Војислав Андрић,
Ваљево, Србија

БРОЈ ДЕЛИЛАЦА ПРИРОДНОГ БРОЈА

Број делилаца природног броја се најчешће добија растављањем броја на просте чиниоце и исписивањем делилаца по неком од могућих система (од најмањег ка највећем, од највећег ка најмањем, спаривањем два по два делиоца ...). Међутим проблеми настају када је број толико велики да је немогуће набројати све делиоце. Циљ ове теме је да нешто конкретније анализира општи случај и прикаже најкарактеристичније од могућих примена.

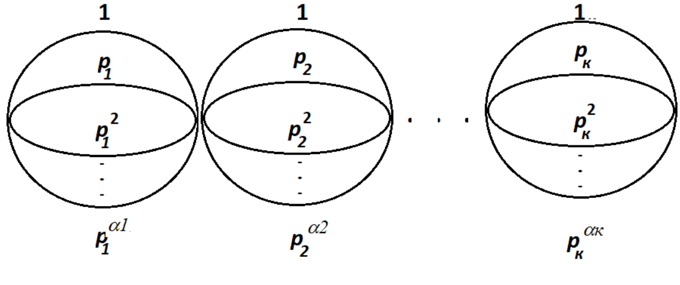
<u>ПРИМЕР 1.</u> Колико различитих делилаца укључујући број 1 и само себе има број 108.

РЕШЕЊЕ: Број $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$. Делиоци броја 2^3 су 1, 2, 4, 8, а делиоци броја 3^2 су 1, 3 и 9. Сви делиоци броја 72 добијају се укрштањем (комбиновањем) једног делиоца броја 2^3 са једним делиоцем броја 3^2. Тих укрштања има $4 \cdot 3 = 12$, па број 72 има 12 различитих делилаца. ■

Сваки природан број n се може на јединствен начин записати у облику $p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdot \ldots \cdot p_к^{\alpha к}$ где су p_1, p_2 ... $p_к$ неки прости бројеви, а α_1, α_2 ... $\alpha_к$ ненегативни цели бројеви. Наведени облик природног броја назива се *канонски облик природног броја.*

<u>ПРИМЕР 2.</u> Колико делилаца има број $n = p_1^{\alpha 1} p_2^{\alpha 2} \ldots p_к^{\alpha к}$ ако су p_1, p_2 ... $p_к$ различити прости бројеви, а α_1, α_2 ... $\alpha_к$ ненегативни цели бројеви?

РЕШЕЊЕ: Ако је $n = p_1^{\alpha 1} p_2^{\alpha 2} \ldots p_к^{\alpha к}$ онда су сви делиоци броја $p_1^{\alpha 1}$ редом 1, p_1, p_1^2 ... $p_1^{\alpha 1}$ и има их $(\alpha_1 + 1)$. Слично, $p_2^{\alpha 2}$ има $(\alpha_2 + 1)$ ... и на крају $p_к^{\alpha к}$ има $(\alpha_к + 1)$ делилац.



Укрштањем свих могућих делилаца природног броја n добија се да он има $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_к + 1)$ делилаца. ■

<u>ПРИМЕР 3.</u> Колико делилаца има број 2020^3*?*

РЕШЕЊЕ: Како је $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, то је $2020^3 = (2^2 \cdot 5 \cdot 101)^3$ то је број $2020^3 = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 101^3$ и има $(6 + 1)(3 + 1)(3 + 1) = 7 \cdot 4 \cdot 4 = 112$ делилаца. ■

<u>ПРИМЕР 4.</u> Колико има природних бројева дељивих са 33 *који имају* 33 *делиоца?*

РЕШЕЊЕ: Како је $33 = 3 \cdot 11 = 1 \cdot 33$, то је $n = 3^{\alpha 1} \cdot 11^{\alpha 2}$. Следи да је $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 33$, па је $n_1 = 3^2 \cdot 11^{10}$ или $n_2 = 3^{10} \cdot 11^2$. ■

<u>ПРИМЕР 5.</u> Одреди највећи заједнички делилац и најмањи заједнички садржалац бројева

$$a = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2,\ b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \text{ и } c = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3.$$

РЕШЕЊЕ: НЗД датих бројева је највећи број који дели сваки од датих бројева и има облик $n = 2^{\alpha 1} \cdot 3^{\alpha 2} \cdot 5^{\alpha 3}$, што значи да су α_1, α_2 и α_3 најмањи од изложилаца степена бројева 2, 3 односно 5. Због тога је НЗД једнак $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, јер су 2^3, 3 и 5^2 највећи од бројева које деле и a и b и c.

Слично, НЗС датих бројева је је највећи број који садржи сваки од датих бројева и има облик $n = 2^{\alpha 1} \cdot 3^{\alpha 2} \cdot 5^{\alpha 3}$, што значи да су α_1, α_2 и α_3 највећи од изложилаца степена бројева 2, 3 односно 5. Због тога је НЗС једнак $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^5$, јер су 2^5, 3^4 и 5^5 највећи од бројева који се садрже и у a, и у b и у c. ■

<u>*ПРИМЕР 6.*</u> Докажи да ако природан број има непаран број делилаца, онда је он потпун квадрат. Важи ли обрнуто тврђење?

