XXIX РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение – деветтолетка

Задача 1. Коста, Јане и Владимир засадиле дрвца: круша, јаболка и вишна. Секој засадил по едно дрво, чие име не започнува на иста буква како неговото име. Кој кое дрво го засадил, ако се знае дека Владимир не засадил круша?

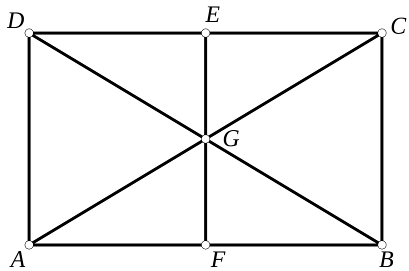
Решение. Со пополнување на табелата се добива дека Коста засадил вишна, Јован круша и Владимир јаболка.

	круша	јаболки	вишна
Коста	-	-	+
Јане	+	-	-
Владимир	-	+	-

Задача 2. Цвета имала кокошки. Осум кокошки неселе за една недела 32 јајца. Колку јајца ќе снесат за една недела девет кокошки?

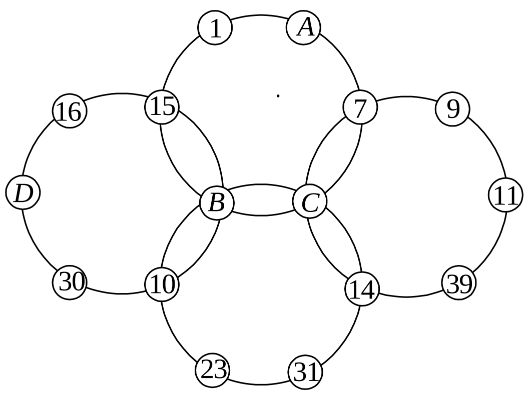
Решение. Ако осум кокопки за една недела снеле 32 јајца, тогаш една кокошка за една недела ќе снеси 4 јајца. Сега, девет кокошки за една недела ќе снесат $9\cdot 4=36$ јајца.

Задача 3. Што има повеќе на цртежот: отсечки или триаголници.



Решение. Бројот на отсечки е 17. Со непосредно броење имаме дека бројот на триаголници е 12. Бидејќи $17>12$, повеќе има отсечки.

Задача 4. Збирот на броевите во секој од дадените четири прстени е 90. Кои броеви се кријат на местата означени со буквите A, B, C и D?



Решение. Од десниот прстен добиваме дека

$$C=90-(7+9+11+39+14)=10$$

Од долниот прстен добиваме дека

$$B=90-(10+14+31+23+10)=2$$

Од левиот прстен добиваме дека

$$D=90-(2+10+30+16+15)=17.$$

Од горниот прстен добиваме дека

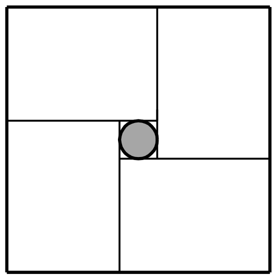
$$A=90-(1+7+10+2+15)=55$$

Задача 5. Најди го збирот на непарните трицифрени броеви чии цифри имаат производ 140.

Решение. Бројот $140=10\cdot14=2\cdot2\cdot5\cdot7$. Следува бараните броеви имаат цифри 4,5 и 7 и тие се 547, 574, 745, 754. Оттука нивниот збир изнесува 547+574+745+754=2620.

V одделение – деветтолетка

Задача 1. Продавница е во форма на квадрат со страна 7 метри. Во продавницата се наоѓа статуа со квадратна основа со страна од 1 метар. Дали може преостанатот дел од продавницата да се покрие со 4 правоаголници со страни 3 и 4 метри (одговорот да се објасни).



Решение. Да можно е, на пример ако статуата се постави во средината на продавницата, а правоаголниците околу неа, како што е прикажано на цртежот.

