Самоил Малчески, Скопје

# РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ СО НЕПОЗНАТА И ПОД ЗНАКОТ ЗА АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ

## 1. ДЕФИНИЦИЈА И СВОЈСТВА НА АПСОЛУТНАТА ВРЕДНОСТ

Во редовната настава се запозна со поимот апсолутна вредност. Така, на пример, $|-2|=2$, $|\sqrt{5}|=\sqrt{5}$, $|-1{,}232|=1{,}232$ итн. Да се потсетиме на дефиницијата на апсолутна вредност.

**Дефиниција 1.** *Апсолутна вредност* на реалниот број $a$ го нарекуваме реалниот број $|a|$ дефиниран со

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{ако } a\geq 0 \\ -a, & \text{ако } a<0\,. \end{cases} \qquad (1)$$

**Пример 1.** Пресметај $2\cdot|a|+7\cdot|b|+1$ ако $a=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ и $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Решение.** Од дефиницијата на апсолутната вредност имаме

$$\begin{aligned} 2\cdot|a|+7\cdot|b|+1 &= 2\cdot\left|-\frac{\sqrt{3}}{4}\right|+7\cdot\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+1 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{2}+1 = 4\sqrt{3}+1, \end{aligned}$$

што и требаше да се пресмета. ■

**Забелешка 1.** а) Непосредно од дефиницијата на апсолутната вредност следува дека $|a|\geq 0$ и $\sqrt{a^2}=|a|$, за секој $a\in\mathbb{R}$.

б) Нека $b>0$ и $|a|=b$. Тогаш, за $a\geq 0$ имаме $a=b$, а за $a<0$ важи $-a=b$, т.е. $a=-b$. Значи, од $|a|=b$ следува $a\in\{-b,b\}$, но важи и обратното од $a\in\{-b,b\}$ следува $|a|=b$.

**Пример 2.** Пресметај ја вредноста на изразот

$$\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}\,.$$

**Решение.** Имаме:

$$\sqrt{57-40\sqrt{2}}=\sqrt{(5-4\sqrt{2})^2}=|5-4\sqrt{2}|=4\sqrt{2}-5 \text{ и}$$

$$\sqrt{57+40\sqrt{2}}=\sqrt{(5+4\sqrt{2})^2}=|5+4\sqrt{2}|=4\sqrt{2}+5,$$

па затоа

$$\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}=4\sqrt{2}-5-(4\sqrt{2}+5)=-10. \ \blacksquare$$

Понатаму, на пример, $|5|=5=|-5|$, $-5\leq 5=|-5|$ и $-5\leq 5=|5|$. Ќе докажеме дека последното важи за секој реален број $a$, т.е. ќе ја докажеме следнава теорема.

**Теорема 1.** За секој реален број $a$ важи $|a|=|-a|$, $a\leq|a|$ и $-a\leq|a|$.

**Доказ.** Јасно, ако $a=0$, тогаш $|a|=0=|-a|$. Ако $a>0$, тогаш $|a|=a$ и бидејќи $-a<0$, имаме $|-a|=-(-a)=a=|a|$. Ако $a<0$, тогаш $|a|=-a$ и бидејќи $-a>0$, имаме $|-a|=-a=|a|$.

Понатаму, ако $a=0$, тогаш $|a|=0\geq 0=a$. Ако $a>0$, тогаш $|a|=a$, па затоа $a\leq|a|$. Ако $a<0$, тогаш $|a|=-a>0>a$ .

Останува да го докажеме второто неравенство. Ако $a=0$, тогаш $|a|=0$ $\geq 0=-a$. Ако $a>0$, тогаш $|a|=a>0>-a$. Ако $a<0$, тогаш $|a|=-a\geq -a$. ■

Во следнава теорема во врска со апсолутните вредности ќе докажеме две неравенства, кои имаат голема примена во математиката.

