Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА
на ДМ на Србија во 2000/01 година

ДОКАЗИВАЊЕ ГЕОМЕТРИЈСКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ О ТРОУГЛУ

Шефкет Арсланагић, Природно-математички факултет Универзитета у Сарајеву

Доказивање неједнакости у математици је врло интересантан и креативан посао, али уз то најчешће веома тежак. При томе треба рећи да ту нема неке универзалне методе што тај посао и чини тако тешким. Све то посебно долази до изражаја приликом доказивања разних геометријских неједнакости. У овом раду ћемо изложити доказивање геометријских неједнакости у вези с троуглом тако што ћемо погодним смјенама (супституцијама) дате геометријске неједнакости свести на алгебарске неједнакости које се нешто лакше доказују и на које се могу примјенити неке од познатих класичних неједнакости (Неједнакост између бројних средина, Неједнакост Коши–Шварц–Буњаковског, те неједнакости Јенсена, Хелдера, Минковског, Чебишева, Жордана, Шура, итд.).

Најприје ћемо доказати једну кључну лему.

Лема: a, b и c су дужине страница једног троугла ако и само ако постоје реални бројеви $x, y, z > 0$ такви да је $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$.

Доказ: Нека су a, b и c дужине страница једног троугла и нека је $2p = a+b+c$ обим тог троугла. Како је $a = (p-b)+(p-c)$, $b = (p-c)+(p-a)$, $c = (p-a)+(p-b)$, то узимајући да је $x = p - a > 0$, $y = p - b > 0$ и $z = p - c > 0$ доказали смо први дио леме тј. да постоје реални бројеви $x, y, z > 0$ такви да је $a = y + z$, $b = z + x$ и $c = x + y$.

Обрнуто, ако је $a = y + z$, $b = z + x$ и $c = x + y$ (гдје су $x, y, z > 0$), те након сабирања $a + b + c = 2(x + y + z)$, лако добијамо из ових једнакости да је:

$$x = \frac{b+c-a}{2} > 0, \quad y = \frac{c+a-b}{2} > 0, \quad z = \frac{a+b-c}{2} > 0.$$

Одавде добијамо да је $b + c > a$, $c + a > b$ и $a + b > c$, што значи да су a, b и c дужине страница једног троугла (неједнакост троугла).

Овим је лема у потпуности доказана.

Нека је p–полуобим троугла, F–површина троугла, R–полупречник описане кружнице троугла, r–полупречник кружнице уписане у троугао, r_a–полупречник приписане кружнице троугла и α унутрашњи угао троугла ABC. Користећи смјену

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y \quad (x, y, z > 0), \tag{1}$$

лако се покаже да вриједе сљедеће формуле:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = x + y + z; \tag{2}$$

$$F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}; \tag{3}$$

$$R = \frac{abc}{4F} = \frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}}; \tag{4}$$

$$r = \frac{F}{p} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}; \tag{5}$$

$$r_a = \frac{F}{p-a} = \frac{\sqrt{(x+y+z)xyz}}{x}; \tag{6}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{yz}{(x+z)(x+y)}}; \tag{7}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{(x+y+z)xyz}{(x+z)(x+y)}}; \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{yz}{(x+y+z)x}}. \tag{9}$$

Напоменимо да аналогне формуле вриједе за r_b, r_c, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$, $\cos\frac{\gamma}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Сада ћемо користећи горње формуле доказати неколико геометријских неједнакости у вези са троуглом.

Примјер 1.

$$\frac{a}{b-a+c} + \frac{b}{a-b+c} + \frac{c}{a-c+b} \geq 3. \tag{10}$$

Доказ: Након смјене (1) дата неједнакост (10) постаје:

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3 \Leftrightarrow (\frac{y}{x} + \frac{x}{y}) + (\frac{z}{x} + \frac{x}{z}) + (\frac{y}{z} + \frac{z}{y}) \geq 6.$$

Пошто је због неједнакости између аритметичке и геометријске средине (убудуће АГ неједнакости)

$$\frac{1}{2}(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}) \geq \sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}},$$

тј.

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2,$$

то је посљедња неједнакост тачна, па је и неједнакост (10) тачна.

Вриједи једнакост ако и само ако је $x = y = z$, тј. $a = b = c$.

Примјер 2. (ИМО 1964.)

