со степени

$a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}$, ако

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + ... + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{x_1}{3^{a_1}} + \frac{x_2}{3^{a_2}} + ... + \frac{x_n}{3^{a_n}} = 1.$$

Лесно се проверува дека ако низата $x_1, x_2, ..., x_{n-2}, \frac{x_{n-1}+x_n}{3}$ е употреблива со степени $a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1}$, тогаш и низата $x_1, x_2, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ е употреблива со степени $a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1}+1, a_{n-1}+1$.

Ќе ја наречеме чекор во низата $x_1, x_2, ..., x_n$ операцијата на замена на два броја a, b со бројот $\frac{a+b}{3}$. Од претходните разгледувања следува дека низата $x_1, x_2, ..., x_n$ е употреблива (за некои a_i) ако може да се применат $n-1$ чекори така што ќе остане бројот 1. Со индукција по n ќе докажеме дека низата $1, 2, ..., n$ е употреблива.

Да забележиме дека бројот $2x$ може да се избрише од низата ако во неа се наоѓа бројот x (замена на $x, 2x$ со x).

1) Ако $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$, според претходните разгледувања со бришење на n ја добиваме низата $1, 2, ..., n-1$.
2) Нека $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Ако $n \geq 9$, постои $m \in \mathbb{N}$ таков што $6m \leq n \leq 10m$. Бројот $6m$ можеме да го избришеме, додека секој од паровите $(6m-i, 6m+i)$, за $1 \leq i \leq n-6m$ можеме да го замениме со бројот $4m$. Исто така и секое појавување на бројот $4m$ можеме да го избришеме. Така ни останува низата $1, 2, ..., 12m-1-n$ која според индуктивната претпоставка е употреблива бидејќи $12m-1-n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$.

Останува да ја провериме базата на индукција, а тоа се случаите $n \in \{1, 5\}$. Случајот $n = 1$ е тривијален, а за $n = 5$ ја применуваме низата чекори $1, 2, 3, \underline{4, 5} \to 1, 2, \underline{3, 3} \to \underline{1, 2}, 2 \to \underline{1, 2} \to 1$.

Втор начин. Од второто равенство следува $1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + ... + n \cdot b_n = 3^{b_0}$, каде за секој i бројот b_i е степен на бројот 3. Десната страна е непарна, а левата има парност на $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, па затоа $n = 4k+1$ или $n = 4k+2$.

Обратно, за такви n постојат соодветни броеви $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}$. На пример, по индукција следува дека

$$\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{3}{3^2} + \left(\frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^4} + \frac{6}{3^4} + \frac{7}{3^4}\right) + ... +$$
$$+\left(\frac{4k-4}{3^{k+2}} + \frac{4k-3}{3^{k+2}} + \frac{4k-2}{3^{k+2}} + \frac{4k-1}{3^{k+2}}\right) + \frac{4k}{3^{k+2}} + \frac{4k+1}{3^{k+2}} = 1,$$

$$\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^{k+1}}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^3}+(\frac{5}{3^4}+\frac{6}{3^4}+\frac{7}{3^4}+\frac{8}{3^4})+\ldots+$$
$$+(\frac{4k-3}{3^{k+2}}+\frac{4k-2}{3^{k+2}}+\frac{4k-1}{3^{k+2}}+\frac{4k}{3^{k+2}})+\frac{4k+1}{3^{k+2}}+\frac{4k+2}{3^{k+2}}=1,$$

при што соодветните равенства за 2 се исто така точни.