**Теорема 2.** *i)* $|a+b|\leq|a|+|b|$, за секои $a,b\in\mathbb{R}$.

*ii)* $||a|-|b||\leq|a-b|$, за секои $a,b\in\mathbb{R}$.

**Доказ.** *i)* Од теорема 1 следува $a\leq|a|$ и $b\leq|b|$, за секои $a,b\in\mathbb{R}$. Ако ги собереме последните две неравенства, добиваме $a+b\leq|a|+|b|$, за секои $a,b\in\mathbb{R}$. Аналогно од теорема 1 следува $-a\leq|a|$ и $-b\leq|b|$, за секои $a,b\in\mathbb{R}$, од што добиваме $-(a+b)\leq|a|+|b|$.

Конечно, ако $a+b\geq 0$, тогаш $|a+b|=a+b\leq|a|+|b|$, а ако $a+b<0$, тогаш $|a+b|=-(a+b)\leq|a|+|b|$, што и требаше да се докаже.

*ii)* Имаме: $|a|=|(a-b)+b|\leq|a-b|+|b|$ и $|b|=|(b-a)+a|\leq|b-a|+|a|$, од што следува $|a|-|b|\leq|a-b|$ и $-(|a|-|b|)\leq|a-b|$, од што, како и во доказот под *i)*, следува дека $||a|-|b||\leq|a-b|$. ■

Неравенството *i*) од теорма 2 во литературата е познато како неравенство на триаголник и истото може да се обопшти.

Точно е следново тврдење, кое овде нема да го докажеме.

*За секои реални броеви* $a_1, a_2, ..., a_n$ *точно е неравенството*

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|. \qquad (2)$$

Да ги разгледаме броевите $a = -4$ и $b = 3$. Имаме

$$a \cdot b = -12, \ \frac{a}{b} = -\frac{4}{3}, \ |a| = 4, \ |b| = 3, \ |a \cdot b| = 12 \text{ и } |\frac{a}{b}| = \frac{4}{3},$$

што значи дека

$$|a \cdot b| = 12 = |a| \cdot |b| \text{ и } |\frac{a}{b}| = \frac{4}{3} = \frac{|a|}{|b|}.$$

Последните равенства важат за секои реални броеви $a$ и $b$, што може да се види од следнава теорема.

**Теорема 3.** *i)* $|ab| = |a| \cdot |b|$, за секои $a, b \in \mathbb{R}$.

*ii)* $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, за секои $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

**Доказ.** *i)* Можни се следните четири случаи:

1) ако $a < 0, b < 0$, тогаш $ab > 0$, па затоа $|a| \cdot |b| = (-a)(-b) = ab = |ab|$.

2) ако $a < 0, b \geq 0$, тогаш $ab \leq 0$, па затоа $|a| \cdot |b| = (-a)b = -ab = |ab|$.

3) ако $a \geq 0, b < 0$, тогаш $ab \leq 0$, па затоа $|a| \cdot |b| = a(-b) = -ab = |ab|$.

4) ако $a \geq 0, b \geq 0$, тогаш $ab \geq 0$, па затоа $|a| \cdot |b| = ab = |ab|$.

*ii)* Ако $b > 0$, тогаш $\frac{1}{b} > 0$ и $|\frac{1}{b}| = \frac{1}{b} = \frac{1}{|b|}$, а ако $b < 0$, тогаш $\frac{1}{b} < 0$ и $|\frac{1}{b}| = -\frac{1}{b} = \frac{1}{-b} = \frac{1}{|b|}$. Сега од *i)* следува $|\frac{a}{b}| = |a \cdot \frac{1}{b}| = |a| \cdot |\frac{1}{b}| = |a| \cdot \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$. ■

**Пример 3.** Докажи ги неравенствата:

а) $|x + y - (a + b)| \leq |x - a| + |y - b|$,

б) $|xy - ab| \leq |a| \cdot |y - b| + |b| \cdot |x - a| + |x - a| \cdot |y - b|$.

