

Šefket Arslanagić, Bosna i Hercegovina
 Alija Muminagić, Danska

НЕСБИТОВО НЕРАВЕНСТВО И ЕДНО НЕГОВО ПОДОБРУВАЊЕ

Во 1903. А. М. Несбит го докажал следново неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \quad a, b, c > 0, \quad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. Во литературата се среќаваат повеќе докази на ова неравенство, кои се засноваат на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина, неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц итн. Во оваа статија ќе дадеме неколку докази на неравенството (1), при што ќе ги користиме неравенствата на Чебишев и Јенсен, неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и фактот дека даденото неравенство е хомогено.

Доказ 1. Неравенството (1) е хомогено, па затоа можеме да земеме дека $a+b+c=1$, каде $0 < a, b, c < 1$. Според тоа, треба да го докажеме неравенството

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{3}{2},$$

каде $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$. Но, ако $x \in (0,1)$, тогаш

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} > 0,$$

што значи дека функцијата f е конвексна на интервалот $(0,1)$. Сега, од неравенството на Јенсен следува дека

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

т.е.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{3}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ♦

Доказ 2. Неравенството (1) е хомогено, па затоа можеме да земеме дека $a+b+c=1$, каде $0 < a, b, c < 1$. Според тоа, треба да го докажеме неравенството

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{3}{2},$$

каде $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$. Понатаму,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4},$$

па затоа равенката на тангентата на кривата $y = f(x)$ во точката $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ е

$$y - \frac{1}{2} = \frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right), \quad \text{т.е.} \quad y = \frac{9}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Имаме,

$$f(x) - \frac{9x-1}{4} = \frac{x}{1-x} - \frac{9x-1}{4} = \frac{(3x-1)^2}{4(1-x)} \geq 0, \quad (2)$$

за секој $x \in (0,1)$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x = \frac{1}{3}$.

Конечно, од неравенството (2) следува дека за секои

$$a, b, c \in (0,1), \quad a+b+c=1$$

важи

$$f(a) - \frac{9a-1}{4} + f(b) - \frac{9b-1}{4} + f(c) - \frac{9c-1}{4} \geq 0,$$

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{9(a+b+c)-3}{4} = \frac{3}{2},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ♦

Коментар 1. Неравенството (2) следува и од фактот дека функцијата $f(x) = \frac{x}{1-x}$ е конвексна на интервалот $(0,1)$, што значи дека графикот на функцијата f на интервалот $(0,1)$ се наоѓа над нејзината тангента во точката $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Доказ 3. За секои $x, y, z > 0$ важи

$$\left(\frac{x}{y+z} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x-y-z)^2}{[2(y+z)]^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(2x-y-z)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + 2yz \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + 4xy + 4yz - 8xy - 8xz + y^2 + 2yz + z^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4x(x+y+z) - 8x(y+z) + (y+z)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4x(x+y+z) - (y+z)(8x-y-z) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{4x(x+y+z) - (y+z)(8x-y-z)}{4(y+z)(x+y+z)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{y+z} \geq \frac{8x-y-z}{4(x+y+z)}. \quad (3)$$

Конечно, од неравенството (3) следува дека за секои $a, b, c > 0$ се точни неравенствата:

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{8a-b-c}{4(a+b+c)}, \frac{b}{c+a} \geq \frac{8b-a-c}{4(a+b+c)}, \frac{c}{a+b} \geq \frac{8c-a-b}{4(a+b+c)}$$

и ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{8a-b-c}{4(a+b+c)} + \frac{8b-a-c}{4(a+b+c)} + \frac{8c-a-b}{4(a+b+c)} = \frac{6(a+b+c)}{4(a+b+c)} = \frac{3}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2},$$

т.е. ако и само ако $a = b = c$. ♦

Доказ 4. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина применето на позитивните реални броеви $a^{\frac{3}{2}}, b^{\frac{3}{2}}, b^{\frac{3}{2}}$ и $a^{\frac{3}{2}}, c^{\frac{3}{2}}, c^{\frac{3}{2}}$ следуваат неравенствата

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{3} \geq \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} b \text{ и}$$

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}}{3} \geq \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{3}{2}} c^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} c,$$

