Одређивање екстремних вредности неких функција помоћу неједнакости између аритметичке и геометријске средине

др Шефкет Арсланагић, Сарајево, БиХ

Проблем елементарног одређивања екстремних вредности функција у математици, поред посебне интересантности, често има и извесних предности над познатим методама помоћу диференцијалног рачуна. Дакле, познавање елементарних метода омогућује да се велики број проблема са екстремним вриједностима функција може успешно решити. Овде ћемо користити познату неједнакост између аритметичке и геометријске средине која гласи:

$$(1) \qquad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \quad (a_i > 0,\ i = \overline{1, n}).$$

Једнакост важи у случају када је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Помоћу (1) ћемо показати како се релативно лако одређују екстремне вредности неких, на први поглед сложених функција. Иначе, о овој значајној теми је под насловом „Проблем максимума и минимума у елементарној математици" аутор писао у [3], стр. 275–313. Ево тих примера.

Пример 1. Наћи максималну могућу вредност функције $y = x(1 - x^3)$, где је $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Решење. Имамо да је $y^3 = x^3(1 - x^3)^3$, односно

$$3y^3 = 3x^3(1 - x^3)(1 - x^3)(1 - x^3),$$

а одавде, користећи (1) за $n = 4$,

$$3y^3 = 3x^3(1 - x^3)(1 - x^3)(1 - x^3) \leqslant \left(\frac{3x^3 + 1 - x^3 + 1 - x^3 + 1 - x^3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

Сада добијамо да је $y^3 \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4$, тј. $y \leqslant \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ или $y \leqslant \frac{3}{16}\sqrt[3]{16}$, при чему важи једнакост ако је $3x^3 = 1 - x^3$, односно $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \in [0, 1]$. Дакле, максимална вредност функције износи $y_{\max} = \frac{3}{16}\sqrt[3]{16}$ за $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Пример 2. Наћи најмању вредност функције $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{1 + x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1 - x}}$ у области $x \in [0, 1]$, где $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Решење. Користећи (1), за $n = 2$ добијамо

$$f(x) = (1 + x)^{-\frac{1}{n}} + (1 - x)^{-\frac{1}{n}} \geqslant 2\sqrt{(1 + x)^{-\frac{1}{n}} \cdot (1 - x)^{-\frac{1}{n}}} = \frac{2}{\sqrt[2n]{1 - x^2}} \geqslant 2,$$

где је $1 - x^2 \leqslant 1, x \in [0, 1)$.

Како је $f(0)=2$, следи да најмања вредност функције $f(x)$ износи 2.

Пример 3. Доказати да највећа вредност функције $f(t)=\cos^3 t\sin t, t\in\mathbb{R}$, износи $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$.

Решење. Сада за $n=4$ из (1) добијамо

$$\cos^6 t\sin^2 t = 27\cdot\frac{\cos^2 t}{3}\cdot\frac{\cos^2 t}{3}\cdot\frac{\cos^2 t}{3}\cdot(1-\cos^2 t)$$
$$\leqslant 27\left(\frac{\frac{\cos^2 t}{3}+\frac{\cos^2 t}{3}+\frac{\cos^2 t}{3}+1-\cos^2 t}{4}\right)^4=\frac{27}{4^4},$$

а одавде

$$\left|\cos^3 t\sin t\right|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{16},$$

одакле следи

$$f(t)=\cos^3 t\sin t\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{16},\ \text{тј.}\ f_{\min}(t)=\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

за $t=\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, јер $1-\cos^2 t=\dfrac{1}{3}\cos^2 t\Rightarrow\cos^2 t=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\cos t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin t=\pm\dfrac{1}{2}$.

Пример 4. Наћи најмању вредност функције $f(x)=ax^m+\dfrac{b}{x^n}$, где $x\in(0,+\infty)$, $a,b>0$ и $m,n\in\mathbb{N}$.

Решење. Напишимо дату функцију $f(x)$ у облику

$$f(x)=(m+n)\frac{1}{m+n}\left(n\cdot\frac{ax^m}{n}+m\cdot\frac{b}{mx^n}\right).$$

Сада из (1) за $n=2$ добијамо

$$f(x)\geqslant(m+n)\sqrt[m+n]{\left(\frac{ax^m}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{b}{mx^n}\right)^m}=(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^nb^m}{n^nm^m}},$$

где важи једнакост ако је

$$\frac{ax^m}{n}=\frac{b}{mx^n}\Rightarrow x=\sqrt[m+n]{\frac{bn}{am}}.$$

Дакле, имамо

$$\min_{x\in(0,+\infty)}f(x)=f(x_0)=(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^nb^m}{n^nm^m}},$$

где је $x_0 = \sqrt[m+n]{\dfrac{bn}{am}}$.

Пример 5. У области $[a,b]$, $0 < a < b$, наћи такву тачку x_0 у којој функција $f(x) = (x-a)^2(b^2-x^2)$ постиже највећу вредност у тој области.