**Решение.** а) Од неравенсвтот на триаголник следува

$$|x + y - (a + b)| = |x - a + (y - b)| \leq |x - a| + |y - b|.$$

б) Прво од неравенсвото (2), а потоа од теорема 3 *i)* следува:

$$\begin{aligned} |xy - ab| &= |a(y - b) + b(x - a) + (x - a)(y - b)| \\ &= |a(y - b)| + |b(x - a)| + |(x - a)(y - b)| \\ &\leq |a| \cdot |y - b| + |b| \cdot |x - a| + |x - a| \cdot |y - b|, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

**Пример 4.** Определи ја најмалата вредност на функцијата

$$f(x)=|x+1|+|x-2|+|x-3|.$$

**Решение.** Од дефиницијата на апсолутната вредност следува дека собироците во изразот со кој е определена функцијата $f(x)$ различно се дефинираат лево и десно од броевите $-1, 2$ и 3. Затоа бројната права ќе ја „разделиме“ на интервалите: $(-\infty,-1]$, $[-1,2]$, $[2,3]$ и $[3,+\infty)$. Имаме:

- на интервалот $(-\infty,-1]$ важи
$$f(x)=-(x+1)-(x-2)-(x-3)=-3x+4$$
и функцијата достигнува најмала вредност $f_{\min}=7$ за $x=-1$,
- на интервалот $[-1,2]$ важи
$$f(x)=(x+1)-(x-2)-(x-3)=-x+6$$
и функцијата достигнува најмала вредност $f_{\min}=4$ за $x=2$,
- на интервалот $[2,3]$ важи
$$f(x)=(x+1)+(x-2)-(x-3)=x+2$$
и функцијата достигнува најмала вредност $f_{\min}=4$ за $x=2$,
- на интервалот $[3,+\infty)$ важи
$$f(x)=(x+1)+(x-2)+(x-3)=3x-4$$
и функцијата достигнува најмала вредност $f_{\min}=5$ за $x=3$.

Според тоа, дадената функција достигнува најмала вредност $f_{\min}=4$ за $x=2$. ■

## 2. РАВЕНКИ СО НЕПОЗНАТА И ПОД ЗНАКОТ ЗА АПСОЛУТНАТА ВРЕДНОСТ

Во претходните разгледувања се осврнавме на апсолутната вредност и ги докажавме нејзините својства. Во овој дел ќе разгледаме како се решаваат равенки во кои непозната е и под знакот за апсолутна вредност.

Нека е дадена равенката

$$|ax+b|=c \text{, каде } a\neq 0.$$

Оваа равенка има смисла, ако и само ако $c\geq 0$ и во тој случај од дефиницијата на апсолутната вредност следува дека нејзиното решавање се сведува на решавањето на равенките

$$ax+b=c \text{ и } ax+b=-c.$$

Оттука добиваме

$$x_1 = \frac{c-b}{a} \text{ и } x_2 = -\frac{c+b}{a} \qquad (1)$$

и тоа се двете решенија на дадената равенка.

**Пример 5.** Реши ја равенката:

а) $|x-2|=3$, б) $|2x-1|=3$, в) $|1-3x|=4$.

**Решение.** а) Имаме, $a=1, b=-2, c=3$, па со замена во (1) за решенијата на дадената равенка добиваме $x_1 = \frac{3-(-2)}{1} = 5$ и $x_2 = -\frac{3+(-2)}{1} = -1$.

б) Имаме, $a=2, b=-1, c=3$, па со замена во (1) за решенијата на дадената равенка добиваме $x_1 = \frac{3-(-1)}{2} = 2$ и $x_2 = -\frac{3+(-1)}{2} = -1$.

