# JMMO 2011

1. За природниот број $n$ со $S(n)$ го означуваме збирот на неговите цифри. Пример: за $n=2456$ имаме

$$S(n)=S(2456)=2+4+5+6=16,$$
$$S(S(n))=S(S(2456))=S(16)=1+6=7.$$

Дали постои природен број $n$ за кој што важи

$$n+S(n)+S(S(n))=2011. \qquad (1)$$

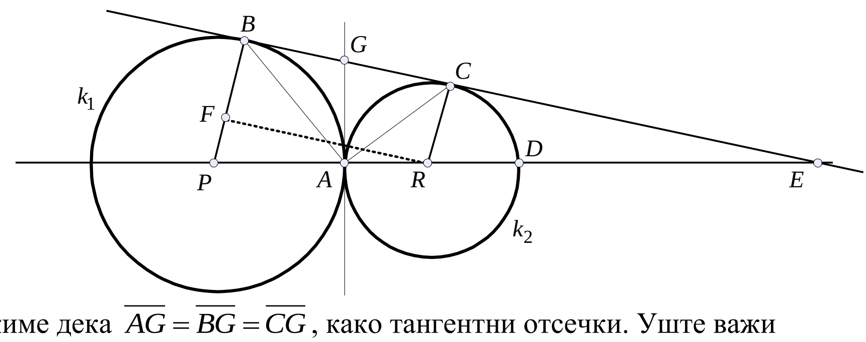
**Решение.** Броевите $n$ и $S(n)$ имаат ист остаток при делење со 3 и 9. Имено ако, $n=\overline{a_m a_{m-1}...a_1 a_\circ}$ тогаш

$$n=\overline{a_m a_{m-1}...a_1 a_\circ}=10^m a_m+10^{m-1}a_{m-1}+...+10a_1+a_\circ$$
$$=[(10^m-1)a_m+(10^{m-1}-1)a_{m-1}+...+(10-1)a_1]+[a_m+a_{m-1}+...+a_1+a_\circ]$$

Секој од изразите во заградите е делив со 9, па $n$ и $S(n)$ имаат ист остаток при делење со 3 и 9. Броевите $n, S(n), S(S(n))$ имаат ист остаток при делење со 3. Па збирот $n+S(n)+S(S(n))$ е делив со 3, додека 2011 не е делив со 3. Значи, не постои природен број $n$ за кој што важи (1).

2. Дадени се две кружници $k_1$ и $k_2$ со центри $P$ и $R$ соодветно, кои се допираат однадвор во точка $A$. Нека $p$ е нивна заедничка тангента, што не минува низ $A$, а ги допира $k_1$ и $k_2$ во точките $B$ и $C$, соодветно. Правата $PR$ ја сече правата $BC$ во точка $E$, а кружницата $k_2$ во точките $A$ и $D$. Ако $\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{2}$, најди го односот $\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$.

**Решение.** Нека радиусот на $k_1$ е $r$, а на $k_2$ е $t$ и нека заедничката тангента на $k_1$ и $k_2$ во точката $A$ ја сече правата $BC$ во $G$. Да забележиме дека $\overline{AG}=\overline{BG}=\overline{CG}$, како тангентни отсечки. Уште важи



$$\measuredangle APB = 180^\circ - \measuredangle AGB = \measuredangle AGC .$$

Значи, рамнокраките триаголници $\triangle APB$ и $\triangle AGC$ се слични. Бидејќи знаеме дека $\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{2}$, следува дека $r = \overline{AP} = 2\overline{AG}$, од каде $\overline{BC} = r$. Нека правата паралелна со $BC$ низ $R$, ја сече $PB$ во точка $F$. Тогаш, од Питагоровата теорема за правоаголниот $\triangle PRF$, имаме

$$(r+t)^2 = (r-t)^2 + \overline{RF}^2 \text{, т.е. } \overline{RF} = 2\sqrt{rt} .$$

Од ова имаме $\overline{BC} = 2\sqrt{rt}$. Сега имаме $r = 2\sqrt{rt}$. Добиваме дека $r = 4t$. Од сличноста на правоаголните триаголници $\triangle REC$ и $\triangle PRF$, имаме

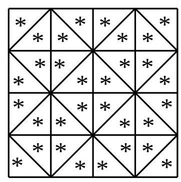
$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{RE}}{\overline{RC}} ,$$

односно

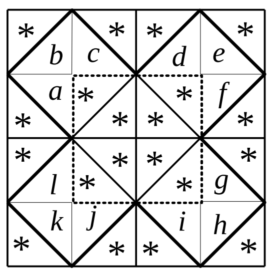
$$\frac{r+t}{r-t} = \frac{t+\overline{DE}}{t} ,$$

од каде добиваме $\frac{5t}{3t} = 1 + \frac{\overline{DE}}{t}$, $\overline{DE} = \frac{2}{3}t$. Сега имаме: $\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{r}{\frac{2}{3}t} = \frac{12t}{2t} = 6$.

3. На местото на ѕвездичките (на цртежот десно) се запишани броевите од 1 до 32, така што секој број е запишан по еднаш. Дали може збировите, на броевите запишани во секое квадратче кое не е поделено на помали квадратчиња, да се еднакви?



