Gordana Bojović (Beograd)

RASTAVLJANJE POLINOMA NA ČINIOCE

Polinomi $P(x, y)$ po promenjivim x, y su izrazi oblika $x + 2y$, $x^2 - y^3$, $y^3 + 3y - 7$ (u njemu x ne učestvuje), $5xy - 6y^2 + y$ i sl. Polinom $P(x, y)$ je rastavljen na proizvod polinoma $P_1(x, y)$ i $P_2(x, y)$ ako je za svako x i y ispunjeno

$$P(x, y) = P_1(x, y) \cdot P_2(x, y).$$

U tom slučaju polinomi P_1 i P_2 su činioci ili delioci polinoma P.

Primer 1. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)(x^2-1)$, a to je dalje

$$= (x-2)(x-1)(x+1).$$

Da bismo jedan polinom rastavili na činioce koristimo nekoliko metoda.

1. Koristimo zakon distribucije da bismo zajednički činilac izdvojili pred zagradu: $2a^2b - 4a = 2a \cdot ab - 2a \cdot 2$,

$$= 2a(ab-2).$$

Često nemaju svi članovi polinoma zajednički činilac, ali se mogu grupisati tako da se taj činilac pronađe.

Primer 2. $ac + ad + bd + bc = a(c+d) + b(c+d) = (c+d)(a+b)$.

2. Primenjujemo obrasce za

kvadrat zbira i razlike $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,

razliku kvadrata $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,

kub zbira i razlike $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$,

$$= (a \pm b)(a \pm b)(a \pm b),$$

zbir i razliku kubova $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Primer 3. Polinom $(a^2+1)^2 - 4a^2$ može se lako rastaviti na činioce ako prvo primenimo razliku kvadrata

$$(a^2+1)^2 - 4a^2 = (a^2+1)^2 - (2a)^2,$$
$$= [(a^2+1) - 2a][(a^2+1) + 2a],$$
$$= (a^2 - 2a + 1)(a^2 + 2a + 1);$$

na osnovu kvadrata zbira i razlike imamo dalje:

$$= (a-1)^2 (a+1)^2,$$

$$= (a-1)(a-1)(a+1)(a+1).$$

Ponekad ove dve metode treba kombinovati ili primeniti više puta uzastopno.

Primer 4. Dat je polinom $a^3 + a^2 b - ab^2 - b^3$.

Izvlačenjem zajedničkog činioca iz prva dva člana i druga dva člana dobijamo: $a^3 + a^2 b - ab^2 - b^2 = a^2(a+b) - b^2(a+b)$,

$$= (a+b)(a^2 - b^2),$$

$$= (a+b)(a+b)(a-b).$$

Polinom može biti dat u takvom obliku da se na njega ne može neposredno primeniti ni jedna od navedenih metoda. Kod takvih polinoma prethodno treba izvršiti neke transformacije, ali se držimo opšteg principa da treba pronaći sličnost po strukturi između datog polinoma i jednog od osnovnih obrazaca i pri izboru puta za rastavljanje upravljamo se prema tom osnovnom obrascu.

a) Znamo da je $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. Ako posmatramo polinom $x^2 + 8x + 12$ vidimo da je prvi član x^2, drugi član je $2 \cdot 4 \cdot x$, ali $12 \neq 4^2$. Ovom polinomu nedostaje 4 da bi bio potpun kvadrat binoma $x + 4$ pa se može napisati

$$x^2 + 8x + 12 = (x+4)^2 - 4,$$

$$= (x+4)^2 - 2^2 \text{ (ovo je razlika kvadrata)},$$

$$= (x+4+2)(x+4-2)$$

$$= (x+6)(x+2).$$

b) Rastavimo na činioce polinom

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2.$$

Član $3x^2$ napišimo kao zbir x^2 i $2x^2$ pa dobijamo

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (x^4 + x^3 + x^2) + (2x^2 + 2x + 2);$$

izdvojimo zajednički činilac članova u svakoj zagradi, pa imamo dalje

$$= x^2(x^2 + x + 1) + 2(x^2 + x + 1),$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2).$$

3. Da bismo rastavili na činioce trinom drugog stepena, čiji je koeficijent uz x^2 jednak 1, možemo pretpostaviti da je taj polinom proizvod binoma $(x+a)(x+b)$. Kako je

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab,$$
$$= x^2 + (a+b)x + ab,$$

znači da je koeficijent linearnog člana u proizvodu jednak zbiru slobodnih članova binoma $(x+a)$ i $(x+b)$, a slobodni član trinoma je proizvod ab.

Primer 5. Dat je polinom $x^2 + 7x + 12$. Pretpostavimo da je

$$x^2 + 7x + 12 = (x+a)(x+b).$$

Odavde dobijamo

$$a + b = 7, \qquad a \cdot b = 12,$$

što daje

$$a = 3, \qquad b = 4,$$

pa je

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4).$$

Da bismo lakše rastavili polinom $P(x)$ na činioce, korisno je znati neke teoreme, koje će biti navedene bez dokaza.

