LV олимпијада

1. Нека $a_0 < a_1 < a_2 < ...$ е бесконечна низа природни броеви. Докажи, дека постои точно еден природен број n таков што важи

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + ... + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Решение. *Прв начин*. Да означиме $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$. Условот

$$a_n < \frac{s_n}{n} \leq a_{n+1},$$

по множењето со n го добива обликот

$$na_n - s_n < 0 \leq na_{n+1} - s_n, \text{ т.е. } f_n < 0 \leq f_{n+1},$$

каде $f_n = na_n - s_n$. Од

$$f_{n+1} - f_n = n(a_{n+1} - a_n) > 0$$

следува дека низата $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ строго монотоно расте, при што $f_0 = -a_0 < 0$. Според тоа, бројот 0 припаѓа точно на еден од интервалите $(f_n, f_{n+1}]$, од што следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Да претпоставиме дека не постои n со саканите својства. Бидејќи $a_1 < a_0 + a_1$, заклучуваме дека $2a_2 < a_0 + a_1 + a_2$ ако и само ако $a_2 < a_0 + a_1$. Сега со индукција по n лесно се докажува дека $a_n < a_0 + a_1$, што е противречност бидејќи дадената низа неограничено расте.

Нека n ги има саканите својства и е најмал таков природен број. Имаме:

$$na_n < a_0 + a_1 + ... + a_n \leq na_{n+1}.$$

Од десното неравенство добиваме

$$a_0 + a_1 + ... + a_n + a_{n+1} \leq (n+1)a_{n+1},$$

што значи дека $n+1$ ги нема саканите својства. Освен тоа,

$$a_0 + a_1 + ... + a_n + a_{n+1} \leq (n+1)a_{n+1} < (n+1)a_{n+2},$$

па затоа

$$a_0 + a_1 + ... + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} < (n+2)a_{n+2},$$

и по индукција следува дека

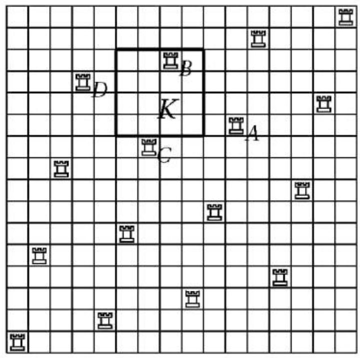
$$a_0 + a_1 + ... + a_m \leq ma_m,$$

за секој $m \geq n+1$, т.е. ниту еден $m \geq n+1$ ги нема саканите својства, со што е докажана единственоста на бројот n.

2. Даден е природен број $n \geq 2$. Разгледуваме шаховска табла $n \times n$ која се состои од n^2 полиња. За распоредот на n топови на таблата ќе велиме дека е *мирољублив* ако во секој ред и во секоја колона се наоѓа тачно едан топ. Определи го најголемиот природен број k таков што за секој мирољублив распоред на n топови постои квадрат $k \times k$ кој не содржи топ ниту на едно од

своите k^2 полиња.

Решение. Прво ќе докажеме дека за $k^2 < n$ таков квадрат секогаш постои. За произволен мирољубив распоред, го разгледуваме полето *A* на првата колона во кое се наоѓа топ, како и *k* последователни редови кои го садржат ова поле. Унијата на овие *k* редови е правоаголник $k \times n$ со точно *k* топови. Од овој правоаголник да го отстраниме полето *A*. Остатокот садржи $k-1$ топови, но од него може да се исечат *k* дисјунктни квадрати $k \times k$, од којих барем еден мора да биде празен.



Сега за $n = k^2$ $(k > 1)$ ќе конструираме мирољубив распоред во кој бараниот квадрат не постои. Со (a,b) да го означиме полето во $(a+1)-$от ред и $(b+1)-$та колона. За секој $0 \le i, j \le k$ ќе ставиме топ во полето $(ik+j, jk+i)$. Бидејќи секој цел број од 0 до $n-1$ може на единствен начин да се запише во облик $ik+j$, овој распоред навистина е мирољубив. Останува да докажеме дека во секој квадрат $k \times k$ се наоѓа барем еден топ. Да го разгледаме квадратот *K* со долно лево поле $(a,b), 0 \le a,b \le k^2-k+1$. Постои поле $A(x,y)$ со $x \ge a$ и $y \ge b$ на кое се наоѓа топ. Разгледуваме такво поле со најмал збир $x+y$. Да претпоставиме дека полето A е надвор од квадратот *K*. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x \ge a+k$. По конструкција, на полињата

$$B(x-k+1, y+k-1), C(x-k, y-1) \text{ и } D(x-2k+1, y+k-2)$$

исто така се наоѓаат топови (ако се на таблата). Од условот за минималност на полето A следува дека $x-2k+1 < a$ и $y-1 < b$, од каде добиваме $x \le a+2k-2$ и $y = b$, но, тогаш квадратот *K* содржи поле *B* на кој има топ.

Конечно, за $n < k^2$, со бришење на првите k^2-n редови и првите k^2-n колони од опишаниот распоред добиваме распоред со најмногу *n* топови таков што ниту еден квадрат $k \times k$ не е празен. Овој распоред по потреба може да се дополни до мирољубливо биективно спарување на празните колони и празните редови. Според тоа, одговорот е најголемиот k за кој $k^2 < n$, т.е. $k = [\sqrt{n-1}]$.

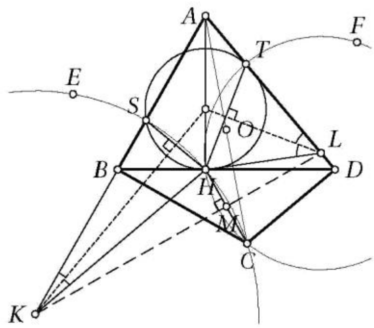
3. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA = 90^\circ$. Точката H е подножје на нормалата повлечена од точката A на правата BD. Точките

S и T припаѓаат соодветно на страните AB и AD и се такви што H е во внатрешноста на триаголникот SCT и важи

$$\measuredangle CHS - \measuredangle CSB = 90^\circ \text{ и } \measuredangle THS - \measuredangle DTC = 90^\circ .$$

Докажи дека правата BD ја допира опишаната кружница на триаголникот TSH.

Решение. *Прв начин.* Нека K е центар на опишаната кружница на триаголникот CHS. Од $\measuredangle KSC = \measuredangle SHC - 90^\circ = \measuredangle BSC$ скедува дека K лежи на правата AB. Аналогно, центарот L на опишаната кружница на триаголникот CHT лежи на правата AD. Точките K и L лежат на симетралата на отсечката CH, како и средината M на отсечката CH.



Опишаната кружница околу $\triangle SHT$ ја допира правата BD ако и само ако симетралите на страните SH и TH се сечат на правата AH. Бидејќи овие две симетрали воедно се и симетрали на $\measuredangle AKH$ и $\measuredangle ALH$, доволно е да се докаже дека $\frac{\overline{KA}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{LA}}{\overline{LH}}$.

Центарот O на опишаната кружница на $\triangle ABD$ е средина на отсечката AC, па затоа $MO \parallel AH$. Значи, MO е симетрала на отсечката BD и $\overline{MB} = \overline{MD}$.

Точките B и M се на кружница над дијаметар KC, па затоа $\overline{KC} = \frac{\overline{MB}}{\sin \measuredangle AKL}$.

Аналогно, $\overline{LC} = \frac{\overline{MD}}{\sin \measuredangle ALK}$. Сега

$$\frac{\overline{KH}}{\overline{LH}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{MB}\sin \measuredangle ALK}{\overline{MD}\sin \measuredangle AKL} = \frac{\sin \measuredangle ALK}{\sin \measuredangle AKL} = \frac{\overline{KA}}{\overline{LA}},$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Ќе ги користиме ознаките како во првиот начин на решавање, како и равенството $\overline{MB} = \overline{MD}$. Нека E и F се симетричните точки на точката H во однос на AB и AD, соодветно. Ако E_1 и F_1 се соодветно средините на отсечките HE и HF, тогаш

$$\overline{CE} = 2\overline{ME_1} = 2\overline{MB} = 2\overline{MD} = 2\overline{MF_1} = \overline{CF} .$$

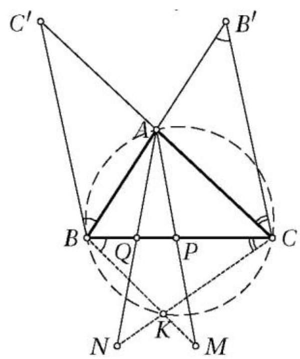
Кружницата EHF има центар во точката A и ја допира BD во точката H, па доволно е да докажеме дека кружниците SHT и EHF се допираат во точката H.

Земаме инверзија со центар H и радиус CE. Точките E и F се пресликуваат во себе, точката H во H', а точките S и T во пресеците S' и T' на симетралите на $\measuredangle ECH'$ и $\measuredangle FCH'$ со отсечките EH' и FH', соодветно. Од

$$\frac{\overline{H'S'}}{\overline{S'E}} = \frac{\overline{H'C}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{H'C}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{H'T'}}{\overline{T'F}}$$

следува дека $S'T' \parallel EF$. Според тоа, кружниците $S'H'T'$ и $EH'F$ се хомотетични со центар H', па затоа се допираат во H', од каде што следува тврдењето на задачата.

4. Точките P и Q на страната BC на остроаголниот триаголник ABC се такви што важи $\measuredangle PAB = \measuredangle BCA$ и $\measuredangle CAQ = \measuredangle ABC$. Точките M и N на правите AP и AQ, соодветно, се такви што точката P е средина на отсечката AM, а точката Q е средина на отсечката AN. Докажи дека правите BM и CN се сечат на опишаната кружница на триаголникот ABC.



Решение. Триаголникот PBA по конструкција е сличен со триаголникот ABC. Во оваа сличност на точката M ѝ соодветствува точката C' симетрична на точката C во однос на A, од каде што следува $\measuredangle MBP = \measuredangle ABC'$. Слично, важи $\measuredangle NCQ = \measuredangle ACB'$, каде B' е симетричната точка на B во однос на A. Ако правите BM и CN се сечат во точката K, тогаш

$$\begin{aligned}180^\circ - \measuredangle BKC &= \measuredangle KBC + \measuredangle KCB = \measuredangle ABC' + \measuredangle ACB' \\ &= \measuredangle AB'C + \measuredangle ACB' = \measuredangle BAC,\end{aligned}$$

што значи дека четириаголникот $BACK$ е тетивен.

5. Кејптаунската банка издава монети со вредност $\frac{1}{n}$ за секој природен број n. Ако имаме конечно многу такви монети (не задолжително со различни вредности) со вкупна вредност не поголема од $99+\frac{1}{2}$, докажи дека можеме да ги поделиме во најмногу 100 групи тако што вкупната вредност на монетите во секоја група не е поголема од 1.

Решение. Ќе докажеме дека, ако вкупната вредност на монетите е $n-\frac{1}{2}$ за некој $n \in \mathbb{N}$, тогаш монетите можеме да ги поделиме во n групи во секоја од кои сумата не е поголема од 1. Монетите со вредност 1 се групи сами за себе, па можеме да сметаме дека такви монети нема. Понатаму, ако имаме $d > 1$ монети со вредност $\frac{1}{k}$, каде $d \mid k$, тогаш можеме да ги замениме со една монета со вредност $\frac{1}{e}$ за $e = \frac{k}{d}$. На овој начин можеме да претпоставиме дека:

(1) монета со вредност $\frac{1}{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ се појавува најмногу $2k-2$ пати, и

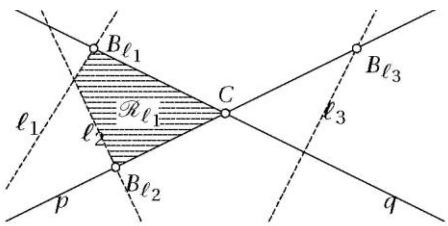
(2) монета со вредност $\frac{1}{2k}$, $k \in \mathbb{N}$ се појавува најмногу еднаш.

За $k=1,...,n$, во $k-$тата група ги ставаме сите монети со вредност $\frac{1}{2k-1}$ и $\frac{1}{2k}$ и вкупната сума во оваа група не е поголема од $\frac{2k-2}{2k-1}+\frac{1}{2k}<1$. Преостанатите монети, кои се со вредности помали од $\frac{1}{2n}$, ќе ги распоредуваме една по една. Да земеме една од овие монети. Барем во една група сумата не е поголема од $\frac{1}{n}(n-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2n}$, па оваа монета ќе ја ставиме во таа група. На овој начин ја завршуваме поделбата.

6. За множеството прави во рамнината ќе велиме дека се во општа положба ако никои две прави не се паралелни и никои три не минуваат низ иста точка. Множеството прави во општа положба ја дели рамнината на области; *ограничени* области во поделбата ги нарекуваме оние кои имаат конечна плоштина. Докажи дека за секој доволно голем n, во секое множество од n прави во општа положба може да се обојат во сино барем $\sqrt{n}$ прави така што ниту една од ограничените области во поделбата нема потполно сина граница.

Решение. Пресечната точка на две сини прави ја нарекуваме *сина*. Да претпоставиме дека сме обоиле k прави и дека веќе ниту една права не може да се обои без да се наруши условот на задачата. Тоа значи дека за секоја необоена права ℓ постои ограничена област $\Re_\ell$ чија единствена необоена страна лежи на ℓ. Нека A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ се три последователни темиња на областа $\Re_\ell$ во насока на движењето на стрелките на часовникот, при што A_ℓ и B_ℓ лежат на правата ℓ. На правата ℓ и доделуваме сина точка C_ℓ. Ќе докажеме дека секоја сина точка е доделена најмногу на две прави. Бидејќи сини точки има $\binom{k}{2}$, а необоени прави $n-k$, ќе следува дека $n-k\le 2\binom{k}{2}=k(k-1)$, т.е. $k^2\ge n$.

Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат три прави ℓ_1,ℓ_2, ℓ_3 на кои им е доделена иста точка $C=C_{\ell_1}=C_{\ell_2}=C_{\ell_3}$. Нека правите p и q се сечат во точката C. Точките $B_{\ell_1}, B_{\ell_2}, B_{\ell_3}$ се различни



и лежат на сини прави p и q, при што на отсечките $CB_{\ell_i}\,(i=1,2,3)$ нема други пресечни точки на дадените прави. Нека B_{ℓ_2} и B_{ℓ_3} лежат на правата p. Четирите последователни страни на областа $\Re_{\ell_1}$ во насока ма движењето на стрелките на часовникот се ℓ_1, p, q и (без ограничување на општоста) ℓ_2, па оваа област има две необоени страни, што е спротивно на претпоставката.