б) Имаме, $a=-3, b=1, c=4$, па со замена во (1) за решенијата на дадената равенка добиваме $x_1 = \frac{4-1}{-3} = -1$ и $x_2 = -\frac{4+1}{-3} = \frac{5}{3}$. ■

Нека е дадена равенката

$$|ax+b|=|cx+d|, \text{ каде } a \neq 0 \text{ и } c \neq 0.$$

Во случајов на двете страни на равенката имаме само по еден израз под знаците на апсолутната вредност, па од дефиницијата на апсолутната вредност следува дека изразите под знаците на апсолутната вредност се или два еднакви или два спротивни броја. Така ги добиваме равенките

$$ax+b=cx+d \text{ и } ax+b=-cx-d,$$

кои соодветно се еквивалентни на равенките

$$(a-c)x=d-b \text{ и } (a+c)x=-(b+d).$$

Последните две равенки може да имаат или да немаат решенија, во зависност од тоа дали $a-c$, односно $a+c$ е различен од нула или е еднаков на нула.

**Пример 6.** Реши ја равенката:

а) $|3x-4|=|3x-2|$, б) $|3x+5|=|2x-4|$.

**Решение.** а) Од претходните разгледувања следува дека решавањето на равенката се сведува на решавање на равенките:

$$3x-4=3x-2 \text{ и } 3x-4=-3x+2.$$

Но, првата равенка е еквивалентна на равенката $0 \cdot x = 2$ и истата нема решение, а втората равенка е еквивалентна на равенката $6x=6$ и решение на истата е $x=1$.

б) Дадената равенка е еквивалентна на равенките:

$$3x+5=2x-4 \text{ и } 3x+5=-2x+4.$$

Решението на првата равенка е $x=-9$, а на втората е $x=-\frac{1}{5}$ и тоа се решенија на дадената равенка. ■

Нека е дадена равенката

$$|ax+b|=cx+d, \text{ каде } a\neq 0 \text{ и } c\neq 0.$$

За да оваа равенка има смисла мора да важи $cx+d\geq 0$. Ако последниот услов е исполнет, тогаш решавањето на дадената равенка се сведува на решавање на равенките

$$ax+b=cx+d \text{ и } ax+b=-c-d,$$

со тоа што треба да е исполнет условот $cx+d\geq 0$. Последните равенки се еквивалентни на равенките

$$(a-c)x=d-b \text{ и } (a+c)x=-(b+d),$$

а овие две равенки може да имаат или да немаат решенија, во зависност од тоа дали $a-c$, односно $a+c$ е различен од нула или е еднаков на нула.

**Пример 7.** Реши ја равенката:

$$|3x-7|=1-5x.$$

**Решение.** Од претходните разгледувања следува дека решеиија на дадената равенка ќе бидат оние решенија на равенките

$$3x-7=1-5x \text{ и } 3x-7=5x-1$$

за кои е исполнет условот $1-5x\geq 0$.

Решението на равенката $3x-7=1-5x$ е $x=1$ и како $1-5\cdot 1=-4<0$, тоа не е решение на почетната равенка. Решението на равенката $3x-7=5x-1$ е $x=-3$ и како $1-5\cdot(-3)=16>0$, тоа е решение на почетната равенка. ■

Во продолжение ѓе разгледаме уште неколку примери во чие решавање ќе ги користиме претходните разгледувања.

**Пример 8.** Реши ја равенката

$$||3x-2|-x|=2.$$

**Решение.** Дадената равенка е задоволена ако и само ако важи

$$|3x-2|-x=2 \text{ или } |3x-2|-x=-2,$$

т.е. ако и само ако

$$|3x-2|=x+2 \text{ или } |3x-2|=x-2.$$

Решенијата на равенката $|3x-2|=x+2$ треба да го задоволуваат условот $x+2\geq 0$, т.е. $x\geq -2$. Имаме $3x-2=x+2$ или $3x-2=-x-2$, од каде добиваме $x=2$ или $x=0$. И двете решенија го задоволуваат условот $x\geq -2$, па затоа тие се решенија на почетната равенка.