**Решение.** Збирот на сите броеви е $\frac{32 \cdot 33}{2} = 16 \cdot 33$.



Сите броеви се распределени во 16 мали квадрати. Следува дека збирот на броевите во секој од овие квадрати е 33. Фигурата ограничена со задебелената линија се состои од пет квадрати кои не се поделени на помали квадрати, па збирот на броевите запишани во неа е $5 \cdot 33$. Исто, фигурата ограничена со испрекинатата линија се состои од четири квадрати па збирот на броевите во неа е $4 \cdot 33$. Следува дека

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l = 33 ,$$

но тоа не е можно, бидејќи

$$33 = a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l \geq 1+2+\ldots+12 = 78 > 33 .$$

4. Одреди ги сите цели броеви $m$ за кои бројот $m^3+m^2+7$ е делив со бројот $m^2-m+1$.

**Решение.** Од
$$m^3+m^2+7=(m^2-m+1)(m+2)+(m+5)$$
следува дека $m^2-m+1$ е делител на $m+5$. Очигледно едно решение е $m=-5$.

Нека $m\neq -5$. Тогаш $|m^2-m+1|\leq|m+5|$. Од
$$m^2-m+1=(m-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}>0$$
следува дека $m^2-m+1\leq|m+5|$. Имаме две можности:
$$m^2-m+1\leq m+5 \text{ или } m^2-m+1\leq -m-5.$$
Случајот
$$m^2-m+1\leq -m-5\text{, т.е. } m^2+6\leq 0$$
Не е можен. Од $m^2-m+1\leq m+5$ следува $m^2-2m-4\leq 0$ односно $(m-1)^2\leq 5$. Последното неравенство е задоволено за $m\in\{-1,0,1,2,3\}$. Со проверка се добива дека само $m=0$ и $m=1$ го задоволуваат почетниот услов.

Конечно $m\in\{-5,0,1\}$.

5. За едно множество $\mathbf{M}$ што содржи 4 елементи велиме дека е „парно сврзано“ ако за секој елемент $x$ во $\mathbf{M}$, барем еден од броевите $x-2$ или $x+2$ припаѓа исто така во $\mathbf{M}$. Нека $S_n$ е бројот на „парно сврзани” подмножества на $\{1,2,...,n\}$. Определи го најмалиот број $n$ таков што $S_n\geq 2011$.

**Решение.** Нека $\mathbf{M}=\{a,b,c,d\}$ е „парно сврзано“ множество. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a<b<c<d$ . Бидејќи $a-2$ не припаѓа на $\mathbf{M}$, следува дека $a+2$ е во $\mathbf{M}$. Исто така бидејќи $d+2$ не припаѓа на $\mathbf{M}$, следува дека $d-2$ е во $\mathbf{M}$. Можни се следниве случаи:

*i*) $b=a+2; b=d-2$, ($d=b+2=a+4$). Овој случај не е можен бидејќи тогаш $c=a+3$ и множеството $\mathbf{M}$ е од обликот $\{a,a+2,a+3,a+4\}$, но $a+1,a+5\notin\mathbf{M}$.

*ii*) $b=a+2; c=d-2$ ($d=c+2$). Следува дека $\mathbf{M}$ е од обликот

$\{a, a+2, c, c+2\}$, $c-a>2$. Овој облик ќе го наречеме ***облик* 1**.

*iii*) $b=a+2; a=d-2$. Овој случај не е можен бидејќи се добива $b=d$.

*iv*) $c=a+2; b=d-2$. Следува $b=a+1$ и $d=a+3$ и множеството $\mathbf{M}$ е од обликот $\{a, a+1, a+2, a+3\}$. Овој облик ќе го наречеме ***облик* 2**.

*v*) $c=a+2; c=d-2$. Следува дека $b=a+1$, $d=a+4$ и множеството $\mathbf{M}$ е од обликот $\{a, a+1, a+2, a+4\}$, но $a-1, a+3 \notin \mathbf{M}$. Значи и овој случај не е можен.

*vi*) $c=a+2; a=d-2$. Овој случај не е можен бидејќи се добива $c=d$.

*vii*) Случајот $d=a+2$ не е можен. Со тоа се исцрпени сите можности за облик на $\mathbf{M}$.

Нека $n$ е доволно голем. За $\{1, 2, ..., n\}$, „парно сврзани“ подмножества од ***облик* 2** се вкупно $n-3$. Останува да го пресметаме бројот на „парно сврзани“ подмножества од ***облик* 1**.

Ако $a=1$ постојат вкупно $n-5$ различни подмножества,

Ако $a=2$ постојат вкупно $n-6$ различни подмножества,

Ако $a=3$ постојат вкупно $n-7$ различни подмножества,

..........................................................................................

Ако $a=n-5$ постои само едно такво подмножество.

Значи бројот на „парно сврзани“ подмножества од ***облик* 1** се вкупно

$$1+2+...+(n-5)=\frac{(n-5)(n-4)}{2}=\frac{n^2-9n+20}{2}$$

Значи, вкупниот број на „парно сврзани“ подмножества на $\{1, 2, ..., n\}$ е:

$$S_n=n-3+\frac{n^2-9n+20}{2}=\frac{n^2-7n+14}{2}=\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1$$

Треба да го одредиме најмалиот $n$ за кој $\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1 \geq 2011$, односно $(n-3)(n-4) \geq 4020$. Со проверка се утврдува дека $n \geq 67$. Значи најмалиот број е 67.