Задача 2.Тетратка има 100 страници нумерирани од 1 до 100. Од неа се искинати 30 произволно избрани листови, и потоа е пресметан збирот на нумерираните броеви од преостанатите страници. Дали е можно овој збир да биде еднаков на 800?

Решение. Најмалата можна вредност на сумата од нумерираните броеви на неискинатите страници е

$$1+2+3+...+40=820>800$$

Следува не е можно оваа сума да биде 800.

Задача 3. Јане го прашал Филип колку тежела рибата што ја уловил татко му. Филип одговорил: *Главата заедно со опашката има 3kg, главата заедно со трупот има 7kg, а трупот заедно со опашката има 8kg*. Колку тежела рибата?

Решение. *Прв начин.* Ако ги собереме дадените тежини, тогаш во збирот двапати ќе учествуваат тежините и на главата и на опашката и на трупот. Според тоа, тежината на рибата е половина од пресметаниот збир.

Според тоа, ако x е тежината на рибата, тогаш $x=18:2=9$ kg.

Втор начин. Нека G е масата на главата, O е масата на опашката, а T е масата на трупот. Од условите на задачата имаме:

$$G+O=3,\quad G+T=7,\quad T+O=8.$$

Ако собереме леви и десни страни, добиваме:

$$\begin{aligned}&G+O+G+T+T+O=18,\\&2G+2O+2T=18,\\&2(G+O+T)=18.\end{aligned}$$

Оттука $G+O+T=9$, па рибата тежела 9 *kg*.

Задача 4. Една цевка за 3 часа полни $\frac{1}{5}$ од еден базен, а друга за 4 часа $\frac{1}{4}$ од истиот базен, а трета цевка за 6 часа полни $\frac{1}{3}$ од истиот базен. Која цевка го полни базенот најбрзо?

Решение. Првата цевка за 3 часа полни $\frac{1}{5}$ од базенот, па за еден час ќе наполни $\frac{1}{15}$ од базенот, од каде имаме дека целиот базен првата цевка ќе го наполни за 15 часа. Втората цевка за еден час ќе наполни $\frac{1}{16}$ од базенот, па целиот базен ќе биде наполнет за 16 часа. Третата цевка за еден час ќе наполни $\frac{1}{18}$ од базенот, па целиот базен ќе биде наполнет за 18 часа. Значи, првата цевка го полни базенот најбрзо.

Задача 5. Филип за роденден од баба му и дедо му добил 405 денари. Од баба му добил 3 пати повеќе пари од бројот на нејзините години, а од дедо му четири пати повеќе пари од бројот на неговите години. По колку години имаат баба му и дедо му на Филип ако се знае дека дедо му е 5 години постар од баба му.

Решение. Ако баба му на Филип има x години, дедо му има $x+5$ години. За роденденот баба му му дала $3x$ денари а дедо му му дал $4x+20$ денари. Заедно му дале $7x+20$ денари. Според тоа

$$\begin{aligned}&7x+20=405,\\&7x=385,\\&x=385:7=55.\end{aligned}$$

Значи, баба му имала 55 години, а дедому имал 60 години.

V одделение

Задача 1. Жабата има скок долг $50\,\mathrm{cm}$, зајакот $75\,\mathrm{cm}$, а кенгурот $90\,\mathrm{cm}$. Кое е најмалото растојание на кое сите ќе направат цел број на скокови. Колку скока тогаш направило секое од животните?

Решение. Доволно е да се најде најмалиот заеднички содржател на броевите $50, 75$ и 90. Бидејќи $NZS(50,75,90)=450$ најмалото растојание на кое тие ќе направат цел број на скокови е $450\,\mathrm{cm}$. Притоа, жабата ќе направи 9 скока, зајакот 6, а кенгурот 5 скока.

Задача 2. Најди го количникот и остатокот при делењето на изразот

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+75$$

со бројот 35.

Решение. *Прв начин.* Изразот $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+75$ можеме да го запишеме во следниот облик:

$$\begin{aligned}1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+35\cdot2+5&=\\ &=35\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+35\cdot2+5\\ &=35\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+2)+5\end{aligned}$$

Според тоа, бараниот количник е $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+2=13685762$, а остатокот е 5.