Решенијата на равенката $|3x-2|=x-2$ треба да го задоволуваат условот $x-2\geq 0$, т.е. $x\geq 2$. Имаме $3x-2=x-2$ или $3x-2=-x+2$, од каде добиваме $x=0$ или $x=1$. Овие решенија не го задоволуваат условот $x\geq 2$, па затоа тие не се решенија на почетната равенка.

Конечно, единствени решенија на дадената равенка се $x=2$ и $x=0$. ■

**Пример 9.** Реши ја равенката

$$|2x|-|x-3|=x.$$

**Решение.** Од дефиницијата на апсолутна вредност следува дека во равенката члeновите со апсолутни вредности различно се дефинираат лево и десно од броевите 0 и 3. Затоа бројната права ќе ја „разделиме“ на интервалите: $(-\infty,0)$, $[0,3)$ и $[3,+\infty)$.

- На интервалот $(-\infty,0)$ дадената равенка е еквивалентна со равенката
$$-2x+x-3=x \Leftrightarrow 2x+3=0.$$
Решение на последната равенка е $x=-\frac{3}{2}$ и како $-\frac{3}{2}<0$, тоа е решение и на почетната равенка.
- На интервалот $[0,3)$ дадената равенка е еквивалентна со равенката
$$2x+x-3=x \Leftrightarrow 2x-3=0.$$
Решение на последната равенка е $x=\frac{3}{2}$ и како $0\leq\frac{3}{2}<3$, тоа е решение и на почетната равенка.
- На интервалот $[3,+\infty)$ дадената равенка е еквивалентна со равенката
$$2x-x+3=x \Leftrightarrow 0\cdot x+3=0.$$
Последната равенка нема решение, па затоа и дадената равенка нема решение на интервалот $[3,+\infty)$. ■

**Пример 10.** Реши ја равенката

$$||x-1|-|x+2||=|-3x+3|.$$

**Решение.** Бидејќи во случајов двете страни на равенката се под знакот за апсолутна вредност, залучуваме дека таа ќе биде задоволена ако важи

$$|x-1|-|x+2|=-3x+3 \text{ или } |x-1|-|x+2|=3x-3. \qquad (2)$$

Аналогно како во претходната задача решенијата на равенките ќе ги побараме на интервалите $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$ и $[1,+\infty)$.

Ако $x\in(-\infty,-2)$, тогаш равенките (2) се еквивалентни на равенките

$$-x+1+x+2=-3x+3 \text{ или } -x+1+x+2=3x-3,$$

чии решенија соодветно се $x=0$ и $x=2$. Бидејќи овие решенија не припаѓаат на интервалот $(-\infty,-2)$ тие не се решенија на почетната равенка.

Ако $x\in[-2,1)$, тогаш равенките (2) се еквивалентни на равенките

$$-x+1-x-2=-3x+3 \text{ или } -x+1-x-2=3x-3,$$

чии решенија соодветно се $x=4$ и $x=\frac{2}{5}$. Бидејќи од овие две решенија само $x=\frac{2}{5}$ е во интервалот $[-2,1)$, заклучуваме дека само $x=\frac{2}{5}$ е решение на почетната равенка.

Ако $x\in[1,+\infty)$, тогаш равенките (2) се еквивалентни на равенките

$$x-1-x-2=-3x+3 \text{ или } x-1-x-2=3x-3,$$

чии решенија соодветно се $x=2$ и $x=0$. Бидејќи од овие две решенија само $x=2$ е во интервалот $[1,+\infty)$, заклучуваме дека само $x=2$ е решение на почетната равенка.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека единствени решенија на почетната равенка се $x=\frac{2}{5}$ и $x=2$. ■

## 3. НЕРАВЕНКИ СО НЕПОЗНАТА И ПОД ЗНАКОТ ЗА АПСОЛУТНАТА ВРЕДНОСТ

Пред да преминеме на решавање на неравенки во кои непознатата е и под знакот за апсолутна вредност ќе докажеме неколку својства на апсолутната вредност поврзани со неравенствата. За таа цел ќе ја докажеме следнава теорема.