Решење. Дату функцију напишимо у облику

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)\alpha(b-x)\beta(b+x)}{\alpha\beta},$$

при чему је $\alpha, \beta > 0$. Користећи неједнакост (1) за $n = 4$ добијамо

$$\begin{aligned} 4\sqrt[4]{(x-a)(x-b)\alpha(b-x)\beta(b+x)} &\leqslant (x-a)+(x-b)+\alpha(b-x)+\beta(b+x) \\ &= (2-\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)b-2a. \end{aligned}$$

Десна страна горње неједнакости не зависи од x ако је $\alpha - \beta = 2$, а знак једнакости важи ако је $x - a = \alpha(b-x) = \beta(b+x)$. Одавде добијамо да је:

$$\alpha = \frac{x-a}{b-x}, \quad \beta = \frac{x-a}{b+x},$$

те због $\alpha - \beta = 2$:

$$\frac{x-a}{b-x} - \frac{x-a}{b+x} = 2 \Rightarrow 2x^2 - ax - b^2 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{a+\sqrt{a^2+8b^2}}{4} \quad (x > 0).$$

Није тешко показати да $x_0 \in [a,b]$, тј.

$$a \leqslant \frac{a+\sqrt{a^2+8b^2}}{4} \leqslant b.$$

Дакле, следи да функција $f(x)$ постиже највећу вредност у тачки x_0 области $[a,b]$.

Пример 6. Одредити највећу и најмању вредност функције $y = \dfrac{x}{ax^2+b}$, где су $a, b > 0$.

Решење. Приметимо да:

$$x < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \quad x > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \quad x = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Одавде следи да функција $f(x)$ постиже своју највећу вредност (максимум) у интервалу $(0, +\infty)$, а најмању вредност у интервалу $(-\infty, 0)$. Из (1) за $n = 2$ имамо

$$\frac{ax^2+b}{2} \geqslant \sqrt{abx^2} = |x|\sqrt{ab},$$

при чему важи једнакост ако је $ax^2 = b$.

Из горње неједнакости за $x > 0$ следи

$$\frac{x}{ax^2+1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{ab}}.$$

Сада одавде добијамо да је највећа вредност функције $f(x)$ једнака $\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$ ако је $ax^2 = b$, тј. $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Како је дата функција непарна, тј. важи $f(-x) = -f(x)$, то функција постиже најмању вредност $-\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$ за $x = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Пример 7. Наћи највећу вредност функција:

(а) $y = \dfrac{5\sqrt{x^2+6x+8}+12}{x+3}$;

(б) $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2(x^2+3)}}{3x^2+4}$.

Решење. (а) Из (1) за $n = 2$, ако је $x \geqslant -2$, имамо

$$\begin{aligned} y &= \frac{5\sqrt{x^2+6x+8}+12}{x+3} = \frac{\sqrt{(25x+50)(x+4)}+12}{x+3} \\ &\leqslant \left(\frac{25x+50+x+4}{2}+12\right)\frac{1}{x+3} \\ &= \frac{13x+39}{x+3} = \frac{13(x+3)}{x+3} = 13. \end{aligned}$$

Значи $y_{\max} = 13$ ако је $25x+50 = x+4$, тј. када је $x = -\dfrac{23}{12}(> -2)$, јер ако је $x \leqslant -4$, тада је $y < 0$.

(б) Сада из (1) за $n = 3$ имамо

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt[3]{(x^2+1)\,(x^2+1)\left(\frac{2}{5}x^2+\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{5}{2}}}{3x^2+4} \\ &\leqslant \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\cdot\frac{x^2+1+x^2+1+\frac{2}{5}x^2+\frac{6}{5}}{3\,(3x^2+4)} \\ &= \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\cdot\frac{12x^2+16}{15(3x^2+4)} = \frac{4}{15}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Примећујемо да је $y = \dfrac{4}{15}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$ ако је $x^2+1 = \dfrac{2}{5}x^2+\dfrac{6}{5}$, тј. када је $x^2 = \dfrac{1}{3}$, односно $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Дакле, највећа вредност ове функције износи $\dfrac{4}{15}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$ ако је $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (јер је ова функција парна).

Пример 8. Наћи највећу вредност производа $P = xyz$ ако важи једнакост $2x+y\sqrt{3}+\pi z = 1$, где су $x, y, z > 0$.