Втор начин. Ќе го пресметаме збирот

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+75$$

Притоа добиваме

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+75=479001600+75=479001675.$$

Ако делиме со 35 добиваме

$$\begin{array}{l}479001675:35=13685762\\ \underline{35}\\ 129\\ \underline{\dots\dots}\\ \quad 5\end{array}$$

Според тоа

$$479001675=13685762\cdot35+5.$$

Значи, бараниот количник е 13685762 а остаток е 5.

Задача 3. Нека α и β се два соседни агли такви што нивните симетрали се заемно нормални. Ако се знае дека α е за 30° поголем од β, пресметај колку степени изнесува секој од нив.

Решение. Бидејќи аглите се соседни и нивните симетрали се заемно норнални добиваме дека $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90^\circ$, односно $\alpha+\beta=180^\circ$. Бидејќи знаеме дека α е за 30° поголем од β, добиваме дека $\alpha=\beta+30^\circ$. Ако го замениме ова во $\alpha+\beta=180^\circ$, добиваме $\beta=75^\circ$. Па според тоа $\alpha=105^\circ$.

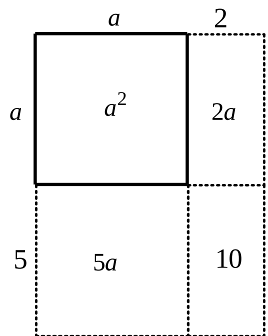
Задача 4. Да се најде природниот број $\overline{abc}$ кој го исполнува условот $\overline{abc}+\overline{bc}+c=687$

Решение. Цифрата на единиците на бројот $\overline{abc}+\overline{bc}+c$ е цифрата на единиците на $c+c+c$, односно $c+c+c$ завршува на 7. Единствена можност е $c=9$. Оттука добиваме дека $100a+20b+27=687$ односно $5a+b=33$. Последната равенка е исполнета ако $a=5$ и $b=8$ или $a=6$ и $b=3$. Значи бараните броеви се 589 и 639.

Задача 5. Ако едната страна на квадратот ја продолжиме за $2\,\mathrm{cm}$, а нејзината соседна страна за $5\,\mathrm{cm}$, тогаш добиваме правоаголник чија што плоштина е за $45\,\mathrm{cm}^2$ поголема од плоштината на квадратот.

Колкава е плоштината на квадратот?

Решение. Нека страната на квадратот има должина a. Правоаголникот кој се добива со продолжувањето на страните на квадратот има страни $a+2$ и $a+5$. Плоштината на квадратот е $a\cdot a$, а на правоаголникот $(a+2)\cdot(a+5)$. Но, правоаголникот всушност е добиен со доцртување на три правоаголници до дадениот квадрат и тоа правоаголници со плоштини $2a, 5a, 2\cdot 5$ (види цртеж) Тогаш вкупното зголемување на плоштината на квадратот е



$$45cm^2=2a+5a+10=(7a+10)\,cm^2.$$

Оттука, $7a=35$, односно страната на квадратот е $a=5cm$.

Плоштината на квадратот изнесува $25cm^2$.

VI одделение

Задача 1. Ако на еден двоцифрен број му се допише цифрата 5 еднаш на почетокот, а другпат на крајот, се добиваат два различни броја чија разлика е 252. Кој е тој двоцифрен број?

Решение. Нека бараниот двоцифрен број го означиме со $\overline{xy}=10x+y$. Тогаш од условот на задачата имаме две можности :

а) $\overline{5xy}-\overline{xy5}=252$, од каде што добиваме:

$$\begin{aligned} &5\cdot 100+x\cdot 10+y-(x\cdot 100+y\cdot 10+5)=252 && \Leftrightarrow\\ &500+10x+y-100x-10y-5=252 && \Leftrightarrow\\ &243=90x+9y && \Leftrightarrow\\ &27\cdot 9=9(10x+y) && \Leftrightarrow\\ &27=10x+y \end{aligned}$$

Значи бараниот број е 27.

б) Втората можност е $\overline{xy5}-\overline{5xy}=252$, од каде со постапка аналогна со претходниот случај добиваме дека $10x+y=83$.

Конечно, бараните двоцифрени броеви се 27 и 83.

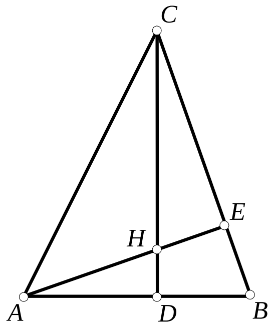
Задача 2. Една слаткарница добила нарачка да направи извесен број на слатки за три дена. Првиот ден направила $\frac{2}{5}$ од нарачаните слатки, вториот ден направила $\frac{5}{9}$ од остатокот од нарачката а третиот ден ги направила преостанатите 40 слатки од нарачката. Колку слатки биле нарачани во слаткатницата?

Решение. Нека со x го означиме бројот на нарачаните слатки. Тогаш првиот ден се направени $\frac{2}{5}x$ од слатките, вториот ден се направени $\frac{5}{9}(x-\frac{2}{5}x)$, а третиот ден се направени 40 слатки . Значи,

$$\frac{2}{5}x+\frac{5}{9}(x-\frac{2}{5}x)+40=x.$$

Со решавање на оваа равенка се добива дека бројот на нарачани слатки е $x=150$.

Задача 3. Даден е остроаголен триаголник ABC. Неговите висини AE и CD се сечат во точката H, при што $\overline{AB}=\overline{CH}$. Пресметај го аголот $\measuredangle ACB$.

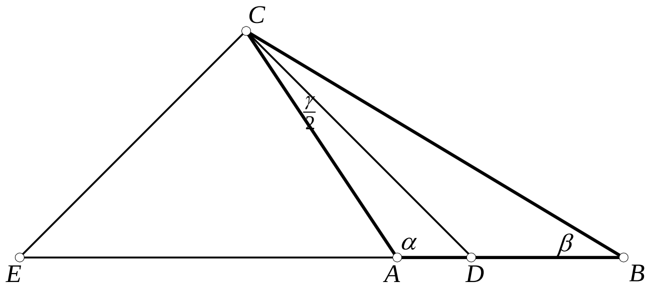


Решение. Бидејќи $\measuredangle EAB = \measuredangle BCD$ (агли со нормални краци), триаголниците ABE и CHE се складни (според признакот АСА). Сега $\overline{CE} = \overline{AE}$, односно триаголникот AEC е рамнокрак правоаголен. Според тоа,

$$\measuredangle BAC = \measuredangle ECA = 45^\circ .$$

Задача 4. Нека во триаголникот ABC, разликата на аглите α и β е 90° степени. Симетралата на внатрешниот агол γ при темето C ја сече спротивната страна AB во точката D, а симетралата на надворешниот агол при темето C го сече продолжението на страната AB, во точката E. Докажи дека триаголникот EDC е рамнокрак.

Решение. Според ознаките на цртежот имаме дека



$$\measuredangle CDE = 180^\circ - \alpha - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \alpha - \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = \frac{180^\circ - \alpha + \beta}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Бидејќи краците на аголот DCE се симетрали на суплементни агли, следува $\measuredangle DCE = 90^\circ$. Бидејќи збирот на внатрешните агли на триаголникот EDC е 180°, следува дека $\measuredangle CED = 45^\circ$. Значи триаголникот EDC е рамнокрак .

Задача 5. Во слаткарницата *Кокос* има масички и столови групирани во комплети на следниов начин: неколку комплети од една маса со четири ногарки и четири стола со три ногарки , неколку комплети од една маса со три ногарки и четири стола со четири ногарки. Вкупниот број на ногарки е 264. Колку деца можат да седнат во слаткарницата?

