Републички натпревар 2004

I година

1. Во едно маало живеат 4 добри другари Горан, Зоран, Јован и Стојан. Секој од нив има постар брат кој се вика како еден од неговите другари. Името на таткото на секој од нив е име на некој од неговите другари. Секој татко заедно со неговите двајца синови имаат различни имиња.

Таткото на Стојан и братот на Јован го носат името на детето чиј брат се вика Јован. Братот на детето што го носи името на Зорановиот брат се вика како детето чиј татко е Горан.

Чиј татко се вика Стојан?

Решение. Да ги означиме децата со почетните букви од нивните имиња, т.е. со $Г,З,J,C$. Ако X е едно од децата, тогаш го означуваме со $Б(X)$ името на неговиот брат, а со $T(X)$ името на неговиот татко. Тогаш, условите на задачата, преку овие ознаки може да се формулираат на следниот начин:

(1) $X \neq Б(X) \neq T(X) \neq X$, за секој $X \in \{Г,\ З,\ J,\ C\}$

(2) $Б(X) = J \Leftrightarrow T(C) = Б(J) = X$

(3) $X = Б(З) \Leftrightarrow T(Б(X)) = Г$

Бидејќи, $T(C) \neq C$ и $T(J) \neq J$, можни се следните два случаја

1^0 $T(C) = Б(J) = Г$

Тогаш, според (2) $Б(Г) = J$, од каде $Б(З) = C$. Но, според (3) следи дека $T(Б(C)) = T(З) = Г$, што не е можно, бидејќи $T(C) = Г$.

2^0 $T(C) = Б(J) = З$

Тогаш, од (2) имаме дека $Б(З) = J$, а од (3) дека $T(Б(J)) = Г$, односно дека $T(З) = Г$. Па, имаме дека $Б(J) = З$ и од $Б(З) = J$ и $T(З) = Г$, следи дека $Б(Г) = C$, $Б(C) = Г$ и $T(C) = З$. Значи, $T(J) = C$, од каде $T(Г) = J$.

Значи, таткото на Јован се вика Стојан.

2. Ако за реалните различни од нула броеви $x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w$ важи $\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}=1$ и $\frac{u}{x}+\frac{v}{y}+\frac{w}{z}=0$, докажи дека тогаш важи $\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{v^2}+\frac{z^2}{w^2}=1$.

Решение. Ставаме смени: $a=\frac{x}{u}$, $b=\frac{y}{v}$, $c=\frac{z}{w}$. Тогаш,

$$a+b+c=1 \text{ и } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

Од последното равенство се добива $\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$, од каде $ab+bc+ca=0$. Тогаш, имаме

$$1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2,$$

односно $1=\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{v^2}+\frac{z^2}{w^2}$, што требаше да се докаже.

3. Најди го најголемиот природен број n, за кој бројот $999\ldots99$ (со 999 деветки) е делив со 9^n.

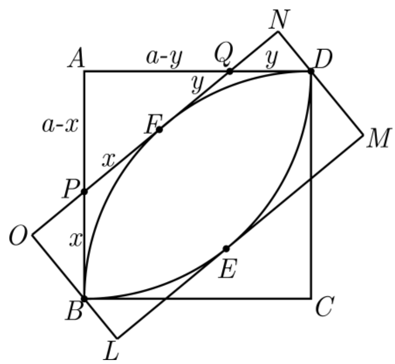
Решение. Го запишуваме бројот $999\ldots99$ (со 999 деветки) како $10^{999}-1$ и потоа го разложуваме на множители

$$\begin{aligned}10^{999}-1&=(10^{666}+10^{333}+1)(10^{333}-1)\\&=(10^{666}+10^{333}+1)(10^{222}+10^{111}+1)(10^{111}-1)\\&=(10^{666}+10^{333}+1)(10^{222}+10^{111}+1)(10^{74}+10^{37}+1)(10^{37}-1)\\&=(10^{666}+10^{333}+1)(10^{222}+10^{111}+1)(10^{74}+10^{37}+1)\cdot 9\cdot \underbrace{111\ldots11}_{37-\text{единици}}\end{aligned}$$

Секој од првите три множители е делив со 3, затоа што збирот на нивните цифри е 3. Четвртиот множител е 3^2, значи делив е со 3^2. Петтиот множител не е делив со 3, затоа што збирот на неговите цифри е 37. Значи, дадениот број е делив со $3\cdot3\cdot3\cdot3^2=3^5$, односно со $9^{2.5}$. Бидејќи n е природен број, важи $n=[2.5]=2$. Значи, најголемиот природен број n, за кој бројот $999\ldots99$ (со 999 деветки) е делив со 9^n е 2.