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc. \tag{11}$$

Доказ: Са смјеном (1) дата неједнакост (11) постаје:

$$2x(y+z)^2 + 2y(z+x)^2 + 2z(x+y)^2 \leq 3(y+z)(z+x)(x+y),$$

односно након сређивања:

$$6xyz \leq xy^2 + x^2y + y^2z + z^2y + zx^2 + z^2x,$$

или

$$xy^2 - 2xyz + xz^2 + yz^2 - 2xyz + yx^2 + zx^2 - 2xyz + zy^2 \geq 0,$$

тј.

$$x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 > 0,$$

а ова неједнакост очигледно тачна, па је тачна и дата неједнакост (11).

Једнакост вриједи само у случају када је $x = y = z$, а то је еквивалентно са $a = b = c$.

Примјер 3. (ИМО 1983.)

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + ac^2(c-a) \geq 0. \tag{12}$$

Доказ: Након смјене (1) дата неједнакост (12) постаје:

$$(y+z)^2(z+x)(y-x) + (z+x)^2(x+y)(z-y) + (x+y)^2(y+z)(x-z) \geq 0,$$

а након сређивања:

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x+y+z). \tag{13}$$

Како је

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{y} \geq 2x - y,$$
$$(x-z)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{z^2}{x} \geq 2z - x,$$
$$(y-z)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{y^2}{z} \geq 2y - z,$$

то после сабирања горњих неједнакости добијамо:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{z^2}{x} + \frac{y^2}{z} \geq 2x - y + 2z - x + 2y - z = x + y + z,$$

односно, након ножења ове неједнакости са $xyz > 0$:

$$zx^3 + yz^3 + xy^3 \geq xyz(x+y+z),$$

што значи да је неједнакост (13) тачна, па је тачна и дата неједнакост (12).

Вриједи једнакост ако и само ако је $x = y = z$, односно, $a = b = c$.

Примјер 4.

$$\frac{4}{3}p^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2p^2. \tag{14}$$

Доказ: Након увођења смјена (1) и (2) дата неједнакост се своди на неједнакост $2(xy+xz+yz) > 0$, што је тачно јер је $x, y, z > 0$, док се лијева неједнакост своди на неједнакост $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz$ или $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$ што је тачно.

Вриједи једнакост у лијевој неједнакости (14) ако и само ако је $x = y = z$, тј. ако је $a = b = c$.

Примјер 5.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{\sqrt{3}}{2r}. \tag{15}$$

Доказ: Имамо из (1):

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} &= \frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\overset{\text{АГ}}{\leq}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\Big)=\\ &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2\sqrt{xyz}}\overset{\text{АК}}{\leq}\frac{3\cdot\sqrt{\frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2}{3}}}{2\sqrt{xyz}}=\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}}\overset{(5)}{=}\frac{\sqrt{3}}{2r},\end{aligned}$$

тј. неједнакост (15) је тачна. (Овдје АК значи неједнакост између аритметичке и квадратне средине).

Вриједи једнакост у (15) ако је $x=y=z$, тј. $a=b=c$.

Примјер 6.

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}. \tag{16}$$

Доказ: Имамо на основу (1) из (16):

$$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}\leq\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}. \tag{17}$$

Користећи неједнакост између аритметичке и квадратне средине (АК):

$$\frac{u+v}{2}\leq\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}};(u,v>0)$$

добијамо:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} &= \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{2}+\frac{\sqrt{2y}+\sqrt{2z}}{2}+\frac{\sqrt{2z}+\sqrt{2x}}{2}\\ &\leq \sqrt{\frac{2x+2y}{2}}+\sqrt{\frac{2y+2z}{2}}+\sqrt{\frac{2z+2x}{2}}\\ &= \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z},\end{aligned}$$

што значи да је неједнакост (17) тачна са једнакошћу ако и само ако је $x=y=z$. Дакле, дата (њој еквивалентна) неједнакост (16) је такођер тачна са једнакошћу ако и само ако је $a=b=c$ (једнакостраничан троугао).

Примјер 7.

$$h_a+h_b+h_c\geq 9r \tag{18}$$

(h_a, h_b и h_c су дужине висина троугла).

Доказ: Имамо због (1) и (3):

$$h_a=\frac{2F}{a}=\frac{2\sqrt{(x+y+z)xyz}}{y+z},$$

као и аналогне формуле за h_b и h_c. Сада дата неједнакост (18) постаје због (5):

$$2(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)\geq 9,$$

тј.

$$\frac{(x+y)+(x+z)+(y+z)}{3}\geq \frac{3}{\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}},$$

што је тачно јер је ово АХ неједнакост, тј. неједнакост између аритметичке и хармонијске средине.

