Ристо Малчески, Скопје

ПОВЕЌЕ НАЧИНИ ЗА ДОКАЖУВАЊЕ НА ЕДНО НЕРАВЕНСТВО

Значењето на решавање на една задача на повеќе начини може да се согледа до следнава мисла:

„*Покорисно е да се реши една иста задача на неколку различни начини откол-ку да се решатб неколку задачи – секоја на само еден начин. Ако една иста задача се реши на различни начини, може со споредување на решенијата, за да се коснтатира кое од нив е пократко, поефективно, поелегантно. На тој начин се стекнуваат и се развиваат вештините за решавање задачи*.“

W. W. Sawyer, Prelude to Mathematics

Токму затоа во следните разгледувања ќе презентираме неколку начини за решавање на следнава задача.

Задача. Докажи дека за секој позитивен реален број a важи

$$\sqrt{a}+\sqrt{a+2}<2\sqrt{a+1}. \tag{1}$$

Решение. *Прв начин*. Даденото неравенство е еквивалкентно со неравенството

$$\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1}<\sqrt{a+1}-\sqrt{a}. \tag{2}$$

Бидејќи $\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}>\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$, добиваме $\frac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}<\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$, па затоа:

$$\begin{aligned}\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1}&=\frac{(\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1})(\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1})}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}=\frac{\sqrt{a+2}^2-\sqrt{a+1}^2}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}\\&=\frac{a+2-(a+1)}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}=\frac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}<\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}\\&=\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})}=\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}^2-\sqrt{a}^2}\\&=\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{a+1-a}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a},\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (2), од каде следува точноста на неравенството (1).

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{a+2})^2&=a+2\sqrt{a(a+2)}+a+2=2(a+1)+2\sqrt{(a+1)^2-1}\\&<2(a+1)+2\sqrt{(a+1)^2}=4(a+1)=(2\sqrt{a+1})^2,\end{aligned}$$

т.е.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{a+2})^2<(2\sqrt{a+1})^2. \qquad (3)$$

Конечно, ако се земе предвид дека $\sqrt{a}+\sqrt{a+2}>0$ и $2\sqrt{a+1}>0$, со коренување на двете страни на неравенството (3) се добива неравенството (1).

Трет начин. Означуваме $\sqrt{a}+\sqrt{a+2}=x$ и $2\sqrt{a+1}=y$. Имаме

$$x^2=a+a+2+2\sqrt{a(a+2)}=2(a+1)+2\sqrt{a(a+2)} \text{ и } y^2=4(a+1).$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}(x^2-2(a+1))^2&=4a(a+2)=4(a+1)^2-4<4(a+1)^2\\ &=(2(a+1))^2=(4(a+1)-2(a+1))^2\\ &=(y^2-2(a+1))^2,\end{aligned}$$

па затоа

$$x^2-2(a+1)<y^2-2(a+1),$$

од каде добиваме $x<y$, т.е. точно е неравенството (1).

Четврт начин. Означуваме $\sqrt{a}=x$ и $\sqrt{a+2}=y$. Бидејќи $x^2=a$, $y^2=a+2$ и $x\neq y$ од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува неравенството

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+2}}{2}=\frac{x+y}{2}<\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}=\sqrt{\frac{a+a+2}{2}}=\sqrt{a+1},$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).

Петти начин. Ќе го користиме Енгеловиот принцип на минимум: за секои позитивни броеви m,n,x,y важи

$$\frac{(m+n)^2}{x+y}\leq\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{m}{x}=\frac{n}{y}$.

Земаме $\sqrt{a}=m$, $\sqrt{a+2}=n$, $x=y=1$ и бидејќи $\frac{m}{x}\neq\frac{n}{y}$ добиваме дека е точно неравенството

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{a+2})^2}{1+1}<\frac{a}{1}+\frac{a+2}{1},$$

т.е.неравенството

$$(\sqrt{a}+\sqrt{a+2})^2<4(a+1)$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).