1. Da bi polinom $f(x)$ bio deljiv sa $(x-a)$ potrebno je i dovoljno da a bude nula polinoma $f(x)$ (tj. da je $f(a)=0$).

2. Ako je $f(x)$ polinom čiji su koeficijenti celi brojevi i ako je $(x+a)$ delilac polinoma $f(x)$, tada je a delilac slobodnog člana polinoma $f(x)$.

3. Ako polinom ima k različitih nula $a_1, a_2, \ldots, a_k$, on je deljiv proizvodom $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)$.

4. Polinom n-og stepena u skupu racionalnih brojeva ne može imati više od n nula.

5. Ako polinom čiji su koeficijenti celi brojevi ima za $x=0$ i $x=1$, neparne vrednosti, onda on nema celih nula.

Prema tome, da bismo odredili da li se dati polinom može napisati u obliku proizvoda $(x+a)(x+b)$ prvo odredimo delioce njegovog slobodnog člana i ispitamo da li je vrednost polinoma za te delioce 0.

Primer 6. $f(x)=x^2-x-6$ ima slobodni član -6. Njegovi delioc su $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Odredimo vrednost polinoma za svaki delilac. $f(1)=-6$, $f(-1)-=4$, itd. Dobijamo da je $f(-2)=0$ i $f(3)=0$. Znači da je $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$.

Ako su koeficijenti polinoma $f(x)$ racionalni brojevi, tada treba pomnožiti dati polinom najmanjim zajedničkim imeniocem koeficijenata, na pr. k, pa se dobije polinom $k \cdot f(x)$ sa celim koeficijentima, koji ima iste nule kao i polinom $f(x)$.

Rastavljanje polinoma na činioce ima primenu u operacijama sa algebarskim razlomcima i u rešavanju nekih vrsta jednačina.

Primeri:

a) Rešiti jednačinu: $x^2+2x+9y^2+6y+2=0$,

$$\Leftrightarrow x^2+2x+9y^2+6y+1+1=0,$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)+(9y^2+6y+1)=0,$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(3y+1)^2=0,$$

$$\Leftrightarrow (x+1=0)\wedge(3y+1)=0,$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \wedge y=-\frac{1}{3}.$$

b) Dokaži da je za svako $n \in N$ polinom $n^4+3n^3-n^2-3n$ deljiv brojem 6.

$$\begin{aligned} n^4+3n^3-n^2-3n &= (n^4-n^2)+(3n^3-3n), \\ &= n^2(n^2-1)+3n(n^2-1), \\ &= (n^2-1)(n^2+3n), \\ &= (n-1)(n+1)\cdot n(n+3), \\ &= (n-1)\cdot n(n+1)(n+3). \end{aligned}$$

Kako su $(n-1)$, n i $(n+1)$ tri uzastopna prirodna broja, sledi da je bar jedan od njih deljiv sa 2 i jedan deljiv sa 3, a to znači da je dobijeni proizvod deljiv sa $2 \cdot 3 = 6$.

c) Skrati razlomak: $\dfrac{x^2+x-6}{x^3-4x^2-11x+30}$.

Da bismo skratili razlomak potrebno je brojilac $f(x)$ i imenilac $g(x)$ napisati u obliku proizvoda. Učinimo to prvo sa brojiocem. Među deliocima njegovog slobodnog člana naći ćemo da je $f(-3)=0$ i $f(2)=0$, pa je $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$. Sad ispitajmo da li su $(x+3)$ i $(x-2)$ delioci imenioca, to jest da li su -3 i 2 nule polinoma $g(x)$.

$$g(-3)=(-3)^3-4\cdot(-3)^2-11\cdot(-3)+30=0,$$

$$g(2)=2^3-4\cdot 2^2-11\cdot 2+30=0;$$

znači, polinom $g(x)$ je deljiv sa $(x+3)$ i $(x-2)$ Kako je slobodni član imenioca 30, a $(-3)\cdot(+2)=-6$, treba ispitati da li je 5 nula polinoma $g(x)$. Dobijamo $5^3-4\cdot 5^2-11\cdot 5+30=0$, pa je

$$x^3-4x^2-11x+30=(x+3)(x-2)(x-5);$$

dalje je

$$\frac{x^2+x-6}{x^3-4x^2-11x+30}=\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-2)(x-5)}=\frac{1}{x-5}.$$

Zadaci

1. Dokaži da je za svako $n \in N$ polinom n^5-5n^3+4n deljiv brojem 60.

2. Odredi vrednosti x i y koje zadovoljavaju uslov

$$x^2+y^2-6x-10y+34=0$$

3. Skrati razlomak

a) $\dfrac{(a^2+2)^2-4a^2}{(a^2-2a+2)(a^2+2a+2)}$; b) $\dfrac{a^2-b^2-a-b}{2a+2b}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија