XXXIX РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VII одделение

1. По намалувањето на цената за 30%, за износ од 1918 денари може да се купи 1 kg чоколадни бонбони повеќе отколку што можело да се купи за износ од 2700 денари пред намалувањето. Колкава е цената на чоколадните бонбони пред намалувањето?

Решение. Нека пред намалувањето на цената 1 kg чоколадни бонбони чинеле x денари. Тогаш, за 2700 ден. може да се купат $\frac{2700}{x}$ kg бонбони. По намалувањето на цената 1 kg чоколадни бонбони вреди 70% од првобитната цена, т.е. $0,7x$ kg, па за 1918 денари може да се купи $\frac{1918}{0,7x}$ kg бонбони. Притоа, $\frac{1918}{0,7x}-\frac{2700}{x}=1$, т.е. $1918-1890=0,7x$, односно $x=40kg$. Според тоа, пред намалувањето, цената на 1 kg бонбони била 40 денари, односно за 2700 денари може да купи 67,5 кг бонбони.

2. Таткото им поделил на своите деца определена сума пари по следниов редослед. На најстариот син му дал 1000 денари и $\frac{1}{8}$ од остатокот од парите, на второто дете му дал 2000 денари и $\frac{1}{8}$ од новиот остаток, на третото дете му дал 3000 денари и $\frac{1}{8}$ од новиот остаток, и така натаму се до последното дете. При тоа целата сума пари е поделена и секое дете добило еднаков дел. По колку пари им поделил на секое од децата и колку деца имал?

Решение. Нека x е сумата пари кои таткото им ги поделил на своите деца.

Првото дете добило $1000+\frac{1}{8}(x-1000)$ односно $\frac{1}{8}x+875$.

Второто дете добило $2000+\frac{1}{8}(x-\frac{1}{8}x-875-2000)$ односно $\frac{7}{64}x+\frac{13125}{8}$.

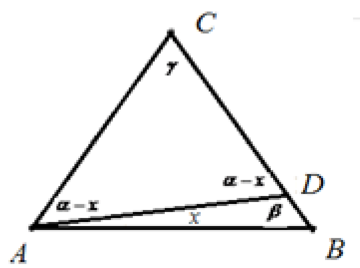
Бидејќи двете деца добиле исто пари важи

$$\frac{1}{8}x+875=\frac{7}{64}x+\frac{13125}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{64}x=\frac{6125}{8} \Leftrightarrow x=49000.$$

Притоа првото дете добило $\frac{1}{8}\cdot 49000+875=7000$, од каде следува дека вкупно биле 7 деца.

3. Во триаголникот ABC $(\overline{BC} > \overline{AC})$ аглите $\alpha = \measuredangle BAC$ и $\beta = \measuredangle ABC$ се разликуваат за $30°$. Ако е избрана точката D на страната BC, таква што $\overline{AC} = \overline{CD}$, пресметај го $\measuredangle DAB$.

Решение. Нека $\measuredangle DAB = x$. Триаголникот ACD е рамнокрак и притоа важи $\measuredangle DAC = \measuredangle ADC = \alpha - x$.



Тогаш од триаголникот ACD имаме:

$$\alpha - x + \alpha - x + \gamma = 2\alpha - 2x + 180° - \alpha - \beta$$
$$= 180°$$

односно $\alpha - \beta = 2x$, од каде јасно е дека $x = 15°$.

4. Производот на два трицифрени броеви е повеќецифрен број кој е запишан само со помош на цифрата 3. Кои се тие трицифрени броеви?

Решение. Производот на два трицифрени броеви е поголем или еднаков од $100 \cdot 100 = 10000$, а помал од $1000 \cdot 1000 = 1000000$, па очигледно е дека производот е или петцифрен или шестцифрен број. Ако производот е петцифрен број тогаш

$$33333 = 3 \cdot 11111 = 3 \cdot 41 \cdot 271 = 123 \cdot 271.$$

Ако производот е шестцифрен број тогаш

$$333333 = 3 \cdot 111111 = 3 \cdot 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 777 \cdot 429.$$

Па, паровите трицифрени броеви се 123 и 271, 777 и 429.

5. Броевите $1, 2, 3, \ldots, 999, 1000$ се напишани еден по друг по овој редослед на една кружница. Го прецртуваме бројот 1, а потоа секој 15-ти број $(1, 16, 31, \ldots)$. Кога ќе направиме едно кружење пак ги сметаме повторно и прецртаните броеви. Колку броеви ќе останат непрецртани?