4. Фигурата $\boldsymbol{F}$ се состои од точките B и D и лаците BD конструирани во внатрешноста на квадратот $ABCD$ со центри во A и C и со радиуси AB. Докажи дека сите правоаголници опишани околу фигурата $\boldsymbol{F}$, така што секоја страна на правоаголникот има точно една заедничка точка со фигурата $\boldsymbol{F}$, имаат исти периметри.

Решение. Нека $LMNO$ е произволен правоаголник опишан околу фигурата $\boldsymbol{F}$, и нека допирните точки на $\boldsymbol{F}$ со правоаголникот се B, E, D, F. Нека страната ON ги сече страните AB и AD на квадратот во точките P и Q соодветно. (види цртеж)



Нека $\overline{PF}=x$, $\overline{FQ}=y$. Тогаш, $\overline{BP}=x$, $\overline{AP}=a-x$, $\overline{QD}=y$ и $\overline{AQ}=a-y$, каде a е должината на страната на квадратот $ABCD$.

Од $\triangle BPO \sim \triangle QPA$ ($\measuredangle BPO=\measuredangle QPA$, како накрсни агли и $\measuredangle BOP=\measuredangle QAP=90^\circ$) следи дека $\frac{\overline{OP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{QP}}$ и $\frac{\overline{OB}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}}$, па $\overline{OP}=x\cdot\frac{a-x}{x+y}$ и

$\overline{OB} = x \cdot \frac{a-y}{x+y}$.

Аналогно се покажува дека $\triangle QPA \sim \triangle QDN$, од каде се добива дека $\overline{DN} = y \cdot \frac{a-x}{x+y}$ и $\overline{QN} = y \cdot \frac{a-y}{x+y}$. Тогаш, имаме

$$\overline{BO} + \overline{ON} + \overline{ND} = x \cdot \frac{a-y}{x+y} + x \cdot \frac{a-x}{x+y} + x + y + y \cdot \frac{a-y}{x+y} + x \cdot \frac{a-x}{x+y}$$
$$= x + y + \frac{2ax+2ay-x^2-y^2-2xy}{x+y} = x + y + 2a - (x+y) = 2a$$

Аналогно, $\overline{BL} + \overline{LM} + \overline{MD} = 2a$, па следи дека периметарот на правоаголникот $LMNO$ е $\overline{LM} + \overline{MN} + \overline{NO} + \overline{OL} = 4a$, односно е константен, што требаше да се докаже.

II година

1. Нека x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2 + ax + b = 0$, каде што $a, b \in \mathbb{Z}$. Докажи дека $x_1^n + x_2^n$ е цел број, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека $S_1 = x_1 + x_2 = -a \in \mathbb{Z}$,

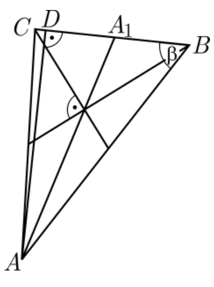
$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2b \in \mathbb{Z}$$

За $n \geq 3$ имаме:

$$(x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) = x_1^n + x_2^n + x_1x_2(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}),$$

односно $S_n = -aS_{n-1} - bS_{n-2}$. Значи, $S_3 \in \mathbb{Z}$, итн., односно за секој $n \in \mathbb{N}$, $x_1^n + x_2^n$ е цел број.

2. Ако тежишните линии од темињата B и C на триаголникот ABC се нормални, тогаш докажи дека $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \geq \frac{2}{3}$.