Решение. Нека бројот на комплети од првиот тип го означиме со a, а на вториот со b. Вкупниот број на ногарки од првиот тип е 4+4·3=16, а од вториот е 3+4·4=19. Сега, за вкупниот број ногарки ја формираме равенката $16a+19b=264$.Оттука, $19b=264-16a=8(33-2a)$. Од тоа што 8 ја дели десната страна на последното равенство, јасно е дека мора да ја дели и левата страна. Но 19 не се дели со 8, па останува 8 да е делител на y, односно $b\in\{8,16,24,...\}$. Притоа $19b\le 264$. Јасно, тогаш $b=8$, а $a=7$. Следува дека бројот на слободни места во слаткарницата е 15·4=60.

VII одделение

Задача 1. Докажи дека бројот

$$19991999+19991998\cdot 19991999\cdot 19992000$$

е куб на цел број!

Решение. *Прв начин.* За изразот

$$A=19991999+19991998\cdot 19991999\cdot 19992000$$

имаме

$$\begin{aligned}A&=19991999(1+19991998\cdot 19992000)\\&=19991999\cdot[1+(19991999-1)(19991999+1)]\\&=19991999\cdot[1+19991999^2-1]\\&=19991999^3.\end{aligned}$$

Втор начин. Ќе воведеме ознака $n=19991999$. Тогаш

$$A=19991999+19991998\cdot 19991999\cdot 19992000$$

може да се запише во облик

$$A=n+(n-1)n(n+1)=n+n(n^2-1)=n+n^3-n=n^3$$

Значи,

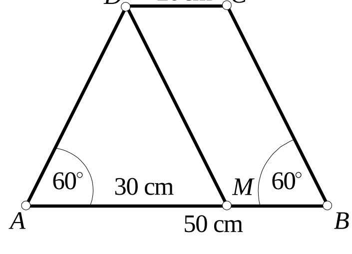
$$A=19991999+19991998\cdot 19991999\cdot 19992000$$

е полн куб за $n=19991999$.

Задача 2. Еден рамнокрак трапез има основи $\overline{AB}=50$ cm, $\overline{CD}=20$ cm и агол $\measuredangle BAD=60^\circ$. Најди го периметарот на трапезот.

Решение. Нека $DM\parallel BC$.Триаголникот AMD е рамностран затоа што неговите агли се $\measuredangle AMD=60^\circ$, $\measuredangle ABC=60^\circ$ и $\measuredangle BAD=60^\circ$. Затоа отсечките AD и AM се со должина 30 cm. За периметарот се добива

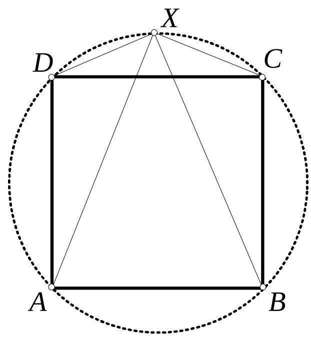
$$L=50+20+2\cdot 30=130 \text{ cm}.$$



Задача 3. Околу квадртот $ABCD$ е опишана кружница. Докажи дека за произволна точка X од кружницата е точно равенството

$$\overline{XA}^2 - \overline{XB}^2 = \overline{XC}^2 - \overline{XD}^2 .$$

Решение. Триаголниците XAC и XBD се правоаголни (според Талесова теорема), па според тоа



$$\overline{XA}^2 + \overline{XC}^2 = 4R^2 = \overline{AC}^2,$$
$$\overline{XB}^2 - \overline{XD}^2 = 4R^2 = \overline{BD}^2$$

каде R е радиусот на опишаната кружница. Сега лесно се добива равенството

$$\overline{XA}^2 - \overline{XB}^2 = \overline{XC}^2 - \overline{XD}^2 .$$

Ако пак X е едно од темињта, на пример A, тогаш

$$-\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 ,$$

односно

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 ,$$

што всушност е Питагорина теорема. Аналогна е дискусијата и за останатите три темиња.