**Теорема 4.** *i*) Ако $a>0$, тогаш $|x|<a$ ако и само ако $-a<x<a$.

*ii*) Ако $a>0$, тогаш $|x-b|<a$ ако и само ако $b-a<x<b+a$.

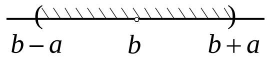
*iii*) Ако $a>0$, тогаш $|x|>a$ ако и само ако $x<-a$ или $x>a$.

*iv*) Ако $a>0$, тогаш $|x-b|>a$ ако и само ако $b-a<x$ или $x>b+a$.

**Доказ.** *i*) Нека $|x|<a$, $a>0$. Ако $x\geq 0$, тогаш $x=|x|<a$, а ако $x<0$, тогаш $-x=|x|<a$ т.е. $x>-a$. Значи, $x<a$ и $x>-a$ односно $-a<x<a$ и тоа е интервалот $(-a,a)$.

Нека $-a < x < a$, $a > 0$. Ако $x \geq 0$, тогаш $|x| = x < a$, а ако $x < 0$, тогаш $|x| = -x < a$. Според тоа, во секој случај $|x| < a$.

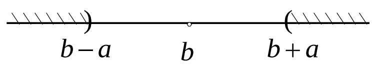
*ii*) Нека $a > 0$. Според *i*) неравенството $|x - b| < a$ е еквивалентно со неравенствата $-a < x - b < a$, кои се еквивалентни со неравенствата $b - a < x < b + a$ и тоа е интервалот $(b - a, b + a)$, цртеж десно.




*iii*) Нека $a > 0$. Да претпоставиме дека $|x| > a$. Ако $x \geq 0$, тогаш $x = |x| > a$, а ако $x < 0$, тогаш $-x = |x| > a$, т.е. $x < -a$. Според тоа, $x < -a$ или $x > a$ и тоа е множеството $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

Обратно, нека $x < -a$ или $x > a$. Ако $x \geq 0$, тогаш $|x| = x > a$, а ако $x < 0$, тогаш $|x| = -x > a$. Според тоа, во секој случај $|x| > a$.

*iv*) Нека $a > 0$. Според *iii*) $|x - b| > a$ ако и само $-a < x - b$ или $x - b > a$, т.е. ако и само ако $b - a < x$ или $x > b + a$ ако и само ако $x \in (-\infty, b - a) \cup (b + a, \infty)$ (цртеж десно). ■




**Забелешка 2.** Тврдењата од претходната теорема важат и во случај кога знаците за неравенства $<$ и $>$ се заменат соодветно со знаците за неравенства $\leq$ и $\geq$. Притоа, наместо отворени интервали имаме затворени, односно полузатворени интервали. Обиди се овие тврдења самостојно да ги искажеш.

**Пример 11.** а) Реши ја неравенката $|x - \frac{1}{4}| < \frac{3}{4}$.

б) Реши ја неравенката $|x - \frac{1}{3}| \geq \frac{2}{3}$.

**Решение. а)** Од второто тврдење во теоремата 4 следува $-\frac{3}{4} < x - \frac{1}{4} < \frac{3}{4}$, односно $\frac{1}{4} - \frac{3}{4} < x < \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$. Според тоа, $-\frac{1}{2} < x < 1$, што значи дека $x \in (-\frac{1}{2}, 1)$.

б) Од четвртото тврдење во теоремата 4 и од претходната забелешка имаме $x - \frac{1}{3} \geq \frac{2}{3}$ или $x - \frac{1}{3} \leq -\frac{2}{3}$, односно $x \geq \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ или $x \leq \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$. Според тоа, $x \geq 1$ или $x \leq -\frac{1}{3}$, што значи дека бараното множество е $(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, \infty)$. ■

**Пример 12.** Реши ја неравенката

а) $|3x-7|>-2$, б) $|5x-6|<-1$

**Решение.** а) Бидејќи за секој реален број $x$ апсолутната вредност која е на левата страна на неравенката е ненегативна, добиваме дека за секој реален број $x$ важи $|3x-7|\geq 0>-2$, што значи дека множеството решенија на дадената равенка е $(-\infty,\infty)\equiv\mathbb{R}$.