Решение. Нека AD е висината спуштена од темето A. Тогаш $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$, $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$, односно

$\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$. Бидејќи $\measuredangle CTB = 90^\circ$ следува

$2\overline{A_1T} = \overline{BC}$ па $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{2\overline{A_1T}}{\overline{AD}} \geq \frac{2\overline{A_1T}}{\overline{AA_1}} = \frac{2}{3}$.

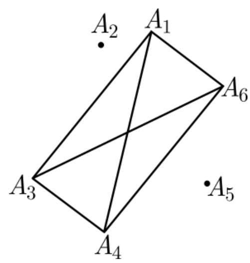
3. Квадратниот трином $f(x) = ax^2 + bx + c$ е таков што равенката $f(x) = x$ нема реални корени. Докажи дека и равенката $f(f(x)) = x$ нема реални корени.

Решение. Нека $f(x) = x$ нема реални корени, односно $f(x) - x = 0$ нема реални корени. Значи за $a > 0$, $f(x) - x > 0$ или за $a < 0$, $f(x) - x < 0$.

Нека $a>0$. Од $f(x)>x$ следува дека $f(f(x))>f(x)>x$. Слично, ако $a<0$ имаме $f(f(x))<x$. Значи, $f(f(x))=x$ нема реални корени.

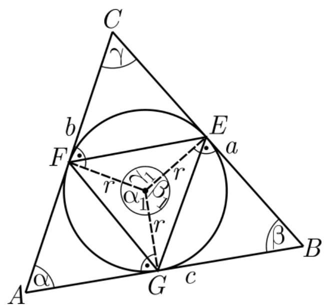
4. Најди ги сите природни броеви n, $n>3$, за кои што постои конвексен n-аголник во кој сите дијагонали се со еднаква должина.

Решение. За $n=4$, таков е квадратот, а за $n=5$ таков е правилниот петаголник. Нека $n>5$. Да претпоставиме дека таков n-аголник постои и нека неговите последователни темиња ги означиме со $A_1, A_2, ..., A_n$. Го разгледуваме конвексниот четириаголник $A_1A_3A_4A_6$. Од неравенството на триаголник имаме: $\overline{A_1A_4}+\overline{A_3A_6}>\overline{A_1A_3}+\overline{A_4A_6}$ што е контрадикција со $\overline{A_1A_4}=\overline{A_3A_6}=\overline{A_1A_3}=\overline{A_4A_6}$.



III година

1. Во триаголник ABC со страни a, b и c, впишана е кружница. Допирните точки на кружницата со страните на триаголникот одредуваат триаголник EFG. Пресметај ја плоштината на ΔEFG, ако плоштината на ΔABC е P.



Решение. Нека се R и r радиусите на опишаната и впишаната кружница во ΔABC соодветно, а O центарот на впишаната кружница. Нека е P_1 е плоштината на $\triangle EFG$. Важи

$$P_1=P_{EOF}+P_{FOG}+P_{GOE}=\frac{r^2}{2}(\sin\alpha_1+\sin\beta_1+\sin\gamma_1).$$

Од друга страна $\alpha_1=180^\circ-\alpha$, $\beta_1=180^\circ-\beta$ и $\gamma_1=180^\circ-\gamma$, па

$$P_1=\frac{r^2}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma).$$

Користејќи синусна теорема добиваме

$$P_1=\frac{r^2}{2}\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right)=\frac{r^2}{4R}(a+b+c).$$

Ако се искористат уште и познатите равенства $P=\frac{abc}{4R}$, $P=rs$, $s=\frac{a+b+c}{2}$ се добива $P_1=\frac{2P^3}{sabc}$.

2. Ако за агол $\alpha<90^\circ$, важи $\alpha-\sin\alpha\le\frac{\alpha^3}{4}$, докажи дека е точно и неравенството $1-\frac{\alpha^2}{2}\le\cos\alpha\le 1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{16}$.