Вриједи једнакост у (18) ако и само ако је $x=y=z$, тј. $a=b=c$.

Примјер 8.

$$r_a\sqrt{r_a}+r_b\sqrt{r_b}+r_c\sqrt{r_c}\geq 3p\sqrt{r}. \tag{19}$$

Доказ: Дата неједнакост (19) због (5) и (6) постаје након сређивања:

$$\frac{\sqrt{yz}}{x}+\frac{\sqrt{xz}}{y}+\frac{\sqrt{xy}}{z}\geq 3,$$

или након множења са $xyz>0$:

$$yz\sqrt{yz}+xz\sqrt{xz}+xy\sqrt{xy}\geq 3xyz,$$

тј.

$$\frac{yz\sqrt{yz}+xz\sqrt{xz}+xy\sqrt{xy}}{3}\geq \sqrt[3]{yz\sqrt{yz}\cdot xz\sqrt{xz}\cdot xy\sqrt{xy}}=\sqrt[3]{(xyz)^3},$$

а ово је АГ неједнакост која је тачна па је и дата неједнакост (19) тачна.

Вриједи једнакост само у случају $x=y=z$, тј. $a=b=c$.

Примјер 9.

$$\frac{1}{w_a^2}+\frac{1}{w_b^2}+\frac{1}{w_c^2}\geq \frac{9}{p^2}. \tag{20}$$

(w_a, w_b и w_c су дужине симетрала унутрашњих углова троугла).

Доказ: Како је $w_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$, то због неједнакости $2\sqrt{bc}b+c\leq 1$ ($\Leftrightarrow(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\geq 0$) вриједи:

$$w_a\leq\sqrt{p(p-a)},$$

те

$$\frac{1}{w_a^2}\geq\frac{1}{p(p-a)},$$

односно због (2):

$$\frac{1}{w_a^2}\geq\frac{1}{(x+y+z)x}$$

и аналогно:

$$\frac{1}{w_b^2}\geq\frac{1}{(x+y+z)y};\quad \frac{1}{w_c^2}\geq\frac{1}{(x+y+z)z}. \tag{21}$$

Из АХ неједнакости слиједи

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z},$$

па сада добијамо из (21):

$$\frac{1}{w_a^2}+\frac{1}{w_b^2}+\frac{1}{w_c^2}\geq\frac{9}{(x+y+z)^2}=\frac{9}{p^2},$$

што је и требало доказати.

Вриједи једнакост у (21) ако и само ако је $x=y=z$, тј. у (20) ако и само ако је $a=b=c$.

Примјер 10.

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{1}{8}. \tag{22}$$

Доказ: На основу (7) дата неједнакост (22) постаје:

$$\frac{xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}\leq\frac{1}{8},$$

тј.

$$(x+y)(x+z)(y+z)\geq 8xyz,$$

а ова неједнакост непосредно слиједи из АГ неједнакости:

$$x+y\geq 2\sqrt{xy};\quad x+z\geq 2\sqrt{xz};\quad y+z\geq 2\sqrt{yz}.$$

Вриједи једнакост у (22) само у случају када је $x=y=z$, тј. $a=b=c$ или $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ (једнакостраничан троугао).

Примјер 11.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\geq\sqrt{3}. \tag{23}$$

Доказ: Након смјене (9) дата неједнакост (23) постаје:

$$\sqrt{\frac{yz}{(x+y+z)x}}+\sqrt{\frac{xz}{(x+y+z)y}}+\sqrt{\frac{yx}{(x+y+z)z}}\geq\sqrt{3},$$

односно,

$$\sqrt{\frac{y^2z^2}{(x+y+z)xyz}}+\sqrt{\frac{x^2z^2}{(x+y+z)xyz}}+\sqrt{\frac{y^2x^2}{(x+y+z)xyz}}\geq\sqrt{3},$$

или

$$(yz+xz+yx)^2\geq 3(x+y+z)xyz,$$

а одавде, након квадрирања и сређивања, добијамо:

$$y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2,$$

тј.

$$\frac{1}{2}[(xz-yz)^2+(xy-yz)^2+(xz-xy)^2]\geq 0,$$

што је очигледно тачно.

Вриједи једнакост у (23) ако и само ако је $x = y = z$, тј. $a = b = c$ или $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ (једнакостраничан троугао).

Рецимо и то да се и неке (теже) алгебарске неједнакости (које садрже позитивне реалне бројеве) могу лакше доказати ако се смјенама $x = p - a > 0$, $y = p - b > 0$ и $z = p - c > 0$ $(p = \frac{a+b+c}{2})$ преведу на геометријске неједнакости. То ћемо демонстрирати на пар примјера.