РЕШЕЊЕ: Ако је број делилаца природног броја $n = p_1^{\alpha 1} p_2^{\alpha 2} \ldots p_к^{\alpha к}$ непаран број, онда је $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_к + 1)$ непаран број. Како је производ природних бројева непаран ако и само ако су сви чиниоци непарни то значи да је

$$\alpha_1 + 1 = 2\beta_1 + 1,\ \alpha_2 + 1 = 2\beta_2 + 1,\ ...,\ \alpha_к + 1 = 2\beta_к + 1.$$

То значи да је

$$\alpha_1 = 2\beta_1,\ \alpha_2 = 2\beta_2,\ ...\ ,\ \alpha_к = 2\beta_к.$$

Следи да је канонски облик броја

$$n = p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \ldots p_к^{2\beta_к} = (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_к^{\beta_к})^2 = m^2$$

што је и требало доказати.

На сличан начин се доказује да важи и обрнуто тврђење, тј. да ако је природан број потпун квадрат, да онда он има непаран број делилаца. ■

ПРИМЕР 7. Три ученика Раша, Жарко и Лека дали су следеће исказе о природном броју n.

Раша: Број n има 14 делилаца;

Жарко: Број n^2 има 28 делилаца;

Лека: Број n је дељив са 12.

Испоставило се да су два од датих исказа били тачни, а један нетачан. Одреди n.

РЕШЕЊЕ: Жарко је изјавио да број n^2 има 28 делилаца, што на основу тврђења из примера 6 није тачно. Сада се, јер су преостали искази тачни, проблем своди на одређивање броја n који има 14 делилаца и дељив је са 12, дакле са 3 и 4. Како је

$$14 = 1 \cdot 14 \ (0 + 1)(13 + 1) \text{ или } 14 = 2 \cdot 7 = (1 + 1)(1 + 6) ,$$

то је тражени број $n = p^{13}$ или $p^6 \cdot q$. Први случај не долази у обзир јер број n мора бити дељив и са 3 и 4, а у другом случају у обзир долазе бројеви $2^6 \cdot 3$ или $3^6 \cdot 2$. Очигледно условима задатка одговара само први број

$$n = 2^6 \cdot 3 = 64 \cdot 3 = 192$$

који је дељив и са 3 и са 4 (па према томе и са 12), јер други број је дељив са 2, а није дељив са 4. ■

ПРИМЕР 8. Потпуни кубови $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $5^3 = 125$ ... имају тачно 4 делиоца. Да ли су сви бројеви који имају 4 делиоца потпуни кубови? Да ли сви потпуни кубови имају 4 делиоца? Може ли број који је потпуни куб имати 16 делилаца?

Нису сви бројеви који имају 4 делиоца потпуни кубови, јер бројеви 6, 10, 14, 15 ... имају 4 делиоца, а нису потпуни кубови. Уопште бројеви облика $p \cdot q$, где су p и q прости бројеви имају 4 делиоца (1, p, q, pq) али нису потпуни кубови.

И сви потпуни кубови немају 4 делиоца, већ само потпуни кубови простих бројева. Тако на пример $4^3 = 64$ има 7 делилаца, а број $6^3 = 216$ чак 9 делилаца, а $7^3 = 343$ само 4 делиоца.

Ако потпун куб има 16 делилаца, онда је он облика $p^{15} = (p^5)^3$. Најмањи број тог облика је $(2^5)^3 = 32^3$. ■

Младим математичарима препоручујемо да стечена знања увежбају и утврде самостаним решавањем следећих проблема:

1. Колико делилаца има број 540. Колико од њих су парни, а колико непарни?

2. Колико парних и непарних делилаца има број $n = 2^{\alpha 1} p_2^{\alpha 2} \ldots p_к^{\alpha к}$ ако су $p_2, p_3 \ldots p_к$ различити непарни прости бројеви, а $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_к$ ненегативни цели бројеви?

3. Колико делилаца има број $m = 2^9 \cdot 3^8 \cdot 4^7 \cdot 5^6 \cdot 6^5$?

4. Ако природан број n има 8 делилаца, онда је $n > 23$. Докажи.

5. Одреди највећи заједнички делилац и најмањи заједнички садржалац бројева: 72, 108 и 540.

6. Одреди најмањи природан број који има 43 делиоца.

7. Одреди најмањи природан број који има 77 делилаца.

8. Израчунај највећи петоцифрен број који има 5 делилаца.

9. Одреди најмањи природан који има 18 делилаца.

10. Одреди најмањи природан број који је дељив са 12 и који има 30 делилаца.

11. Одреди најмањи природан број који је дељив са 30 и који има 12 делилаца.

12. Постоји ли природан број који је дељив са 100 и има 100 делилаца?

13. Постоји ли природан број који је мањи од 10^{30} и који има 2020 делилаца?

14. Природан број n има 6 делилаца, а n^2 има 15 делилаца. Колико делилаца има број n^3?

15. Дата је једначина $x^2 - y^2 = 2^5 \cdot 3^6$. Колико решења у скупу природних бројева има дата једначина?

16. Колико решења: а) у скупу природних бројева; б) у скупу целих бројева има једначина $x^2 - y^2 = 2^n$ (n је природан број).

17. На командном пулту налази се 2022 тастера који су нумерисани бројевима од 1 до 2022. Сваки тастер пали (или гаси) сијалицу која је нумерисана истим бројем. Тренутно су све сијалице угашене. Први ученик притисне сваки тастер и упали све сијалице. Затим други ученик притисне сваки други тастер, трећи ученик сваки трећи тастер ... k-ти ученик притисне сваки k-ти тастер. Колико и које сијалице ће бити упаљене, после проласка 2022.- тог ученика?