Задача 4. Докажи дека дропката $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$ е нескратлива за секој цел број a.

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11} = \frac{a^2+3}{a^4+6a^2+9+a^2+2} = \frac{a^2+3}{(a^2+3)^2+(a^2+3)-1} .$$

Нека броителот a^2+3 е делив со некој цел број k. Тогаш именителот на дропката не се дели со k, бидејќи $(a^2+3)^2$ и (a^2+3) се делат со k, но 1 не се дели со k, односно именителот дава остаток 1 при делењето со k. Значи броителот и именителот немаат заеднички делител различен од 1, па дропката е нескратлива.

Втор начин. Ако именителот на дропката го поделиме со a^2+3, добиваме количник a^2+4 и остаток -1. Според тоа, дропката можеме да ја запишеме да ја запишеме во облик

$$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}=\frac{a^2+3}{(a^2+3)(a^2+4)-1}.$$

Нека броителот a^2+3 е делив со некој цел број k. Тогаш именителот на дропката не се дели со k, бидејќи $(a^2+3)(a^2+4)$ се дели со k, но -1 не се дели со k, односно именителот дава остаток $k-1$ при делењето со k. Значи броителот и именителот немаат заеднички делител различен од 1, па дропката е нескратлива.

Задача 5. Нека p, $p-10$ и $p+10$ се прости броеви. Докажи дека $p-2$ е исто така прост број.

Решение. Нека p е прост број кој ги исполнува условите од задачата. Тогаш од равенствата

$$p-10=p-1-9,$$
$$p+10=p+1+9,$$

забележуваме дека остатокот од делењето со 3 на $p-10$ е ист како остатокот од делењето на $p-1$ со 3, како и остатокот од делењето со 3 на $p+10$ е ист остатокот од делењето на $p+1$ со 3.

Еден од броевите $p-1, p, p+1$ е делив со 3 (три последователни броеви) . Според тоа, еден од броевите $p-10, p, p+10$ е делив со 3.

Но сега, од условот на задачата имаме $p-10=3$, односно $p=13$. Сега $p-2=11$ е исто така прост број.

VIII одделение

Задача 1. Најди ги сите природни броеви *n* така што сумата

$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+\ldots+1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n$$

е точен квадрат.

Решение. За $n=2,3,4,5$ имаме:

$$1+1\cdot 2=3,$$
$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3=9,$$
$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=33,$$
$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=153$$

Секој нареден природен број од облик $1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+\ldots+1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n$ завршува на 3 бидејки бројот $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n$ ги содржи 2 и 5 како множители од каде ќе завршува на нула. Но квадрат на природен број не може да завршува на 3 па решение на задачата се броевите 1 и 3.

Задача 2. Ако $a+b+c=0$, тогаш $\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1$. Докажи!

Решение. Во првиот член од равенството a го заменуваме со $-b-c$ и добиваме

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}=\frac{(b+c)^2}{2(b+c)^2+bc}=\frac{(b+c)^2}{2b^2+2c^2+5bc}=\frac{(b+c)^2}{(2b+c)(b+2c)}.$$

Меѓутоа $\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{b+2c}=\frac{3(b+c)}{(2b+c)(b+2c)}$, па затоа

$$\frac{(b+c)^2}{(2b+c)(b+2c)}=(b+c)\frac{b+c}{(2b+c)(b+2c)}=\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{2b+c}+\frac{b+c}{b+2c}\right).$$

Во последното равенсто повторно користиме $a+b+c=0$ и добиваме

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}=\frac{(b+c)^2}{(2b+c)(b+2c)}=\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{b-a}+\frac{b+c}{c-a}\right).$$

Аналогно добиваме

$$\frac{b^2}{2b^2+ac}=\frac{1}{3}\left(\frac{a+c}{a-b}+\frac{a+c}{c-b}\right) \quad \text{и} \quad \frac{c^2}{2c^2+ab}=\frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{a-c}+\frac{a+b}{b-c}\right).$$