т.е. неравенствата

$$a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} \geq 3a^{\frac{1}{2}} b \text{ и } a^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} \geq 3a^{\frac{1}{2}} c.$$

Последните две неравенства ги собираме и последователно добиваме

$$2(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}) \geq 3a^{\frac{1}{2}}(b+c),$$

$$2a(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}) \geq 3a^{\frac{3}{2}}(b+c),$$

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{3a^{\frac{3}{2}}}{2(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}})}.$$

На потполно аналоген начин ги добиваме неравенствата

$$\frac{b}{a+c} \geq \frac{3b^{\frac{3}{2}}}{2(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}})} \text{ и } \frac{c}{b+a} \geq \frac{3c^{\frac{3}{2}}}{2(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}})}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}})}{2(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}})} = \frac{3}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a^{\frac{3}{2}} = b^{\frac{3}{2}} = c^{\frac{3}{2}}$, т.е. ако и само ако $a = b = c$. ♦

Доказ 5. Ги воведуваме ознаките

$$x = b+c, \quad y = c+a, \quad z = a+b$$

и добиваме

$$y+z-x=2a, \quad x+z-y=2b, \quad x+y-z=2c.$$

Понатаму, при воведените ознаки, ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right) - \frac{3}{2} \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{y}{x} \frac{z}{x} \frac{x}{y} \frac{z}{y} \frac{x}{z} \frac{y}{z}} - \frac{3}{2} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{x} = \frac{x}{y} = \frac{z}{y} = \frac{x}{z} = \frac{y}{z},$$

што значи ако и само ако $x = y = z$, односно ако и само ако $a = b = c$. ♦

Доказ 6. Ги воведуваме ознаките

$$x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}.$$

Да ја разгледаме функцијата

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t \in (0, +\infty).$$

Имаме, $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$ и $f''(t) = \frac{-2}{(1+t)^3} < 0$, за секој $t \in (0, +\infty)$, што значи

дека оваа функција монотонно расте и е конкавна на интервалот $(0, +\infty)$.

Сега, од неравенството на Јенсен за конкавни функции следува

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} \right) = \frac{1}{3} (f(x) + f(y) + f(z)) \leq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right),$$

и како функцијата f е монотонно растечка на интервалот $(0, +\infty)$ од

последното неравенство добиваме $\frac{1}{2} \leq \frac{x+y+z}{3}$, односно

$$\frac{3}{2} \leq x + y + z = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z$, односно ако и само ако $a = b = c$. ♦

Доказ 7. Ги воведуваме ознаките

$$x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b} \text{ и } T = \frac{x+y+z}{3},$$

што значи дека доволно е да докажеме дека $T \geq \frac{1}{2}$.

Прво да забележиме дека очигледното неравенство

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$$

последователно е еквивалентно со неравенствата

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,$$

$$\frac{1}{3} (x+y+z)^2 \geq xy + yz + zx,$$

т.е. со неравенството

$$xy + yz + zx \leq 3T^2, \tag{4}$$

а од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека

$$xyz \leq T^3. \quad (5)$$

Понатаму, при воведените ознаки имаме

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} = 1$$

од што следува дека

$$1 = 2xyz + xy + yz + zx$$

и ако ги искористиме неравенствата (4) и (5) последователно добиваме

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2T^3 + 3T^2, \\ 2T^3 + 3T^2 - 1 &\geq 0, \\ (2T - 1)(T + 1)^2 &\geq 0, \\ 2T - 1 &\geq 0, \\ T &\geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. Јасно знак за равенство важи ако и само ако во неравенствата (4) и (5) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $x = y = z$, односно ако и само ако $a = b = c$. ♦

Доказ 8. Со L да ја означиме левата страна на неравенството (1). Даденото неравенство е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \geq b \geq c > 0$, од каде што следува дека $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b} > 0$. Сега од неравенството на Чебишев добиваме

$$\begin{aligned} L &\geq \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b}\right) = \frac{1}{3}(3+L), \end{aligned}$$

па затоа $\frac{2}{3}L \geq 1$, односно $L \geq \frac{3}{2}$. Знак за равенство важи ако и само $a = b = c$.