Решение. За $\alpha < 90^\circ$, важи $\sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{\alpha}{2}$. Со квадрирање $\sin^2\frac{\alpha}{2} \le \frac{\alpha^2}{4}$, од каде $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \ge 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Со тоа е докажана едната страна на неравенството, $1 - \frac{\alpha^2}{2} \le \cos\alpha$. Инаку, кога $\alpha < 90^\circ$, $\frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, па од условот на задачата имаме $\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{\alpha^3}{32}$, односно $\sin\frac{\alpha}{2} \ge \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{32}$. Тогаш

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} \ge 2(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{32})^2 = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{16} + \frac{\alpha^6}{648} \ge \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{16},$$

па со замена во $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16}$.

Конечно,

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} \le \cos\alpha \le 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16}.$$

3. Нека $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ е неконстантен полином со целобројни коефициенти, за кој важи $p(-1) = 0$ и $p(\sqrt{2})$ е цел број. Докажи дека постои природен број k, таков што $p(k) + a_k$ е парен број.

Решение. Од $p(-1) = 0$, следува $a_0 + a_2 + \cdots a_r = a_1 + a_3 + \cdots a_s$, каде r и s се најголемиот парен и најголемиот непарен број не поголем од n, соодветно.

$$p(\sqrt{2}) = (a_0 + 2a_2 + 2^2 a_4 + \cdots 2^{\frac{r}{2}} a_r) + (a_1 + 2a_3 + 2^2 a_5 + \cdots + 2^{\frac{s-1}{2}} a_s) \cdot \sqrt{2}$$

е цел број, па мора $a_1 + 2a_3 + 2^2 a_5 + \cdots + 2^{\frac{s-1}{2}} a_s = 0$, односно a_1 е парен број.

Од друга страна, $p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_r)$ е исто така парен број. Јасно, тогаш и $p(1) + a_1$ е парен број, па за $k = 1$ е исполнето барањето на задачата.

4. Дадени се пет отсечки, така што од секои три од нив може да се состави триаголник. Докажи дека барем еден од тие триаголници е остроаголен.

Решение: Нека должините на дадените отсечки се a, b, c, d и e, при што $a \le b \le c \le d \le e$. Да претпоставиме дека ниту еден од триаголниците кои се добиваат не е остроаголен. Ако искористиме дека за триаголник кој не е остроаголен, со страни $x \le y \le z$, од косинусната теорема важи $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma \ge x^2 + y^2$ (γ не е остар, па $\cos\gamma \le 0$), добиваме релации $e^2 \ge d^2 + c^2$, $d^2 \ge c^2 + b^2$, $c^2 \ge b^2 + a^2$. Со собирање на последните три неравенства се добива $e^2 \ge a^2 + 2b^2 + a^2 \ge a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, односно $e \ge a + b$, што е противречност на условот дека од отсечките со должини a, b и e, може да се состави триаголник. Јасно , мора барем еден од триаголниците да е остроаголен.

IV година

1. Ако n е природен број поголем од 2, докажи дека меѓу дропките $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ има парен број нескратливи дропки.

Решение. Ако k е природен број, $1 \le k < \frac{n}{2}$ и $\frac{k}{n}$ е нескратлива дропка, тогаш $\mathrm{NZD}(k,n)=1$. Но, тогаш и

$$\mathrm{NZD}(n-k,n)=\mathrm{NZD}(n-(n-k),n)=\mathrm{NZD}(k,n)=1,$$

т.е. дропката $\frac{n-k}{n}$ е исто така нескратлива и $\frac{n}{2} < n-k < n$. Значи за секоја нескратлива дропка $\frac{k}{n}$, за $1 \le k < \frac{n}{2}$ постои единствена нескратлива дропка $\frac{n-k}{n}$. Притоа важи $\frac{k}{n} \ne \frac{n-k}{n}$, бидејќи во спротивно добиваме $n=2k$ и $\frac{k}{n}=\frac{n}{2n}$ е скратлива со $n>2$. Значи, добиваме дека бројот на нескратливи дропки е парен.