Решение. При првото кружење ги прецртуваме броевите $1, 16, 31, \ldots, 991$, (сите броеви од облик $15k+1$), во второто кружење ги прецртуваме броевите $6, 21, 36, \ldots, 996$, (сите броеви од облик $15k+6$), во третото кружење броевите $11, 26, 41, \ldots, 986, 1$ (броевите од облик $15k+11$), каде $k = 0, 1, ..., 66$. После третото кружење ќе бидат прецртувани само броевите што веќе се прецртани. Па, броевите кои се прецртани од 1 до 1000 се сите кои при делење со 5 даваат остаток 1, односно се од облик

$5m+1,\ m\in\mathbb{N}_0$. Такви броеви има 200, па непрецртани ќе останат $1000-200=800$ броеви.

VIII одделение – деветтолетка

1. Одреди ги сите двоцифрени броеви со следното својство: тој број и бројот напишан со исти цифри, но во обратен редослед да бидат прости.

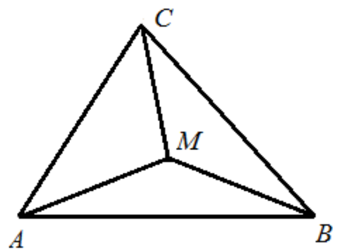
Решение. За да бидат броевите $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ прости, треба цифрите a и b да се непарни и различни од 5. Во спротивно еден од нив ќе биде број делив со 2 или со 5. Значи, $a,b\in\{1,3,7,9\}$. Со проверка се добива дека $91=7\cdot13$ па единствени такви броеви се $\{11,13,17,31,37,71,73\}$.

2. Нека x,y,z се агли на даден триаголник (во степени). Докажи дека ако $\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}$ се рационални броеви, тогаш x,y,z се исто така рационални броеви.

Решение. Забележуваме дека важи $\frac{180}{x}=\frac{x+y+z}{x}=1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}$. Бидејќи $\frac{x}{y}$ е рационален број тогаш и бројот $\frac{y}{x}=\frac{1}{\frac{x}{y}}$ е рационален број. Според тоа добиваме дека $\frac{180}{x}$ е рационален број бидејќи е збир од три рационални броеви. Оттука x е рационален број. На ист начин се докажува дека и y и z се рационални броеви.

3. Во триаголникот ABC аголот во темето A е 70°, а аголот во темето B е 50°. Во внатрешноста на триаголникот ABC е избрана точка M така што $\measuredangle MAC=40^\circ$ и $\measuredangle MCA=40^\circ$. Определи ги аглите $\measuredangle AMB$ и $\measuredangle BMC$.

Решение. Триаголникот AMC е рамнокрак со краци $\overline{AM}=\overline{CM}$. Од условот добиваме дека $\measuredangle AMC=100^\circ$. Од тоа што $\overline{AM}=\overline{CM}$, $\measuredangle AMC=100^\circ$ и $\measuredangle ABC=50^\circ$ добиваме дека M е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Од $\measuredangle BAC=70^\circ$, имаме $\measuredangle BMC=140^\circ$.



Конечно, $\measuredangle ACB = 60^\circ$, па затоа $\measuredangle AMB = 120^\circ$.

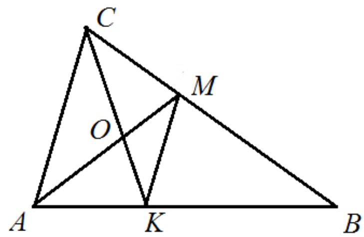
4. Докажи дека $32^{24} > 13^{32}$.

Решение. Нека $a = 32^{24}, b = 13^{32}$. Бидејќи $a = 32^{24} = \underbrace{32^3 \cdot 32^3 \cdots 32^3}_{8-\text{пати}}$ и $b = 13^{32} = \underbrace{13^4 \cdot 13^4 \cdot\cdot 13^4}_{8-\text{пати}}$, доволно е да докажеме дека $32^3 > 13^4$. Конечно со непосредна проверка добиваме $32^3 = 32768 > 28561 = 13^4$.

5. На страните AB и BC на триаголникот ABC се избрани точки K и M соодветно, такашто $KM \parallel AC$. Отсечките AM и KC се сечат во точка О. Познато е дека $\overline{AK} = \overline{AO}$ и $\overline{KM} = \overline{MC}$. Докажи дека $\overline{AM} = \overline{KB}$.

Решение. Имаме $\measuredangle COM = \measuredangle AOK = \measuredangle AKO$, $\measuredangle KCM = \measuredangle CKM = \measuredangle ACK$ и затоа

$$\begin{aligned}\measuredangle AMC &= 180^o - \measuredangle COM - \measuredangle KCM \\ &= 180^o - \measuredangle AKC - \measuredangle ACK \\ &= \measuredangle KAC = \measuredangle BKM.\end{aligned}$$

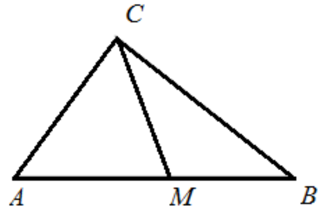


Но, $\measuredangle BMK = \measuredangle BCA$ и $\overline{KM} = \overline{MC}$, па затоа триаголниците AMC и BKM се складни (АСА). Конечно, добиваме дека $\overline{AM} = \overline{KB}$.