Зошто? ♦

Доказ 9. Неравенството е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \geq b \geq c > 0$. Ги воведуваме ознаките $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ и добиваме $x \geq y \geq 1$. Според тоа, неравенството (1) е еквивалентно на неравенството

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1} + \frac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}} \geq \frac{3}{2}, \quad (6)$$

односно на неравенството

$$\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{x+y}. \quad (7)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{x+1} \geq 2,$$

односно

$$\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq 2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}. \quad (8)$$

Ќе го докажеме неравенството

$$2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{x+y}. \quad (9)$$

Неравенството (9) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{y+1} \geq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+y},$$

$$\frac{y-1}{2(y+1)} \geq \frac{y-1}{(x+1)(x+y)}.$$

Но, $x+1 \geq y+1 > 0$, $y-1 \geq 0$ и $x+y \geq 2$, па затоа последното неравенство е точно, што значи дека е точно и неравенството (9). Конечно, од неравенствата (8) и (9) следува неравенството (7), кое е еквивалентно со неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = 1$, т.е. ако и само ако $a = b = c$. ♦

Доказ 10. Имаме

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} &= \frac{ac+a^2+b^2+bc}{(b+c)(c+a)} + \frac{2c-3a-3b}{a+b} = \frac{2(a+b)(ac+a^2+b^2+bc)+(2c-3a-3b)(ab+bc+ca+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{2(a^3+b^3+c^3)-a^2c-ab^2-a^2b-b^2c-ac^2-bc^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2(a^3+b^3+c^3)-a^2c-ab^2-a^2b-b^2c-ac^2-bc^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{(a^3+b^3-ab^2-a^2b)+(a^3+c^3-ac^2-a^2c)+(b^3+c^3-cb^2-c^2b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{(a-b)(a^2-b^2)+(a-c)(a^2-c^2)+(b-c)(b^2-c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0, \end{aligned}$$

при што последното неравенство е точно бидејќи

$$(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c) \geq 0 \text{ и } (a+b)(b+c)(c+a) > 0.$$

Конечно, од $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} \geq 0$ следува неравенството (1). ♦

На крајот од оваа статија ќе дадеме едно подобрување на неравенството (1), т.е. ќе докажеме дека е точно неравенството

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 3 - \frac{9}{2}(ab+bc+ca). \quad (10)$$

Доказ. Неравенството (1) е хомогено, па затоа можеме да претпоставиме дека $a+b+c=1$. Понатаму, според доказ 7 имаме $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, па затоа $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$. Сега ќе преминеме на доказот на неравенството (10). Неравенството (10) е еквивалентно со неравенството

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{9a(b+c)}{4}\right) + \left(\frac{b}{c+a} + \frac{9b(c+a)}{4}\right) + \left(\frac{c}{a+b} + \frac{9c(a+b)}{4}\right) \geq 3. \quad (11)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{9a(b+c)}{4}\right) + \left(\frac{b}{c+a} + \frac{9b(c+a)}{4}\right) + \left(\frac{c}{a+b} + \frac{9c(a+b)}{4}\right) &\geq 2\sqrt{\frac{9a^2(b+c)}{4(b+c)}} + 2\sqrt{\frac{9b^2(c+a)}{4(c+a)}} + 2\sqrt{\frac{9c^2(a+b)}{4(a+b)}} \\ &= 2\frac{3a}{2} + 2\frac{3b}{2} + 2\frac{3c}{2} = 3(a+b+c) = 3, \end{aligned}$$

што значи дека е точно неравенството (11), односно точно е неравенството (10). Неравенството (10) е подобрување на неравенството (1) бидејќи од неравенството $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$ следува $-\frac{9}{2}(ab+bc+ca) \geq -\frac{3}{2}$, односно $3 - \frac{9}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{3}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Arslanagić, Š.:** *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
2. **Arslanagić, Š.:** *Matematička čitanka*, Grafičar promet doo, Sarajevo, 2008
3. **Carstensen, J., Muminagić, A.:** *Dobro poznati zadaci sa manje poznatim rješenjima*, Osječki matematički list, Vol. 6 (2006), Osijek, 2006
4. **Nesbitt, A. M.:** *Problem 15114*, Educational Times, 3 (1903), 37-38

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