Решење. Представићемо производ P у облику:

$$P = xyz = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\right) \cdot (2x) \cdot (y\sqrt{3}) \cdot (\pi z).$$

Сада из (1) за $n = 3$ добијамо

$$\begin{aligned} P = xyz &= (2x) \cdot (y\sqrt{3}) \cdot (\pi z) \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \\ &\leqslant \left(\frac{2x + y\sqrt{3} + \pi z}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} = \frac{1}{54\pi\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{162\pi}. \end{aligned}$$

Једнакост важи ако је $2x = y\sqrt{3} = \pi z$, што уз дати услов $2x + y\sqrt{3} + \pi z = 1$ даје $x = \dfrac{1}{6}, y = \dfrac{\sqrt{3}}{9}, z = \dfrac{1}{3\pi}$. Дакле, $P_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{162\pi}$ за $x = \dfrac{1}{6}, y = \dfrac{\sqrt{3}}{9}, z = \dfrac{1}{3\pi}$.

Ево једног примера из стереометрије.

Пример 9. Нека је сума дужина свих шест ивица тростране пирамиде $PABC$ (тачка P је њен врх) једнака S, а $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = 90°$. Нађи такву пирамиду која има највећу запремину.

Решење. Нека је $PA = x, PB = y$ и $PC = z$, где је $PA \perp PB, PB \perp PC, PC \perp PA$.

У овом случају имамо да је

$$S = x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2},$$

те

$$V = V_{PABC} = \frac{1}{6}xyz.$$

Одавде користећи (1) за $n = 2$ добијамо

$$S \geqslant x + y + z + \sqrt{2}(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}),$$

а сада користећи (1) за $n = 3$

$$S \geqslant 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx}},$$

тј.

$$S \geqslant 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt{2}\sqrt[3]{xyz} = 3(1 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{xyz},$$

одакле следи $\sqrt[3]{xyz} \leqslant \dfrac{S}{3(1 + \sqrt{2})}$, тј.

$$xyz \leqslant \left(\frac{S}{3(1 + \sqrt{2})}\right)^3.$$

Сада добијамо да је $V \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{S}{3(1+\sqrt{2})}\right)^3$, тј. највећа вредност запремине је

$$V = \frac{1}{6}\left(\frac{S}{3(1+\sqrt{2})}\right)^3,$$

ако је $x = y = z = \frac{S}{3(1+\sqrt{2})}$.

Пример 10. (ИМО 1984) Доказати да важе неједнакости

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27},$$

где су x, y, z ненегативни реални бројеви за које важи једнакост $x + y + z = 1$.

Решење. Овај задатак у вези неједнакости можемо формулисати и овако: *Нека је дата функција $f(x,y,z) = xy + yz + zx - 2xyz$, где су $x, y, z \geqslant 0$ и важи $x + y + z = 1$. Доказати да је $f_{\max} = \frac{7}{27}$, а $f_{\min} = 0$.*

Пошто је дата неједнакост симетрична, то можемо не умањујући општост претпоставити да је $x \leqslant y \leqslant z$. Зато је $x \leqslant \frac{1}{3}$ (због $x + y + z = 1$). Како је сада из датог услова $y + z = 1 - x$, то имамо

$$xy + yz + zx - 2xyz = x(1-x) + yz(1-2x) \geqslant 0.$$

Овим је лева страна неједнакости доказана.

Користећи (1) за $n = 2$ имамо:

$$yz \leqslant \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2.$$

Докажемо ли сада да важи неједнакост

$$x(1-x) + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 (1-2x) \leqslant \frac{7}{27}, \quad x \in \left[0, \frac{1}{3}\right],$$

тада смо доказали и десну страну дате неједнакости.

Ако упростимо горњу неједнакост, добијамо

$$\begin{aligned}
&(1-x)\left(x + \frac{(1-2x)(1-x)}{4}\right) \leqslant \frac{7}{27} \\
\Leftrightarrow &(1-x)(2x^2 + x + 1) \leqslant \frac{7}{27} \\
\Leftrightarrow &x^2(1-2x) \leqslant \frac{1}{27}, \quad x \in \left[0, \frac{1}{3}\right].
\end{aligned}$$

Примењујући сада неједнакост (1) за $n = 3$ имамо

$$x^2(1-2x) = x \cdot x \cdot (1-2x) \leqslant \left(\frac{x+x+1-2x}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

тј. горња неједнакост је тачна. Овим смо доказали и десну страну дате неједнакости.

Једнакост важи ако је $x = y = z = \frac{1}{3}$. Дакле, дата функција има максимум који износи $\frac{7}{27}$, ако је $x = y = z = \frac{1}{3}$, а минимум који износи 0 ако је $x = 1, y = z = 0$ или $y = 1$, $x = z = 0$ или $z = 1, x = y = 0$.

Литература

[1] T. Andreescu, O. Mushkarov, L. Stoyanov: *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhäuser (Boston-Basel-Berlin), 2006.

[2] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[3] Š. Arslanagić: *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[4] S. Klašnja: *Elementarna matematika I, Algebra*, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1963.

[5] E. Lozansky, C. Rousseau: *Winning Solutions*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[6] Д.С. Митриновић: *Збирка задатака из математике за I степен наставе на факултетима*, Универзитет у Београду, Научна књига, Београд, 1962.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2009/10 година