Ако ги собереме последните три равенства добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}&=\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{b-a}+\frac{b+c}{c-a}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{a+c}{a-b}+\frac{a+c}{c-b}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{a-c}+\frac{a+b}{b-c}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{b+c-a-c}{b-a}+\frac{b+c-a-b}{c-a}+\frac{a+c-a-b}{c-b}\right)\\&=\frac{1}{3}(1+1+1)=1.\end{aligned}$$

Задача 3. Три девојчиња Ана, Марија и Елена во шумата собрале 770 костени и одлучиле да си ги поделат меѓу себе пропорционално на своите години. Секој пат кога Марија зела 4 костени, Ана зела 3, а на секои 6 што ги зелаМарија, Елена зела 7 костени. Колку години има секое девојче ако заедно имаат 35 години? По колку костени припаднало на секоја од нив?

Решение. Нека a се годините на Ана, m се годините на Марија, а e се годините на Елена. Па според тоа, $a+m+e=35$. Годините се однесуваат како костените и тоа:

$$m:a=4:3,\quad m:e=6:7$$

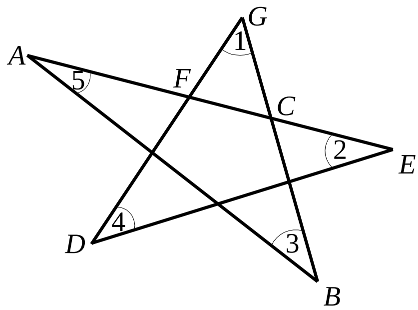
$$a=\frac{3}{4}m,\quad e=\frac{7}{6}m$$

Сега,

$$m+\frac{3}{4}m+\frac{7}{6}m=35$$
$$\frac{12m+9m+14m}{12}=35$$
$$\frac{35}{12}m=35$$
$$m=12,\quad a=\frac{3}{4}\cdot 12=9,\quad e=\frac{7}{6}\cdot 12=14$$

Бидејќи $770:35=22$, следува дека на Марија и припаднале $22\cdot 12=264$ костени, на Ана $22\cdot 9=198$ костени, а на Елена $22\cdot 14=308$ костени.

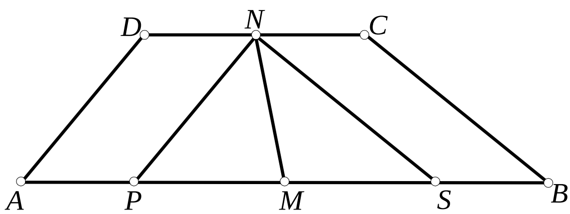
Задача 4. Дадена е ѕвезда како на цртежот. Колку е збирот на аглите
$$\measuredangle 1+\measuredangle 2+\measuredangle 3+\measuredangle 4+\measuredangle 5.$$



Решение. Од триаголникот $\triangle ABC$ имаме
$$\measuredangle 3+\measuredangle 5=\measuredangle FCG.$$
Од триаголникот $\triangle DEF$ имаме
$$\measuredangle 2+\measuredangle 4=\measuredangle CFG.$$
Од триаголникот $\triangle FCG$ имаме
$$180^\circ=\measuredangle 1+\measuredangle FCG+\measuredangle CFG=\measuredangle 1+\measuredangle 3+\measuredangle 5+\measuredangle 2+\measuredangle 4$$

Задача 5. Даден е трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB}=16$ cm, $\overline{CD}=8$ cm. Збирот на аглите ABC и BAD е 90°. Ако M и N се средини на страните AB и CD соодветно, пресметај ја должината на отсечката MN.

Решение. Нека P и S се точки на страната AB такви што $NP\parallel AD$ и $NS\parallel BC$. Триаголникот PNS е правоаголен, со прав агол во темето N затоа што



$$\measuredangle PSN+\measuredangle SPN=\measuredangle ABC+\measuredangle BAD=90^\circ$$
MN е тежишна линија кон хипотенузата и затоа
$$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{PS}=\frac{1}{2}(16-4-4)=4.$$