Сојузен натпревар 1986

Седмо одделение

1. Другарите Алекса, Борис и Цане во едно коло на спортска прогноза ги вложиле следниве суми: Алекса 600 денари, Борис 900 денари и Цане 1500 денари. На прогнозата вкупно добиле 17000 денари. Како правилно ќе ја поделат добивката?

   Решение. Нека a,b,c се соодветно деловите од 17000 денари кои Алекса, Борис и Цане треба да ги добијат. Тогаш
   $a:b:c=600:900:1500=2:3:5$.
   Затоа прво 17000 ќе го поделиме на $2+3+5=10$ делови, а потоа секој ќе го добие пропорционалниот дел:
   $$a=2\cdot 1700=3400,\ b=3\cdot 1700=5100 \text{ и } c=5\cdot 1700=8500 \text{ денари.}$$

2. Павел фатил определен број бубамари и пајаци. Кога ги пребројал сите нозе, го добил бројот 176. Колку бубамари, а колку пајаци фатил Павел, ако нивните броеви се парни и двоцифрени? (Пајакот има 8 нозе, а бубамарата има 6 нозе.)

   Решение. Ако се фатени b бубамари и p пајаци, тогаш $6b+8p=176$, т.е. $3b+4l=88$. Оттука добиваме $p=22-\frac{3}{4}b$. За да b и p се двоцифрен мора да важи $8<\frac{3}{4}b<13$, т.е. $10<b\leq 17$, а за да p е парен број, мора b да е делив со 8. Според тоа, $b=16$ и $p=10$.

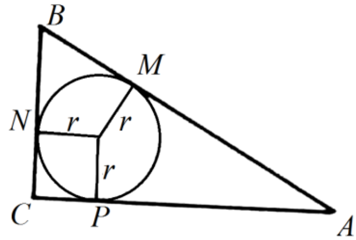
3. Еден четирицифрен број ги има слениве својства:
   1) првата и четвртата цифра се еднакви меѓу себе,
   2) втората е третата цифра се еднакви меѓу себе,
   3) бројот е еднаков на производот на три последователни прости броја.

   Кој е тој број?

   Решение. Нека бараниот број е $x=\overline{abba}$. Тогаш
   $$x=1000a+100b+10b+a=1001a+110b=11(91a+10b).$$
   Според тоа, x е делив со 11, па според условот $x=5\cdot 7\cdot 11$ или $x=7\cdot 11\cdot 13$ или $x=11\cdot 13\cdot 17$, односно $x=385$ или $x=1001$ или $x=2431$. Јасно, условоте ги задоволува само бројот $x=1001$.

4. Докажи дека во правоаголен триаголник збирот на катетите е еднаков на двократниот збир на радиусите на впишаната и опишаната кружница.

Решение. Од својствата на тангентата повлечена од точка надвор од кружницата следува $AP=AM$ и $BM=BN$. Понатаму, за хипотенузата $AB=c$ и радиусот на опишаната кружница R околу правоаголен триаголник важи $AB=c=2R$. Според тоа,

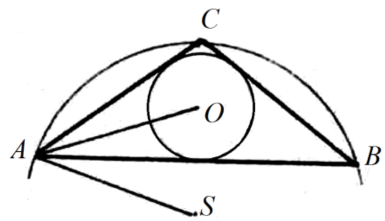


$$a+b=CP+PA+BN+CN=r+AM+MB+r=2r+AB=2r+2R,$$

што и требаше да се докаже.

5. Определи ги аглите на рамнокракиот триаголник $ABC\,(AC=BC)$, ако центрите O_1 и O на впишаната и опишаната кружница се симетрични во однос на основата AB на триаголникот.

Решение. Имаме $\measuredangle ASC=2\measuredangle ABC$ (централен и периферискиагол во кружница). Понатаму, од $SA=SC=R$ следува $\measuredangle SAC=\measuredangle SCA$. Ако означиме $\measuredangle OAC=\varphi$, тогаш заради симетријата на точките O и S во однос на AB и



бидејќи AO е симетрала на $\measuredangle BAC$ добиваме $3\varphi=\measuredangle SAC=\measuredangle SCA=\frac{\gamma}{2}$.

Сега, бидејќи $\alpha=\beta=2\varphi$ со замена во $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ добиваме $2\varphi+2\varphi+6\varphi=180^\circ$, т.е. $\varphi=18^\circ$. Според тоа, аглите на триаголникот се $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$.

Осмо одделение

1. Ако на природен број кој завршува со цифрата 5, му се избрише цифрата на единиците, добиениот број се помножи со својот следбеник и на производот од десно му се допише 25, се добива квадрат на природен број. Докажи дека ова важи за трицифрени броеви.