VIII одделение – осмолетка

1. Во правоаголниот триаголник ABC, тежишната линија спуштена од правиот агол кон хипотенузата има должина 1. Ако се знае дека едниот од аглите што го зафаќа оваа тежишна линија со хипотенузата е 60°, определи го периметарот и плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Нека M е средината на хипотенузата AB. Тогаш $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = 1$ и $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = 2$. Нека $\angle AMC = 60^\circ$. Тогаш триаголникот ΔAMC е рамностран, па добиваме $\overline{AC} = 1$. Од Питагоро-



вата теорема за ABC имаме $\overline{BC}=\sqrt{3}$. Значи, периметарот на ABC е $L=3+\sqrt{3}$, а плоштината е $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Докажи дека производот

$$(3a-9b+c+5)\cdot(2a+3b-7c+1)\cdot(a+6b+4c-2)$$

е парен број, за сите вредности на целите броеви a,b,c !

Решение. Збирот

$$(3a-9b+c+5)+(2a+3b-7c+1)+(a+6b+4c-2)=6a-2c+4$$

е парен број. Тоа значи дека или секој од собироците е парен или еден собирок е парен број, а останатите два се непарни броеви. Во секој случај бараниот производ е парен број.

3. Збирот на цифрите на бројот 9^{2014} е a. Збирот на цифрите на a е b, а збирот на цифрите на b е c. Одреди го бројот c.

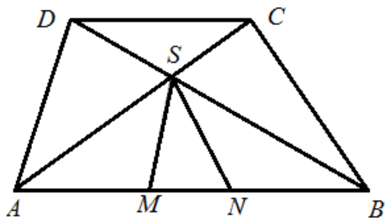
Решение. Од $9\,|\,9^{2014}$ следува дека $9\,|\,a$. Од $9^{2014}<10^{2014}$ следува $a<2015\cdot 9=18135$. Од $9\,|\,a$ и $a<18135$ следува $9\,|\,b$ и $b<5\cdot 9=45$. Од $9\,|\,b$ и $b<45$ следува $9\,|\,c$ и $c<2\cdot 9=18$. Конечно, $c=9$.

4. Земаме произволни 51 број од множеството $\{1,2,3,...,100\}$. Докажи дека меѓу овие 51 броеви секогаш мора да постојат барем два такви што едниот од нив се дели со другиот.

Решение. Во множеството од првите 100 природни броеви има точно 50 непарни броеви. Секој број од множеството $A=\{1,2,3,...,100\}$ може да се запише на единствен начин во облик $2^m q$, каде m е ненегативен цел број, а q е непарен број. Сите броеви од A ги делиме според q во 50 класи. Да забележиме дека со оваа поделба секој број припаѓа во единствена класа. Сега за земените 51 броја според принципот на Дирихле барем два од нив мора да припаѓаат на иста класа. Ова се всушност бараните броеви.

5. Во трапезот $ABCD$ двата агли при основата AB се остри. Низ пресекот на дијагоналите на $ABCD$ повлечени се две прави паралелни со краците AD и BC кои ја сечат основата AB во точки M и N соодветно. Докажи дека $\overline{AM}=\overline{BN}$.

Решение. Нека пресекот на дијагоналите на трапезот $ABCD$ е S. Бидејќи $\measuredangle BAS=\measuredangle DCS$ и $\measuredangle ABS=\measuredangle CDS$ (AB и CD се паралелни) добиваме $\triangle ABS\sim\triangle CDS$, па затоа $\frac{\overline{AS}}{\overline{CS}}=\frac{\overline{BS}}{\overline{DS}}$. Нека $a=\overline{AM}$, $b=\overline{MN}$ и $c=\overline{BN}$.



Бидејќи BC и SN се паралелни, имаме $\frac{\overline{AS}}{\overline{CS}}=\frac{a+b}{c}$. Бидејќи AD и SM се паралелни, добиваме $\frac{\overline{BS}}{\overline{DS}}=\frac{b+c}{a}$. Според тоа, $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}$, од што следува дека $a^2+ab-bc-c^2=0$, односно $(a-c)(a+c)+b(a-c)=0$, т.е. добиваме $(a-c)(a+b+c)=0$. Но, $a+b+c\neq 0$, па од последното равенство следува $a=c$.