2. Нека a,b,c,A,B,C се ненегативни реални броеви такви што

$$a+A=b+B=c+C=k .$$

Докажи дека

$$aB+bC+cA \le k^2 .$$

Решение. *Прв начин.* Од

$$\begin{aligned} k^3 &= (a+A)(b+B)(c+C) \\ &= abc+ABC+cA(b+B)+bC(a+A)+aB(c+C0 \\ &= abc+ABC+k(aB+bC+cA) \end{aligned}$$

и од $aB+bC+cA \le k^2$ следува дека

$$k(aB+bC+cA) \le k^3 \text{, т.е. } aB+bC+cA \le k^2 .$$

Втор начин. Не се губи од општоста ако претпоставиме дека $a \le b \le c$. Тогаш

$$\begin{aligned} aB+bC+cAa &= a(k-b)+b(k-c)+c(k-a) \\ &= k(a+b+c)-ab-ba-ca \\ &= b(k-a-c)+ka+kc-ac \end{aligned}$$

Значи неравенството $aB+bC+cA \le k^2$ е еквивалентно со

$$b(k-a-c) \le k^2-ka-kc+ac=(k-a)(k-c) \qquad (1)$$

Ако $k \le a+c$, тогаш за левата страна на (1) добиваме $b(k-a-c) \le 0$. Десната страна од (1) е ненегативна, па (1) важи.

Ако $k > a+c$, тогаш $k-a > c \ge b$ и $k-c \ge k-a-c$ од каде што следува (1).

3. Низата (a_n) е зададена со $a_1=\frac{1}{2}$, $a_n=\frac{a_{n-1}}{2na_{n-1}+1}$ за $n>1$. Определи го збирот $a_1+\ldots+a_k$, за секој природен број k .

Решение. *Прв начин.* Заради $a_1 = \frac{1}{2} > 0$ следува дека $a_n > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Натаму, за $n > 1$ имаме $a_n = \frac{a_{n-1}}{2na_{n-1}+1} = \frac{1}{2n+\frac{1}{a_{n-1}}}$. Оттука

$$\frac{1}{a_n} = 2n + \frac{1}{a_{n-1}} = 2n + 2(n-1) + \frac{1}{a_{n-2}} = \dots = 2n + 2(n-1) + \dots + 2\cdot 2 + \frac{1}{a_1}$$
$$= 2n + 2(n-1) + \dots + 2\cdot 2 + 2\cdot 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Според тоа $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Значи за произволен $k \in \mathbb{N}$ имаме $a_1 + \dots + a_k = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$

Втор начин. Со помош на принципот на математичка индукција ќе докажеме дека $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$, за секој $k \in \mathbb{N}$. За $k = 1$ важи $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$. Да претпоставиме дека тврдењето важи за природниот број $n-1$. Тогаш за n имаме

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2na_{n-1}+1} = \frac{\frac{1}{n(n-1)}}{2n\frac{1}{n(n-1)}+1} = \frac{1}{2n+n^2-n} = \frac{1}{n(n+1)},$$

па $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$, за секој $k \in \mathbb{N}$.

Конечно, $a_1 + \dots + a_k = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$

4. По завршувањето на еден шаховски турнир се утврдило дека секој учесник освоил точно половина од своите поени играјќи со натпреварувачите кои се пласирале на последните три места. Колку учесници имало на турнирот?
(Притоа, секој учесник одиграл по една партија со секој од останатите учесници. За победа се добива по еден поен, за реми половина поен а за пораз не се добива ниту еден поен.)

Решение. Нека на турнирот учествувале n натпреварувачи. Последнопласираните три натпреварувачи одиграле меѓусебно три партии и поделиле три поени. Тие три поени се половина од поените кои ги освоиле на крајот, па половината од нивните поени ги освоиле во партиите со останатите $n-3$ натпреварувачи. Значи во партиите со останатите $n-3$ натпреварувачи последните тројца освоиле три поени. Според тоа останатите $n-3$ учесници одиграле со последните тројца $3(n-3)$ партии и освоиле вкупно $3(n-3)-3$ поени. Од условот на задачата тој број на поени е еднаков на бројот на поените кои тие ги поделиле меѓусебно, односно на $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$.

Значи ја добиваме равенката $3(n-3)-3 = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)$. Нејзините решенија се $n_1 = 4$ и $n_2 = 9$. Случајот $n_1 = 4$ не ги исполнува условите на задачата бидејќи првиот натпреварувач нема со кого да ги освои половината од своите поени. Според тоа на турнирот имало девет учесници.