Решение. Нека дадениот број е $x=10a+5$. Со бришење на цифрата 5 го добиваме бројот a. Кога овој број го помножиме со неговиот следбрник и на производот му допишеме 25 дпбиваме

$$100a(a+1)+25=100a^2+100a+25=(10a+5)^2=x^2.$$

Ова важи за секој природен број x, па значи и за секој трициифрен број.

2. Определи ги сите тројки природни броеви (x,y,z) кои се решенија на равенката

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=1985$$

и x е најмалиот од овие броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x+1)(y+1)(z+1)=2\cdot 3\cdot 331.$$

Бидејќи x е најмалиот број, заклучуваме дека $x+1=2$, т.е. $x=1$. Понатаму, $y+1=3, z+1=331$ или $y+1=331, z+1=3$. Така ги добиваме решенијата $x=1, y=2, z=330$ или $x=1, y=330, z=2$.

3. На таблата е запишан трицифрен број $**8$. Тројца ученици ги погаѓале својствата на овој број.

Зоран: Сите цифри му се парни и има парен број различни прости делители.

Даниел: Делив е со 9 и е квадрат на некој природен број.

Никола: Помал е од 400 и 13 пати е поголем од квадратот на еден природен број.

Се покажало дека секој погодил само по едно својство на бројот. Кои цифри се наоѓаат на местата на ѕвездичките?

Решение. Бројот запишан на таблата има цифра на единците 8, па затоа не може да биде квадрат на природен број. Значи, точно е тврдењето на Даниел дека бројот е делив со 9. Според тоа, тоа е еден од следниве броеви: 109, 198, 288, 378, 468, 558, 648, 738, 828, 918. Од изјавата на Никола следува дека тоа може да бидат броевите помали од 400 или бројот 468, бидејќи $468=13\cdot 36$. Ги разложуваме преостанатите броеви на множители:

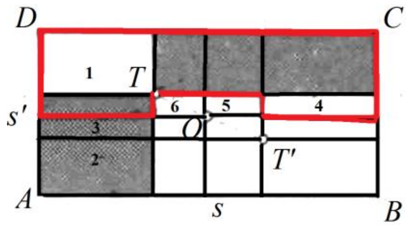
$$108=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3,\ 198=2\cdot 3\cdot 3\cdot 11,\ 288=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3,$$
$$378=2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7,\ 468=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 13.$$

Гледаме дека само едно од својствата кои ги навел Бојан имаат само броевите 108 (парен број различни множители) и 468 (сите цифри му се парни).

На таблата е запишан еден од броевите 108 или 468.

4. Даден е правоаголник $ABCD$ во кој е земена произволна точка низ која се повлечени две прави паралелни со страните на правоаголникот. Докажи дека плоштината на барем еден од правоаголниците кој ја содржи точката A или точката C е помала или еднаква на четвртина од плоштината на целиот правоаголник.

Решение. Нека се s' и s симетралите на правоаголникот (види цртеж). Тие правоаголникот го делат на четири еднакви дела, секој со плоштина $\frac{P}{4}$. Ако точката ја избереме во еден од деловите кои ја содржат точката A или точката C, точноста на тврдењето е очигледна.



Нека точката T е избрана како на цртежот. Конструираме точка T' симетрична на T во однос на O и правоаголникот $ABCD$ да го поделиме со прави низ T и T' паралелни со страните на правоаголникот. Ќе докажеме дека збирот на плоштините на бараните правоаголници (осенчени на цртежот) е помал од $\frac{P}{2}$. Заради симетрија правоаголниците 1 и 2 имаат еднакви плоштини, а исто така и правоаголниците 3 и 4. Земајќи го ова во предвид добиваме дека плоштината на осенчените правоаголници е еднаква на плоштината на осумаголникот чии страни се обоени со црвена боја. Но, плоштината на овој осумаголник е помала од $\frac{P}{2}$, па затоа сигурно еден од осенчените правоаголници има плоштина помала од $\frac{P}{4}$.

5. Во правоаголен триаголник ABC со катети a и b, хипотенуза c и висина повлечена кон хипотенузата h важи $c+h>a+b$. Докажи!

Решение. Имаме $\frac{ab}{2}=\frac{ch}{2}$, т.е. $ab=ch$. Понатаму, користејќи го овој услов и Питагоровата теорема добиваме

$$(c+h)^2=c^2+2ch+h^2=a^2+b^2+2ab+h^2=(a+b)^2+h^2>(a+b)^2,$$

од каде следува $(c+h)^2>)a+b)^2$, т.е. $c+h>a+b$.