Примјер 12.

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{y+x} \geq \frac{3}{2}; (x, y, z > 0). \tag{24}$$

Доказ: Након смјене $x = p - a > 0$, $y = p - b > 0$ и $z = p - c > 0$, неједнакост (24) постаје:

$$\frac{p-a}{a} + \frac{p-b}{b} + \frac{p-c}{c} \geq \frac{3}{2}$$

или због $p = \frac{a+b+c}{2}$ након сређивања:

$$(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9,$$

тј.

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}},$$

а ово је АХ неједнакост која је тачна.

Вриједи једнакост у (24) ако и само ако је $a = b = c$, тј. $x = y = z$.

Примјер 13.

$$(x+y+z)\sqrt{3xyz(x+y+z)} \leq xyz + (x+y)(y+z)(x+z), \tag{25}$$

гдје су $x, y, z > 0$.

Доказ: Напишимо дату неједнакост (25) у облику:

$$(x+y+z)\sqrt{3} \leq \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} + \frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{\sqrt{xyz(x+y+z)}}$$

или због смјена (2), (4) и (5):

$$p\sqrt{3} \leq r + 4R. \tag{26}$$

Како је $4R + r = r_a + r_b + r_c$, то имамо:

$$(4R+r)^2 = (r_a + r_b + r_c)^2 \geq 3(r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c)$$

$$(\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(r_a - r_b)^2 + (r_a - r_c)^2 + (r_b - r_c)^2] \geq 0),$$

односно, због $r_a = \frac{F}{p-a}$; $r_b = \frac{F}{p-b}$ и $r_c = \frac{F}{p-c}$:

$$\begin{aligned}(4R+r)^2 &\geq 3\left[\frac{F^2}{(p-a)(p-b)} + \frac{F^2}{(p-a)(p-c)} + \frac{F^2}{(p-b)(p-c)}\right] = \\ &= 3 \cdot \frac{F^2(p-a+p-b+p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= 3 \cdot \frac{p^2(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = 3p^2,\end{aligned}$$

а одавде

$$4R + r \geq p\sqrt{3}.$$

Дакле, неједнакост (26) је тачна, па је тачна и неједнакост (25).

Вриједи једнакост у (26) ако и само ако је $a = b = c$, тј. у неједнакости (25) ако и само ако је $x = y = z$.

Читаоцима препоручујемо да за вјежбу докажу сљедеће неједнакости:

1. $(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 \geq \frac{p^2}{3}$;
2. $r_a + r_b + r_c \geq 9r$;
3. $ar_a + br_b + cr_c \geq 6f$;
4. $\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \geq 3$;
5. $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq p^2$;
6. $R \geq 2r$;
7. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b})} \geq \frac{3(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{a+b+c}$;
8. $p \geq 3R \cdot \sqrt[3]{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}$;
9. $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}$;
10. $8abc(\sin^2\alpha)(\sin^2\beta)(\sin^2\gamma) \leq p^3$;
11. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$;
12. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq 9\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$;
13. $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geq 1$;
14. $1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$;
15. $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \frac{1}{8}$;
16. $2 \leq \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$;
17. $(\frac{x+y+z}{3})^3 xyz \leq (\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+z}{2} \cdot \frac{y+z}{2})^2; (x, y, z > 0)$.

Литература

1. Arslanagić, Š., Dokazivanje nejednakosti pomoću metode supstitucije (Uvodjenje novih promjenljivih), Matematika (Zagreb–Beograd– Sarajevo), **20** (1991), br. 3–4, 84–90.
2. Arslanagić, Š., O primjeni poznatih nejednakosti, Triangle, UM BiH (Sarajevo), **1** (1997), br. 1, 11–24.
3. Arslanagić, Š., Neke nejednakosti u vezi trougla, Triangle, UM BiH (Sarajevo), **2** (1998), br. 4, 269–275.
4. Arslanagić, Š., Kako dokazivati algebarske nejednakosti, Naša škola (Sarajevo), **47** (2000), br. 13, 101–118.
5. **Арсланагић, Ш.**, *Неједнакости између бројних средина и њихова примјена*, Тангента (Нови Сад–Београд), бр. 17 (1999–2000), 1–13.
6. Botemma, O. and other, Geometric Inequalities, Wolters–Noordhoff Publishing, Groningen, Netherlands,1969.
7. Engel, A., Problem–Solving Strategies, New York–Berlin–Heidelberg, 1997.