б) Левата страна на неравенката е апсолутна вредност на даден израз и таа е ненегативна, па затоа не може да биде помала од $-1$. Според тоа, дадената неравенка нема решение. ■

**Пример 13.** Реши ја неравенката:

$$|3x-1|>x+3.$$

**Решение.** Јасно, ако $x+3<0$, односно ако $x<-3$, тогаш

$$|3x-1|\geq 0>x+3,$$

што значи дека решение на неравенката е секој реален број $x$ таков што $x<-3$, т.е. интервалот $(-\infty,-3)$. Во спротивно, т.е. ако $x\geq -3$, тогаш

$$3x-1<-x-3 \text{ или } 3x-1>x+3.$$

Последните неравенки се еквивалентни на неравенките $4x<-2$ или $2x>4$, а оттука добиваме $x<-\frac{1}{2}$ или $x>2$. Според тоа, ако $x\geq -3$, тогаш решение на неравенката е множеството $[3,-\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$.

Конечно, решение на неравенката е множеството

$$(-\infty,-3)\cup[3,-\tfrac{1}{2})\cup(2,+\infty)=(-\infty,-\tfrac{1}{2})\cup(2,+\infty).$$ ■

**Пример 14.** Реши ја неравенката

$$|x-1|<2x+4.$$

**Решение.** Бидејќи апсолутната вредност е ненегативна, за да равенката има решение мора да е $2x+4>0$, односно $x>-2$.

Понатаму, ако $x>-2$, тогаш

$$x-1>-2x-4 \text{ или } x-1<2x+4.$$

Последните неравенки се еквивалентни на неравенките $3x>-3$ или $x>5$, па затоа $x>-1$ или $x>5$.

Според тоа, решенијата на неравенката се дадени со $x>-2$ и $x>-1$, или $x>5$ и $x>-1$. Конечно, решение на дадената неравенка е множеството $(-1,\infty)\cup(5,\infty)=(-1,\infty)$. ■

**Задачи за самостојна работа**

1. Пресметај ја вредноста на изразот
$$\sqrt{\frac{39}{4}+3\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{127}{4}-15\sqrt{3}}\,.$$
2. Реши ја равенката
а) $|1-2x|=5$, б) $|\frac{x-3}{2}|=1$, в) $|2x+5|=13$.
3. Реши ја равенката
а) $|x-1|=2|x+2|$, б) $|3x-7|=|1-3x|$, в) $|2x-5|=|5+3x|$.
4. Реши ја равенката
а) $|4x-3|=x$, б) $|2x-1|=x-5$.
5. Реши ја равенката:
а) $|x+2|+|2x-1|=2-x$, б) $|x+4|-|x-1|=2x$.
6. Докажи дека решение на равенката
$$|x-1|+|x-2|=1$$
е интервалот $[1,2]$.
7. Докажи дека равенката
$$|x+2|+|2x-1|=2-x$$
нема решенија во множеството реални броеви.
8. Реши ја равенката:
а) $|x-|2x-4||=2$, б) $||x-2|-|x+3||=|x+1|$.
9. Реши ја неравенката
а) $|4x-3|>9$, б) $|-2x+4|<12$, в) $|3x-1|>11$
10. Реши ја неравенката
а) $|3x+1|<2x-3$, б) $|2x+3|>3x+7$.
11. Реши ја неравенката
а) $|2x+3|>|3x+7|$, б) $|-5x+7|<|1-3x|$, в) $|4x-8|>|6x+2|$.
12. Реши ја неравенката
а) $|x+2|+|2x-1|>3$, б) $|x+4|-|x-1|<5$.