XXXVIII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Бројот на недели со непарен датум во еден месец е непарен број, а бројот на сите останати денови во тој месец, кои имаат непарен датум е парен број. Во кој ден од седмицата е 29-ти од тој месец? Дали тој месец може да биде март?

Решение. Јасно е дека првата недела од месецот мора да биде број од 1 до 7-ми. Притоа непарен број непарни датуми кои се недела, се можни ако неделата е 1-ви или 3-ти од месецот. Ако првата недела од месецот е на 3-ти, тогаш следните недели се 10, 17, 24 и 31. Значи сите останати денови од тој месец со непарен датум се 1, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 21, 23, 25, 27 и 29, т.е. 13 но тоа не е парен број. Според тоа бараниот месец ќе започне во недела, т.е. недели се: 1, 8, 15, 22 и 29, а сите други денови со непарен датум се: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25 и 27 кои се вкупно 12. Заради ова месецот мора да започне во недела и да има 30 дена или да е февруари во престапна година. Конечно, 29-ти од тој месец е во недела и тој месец не може да биде март бидејќи март има 31 ден.

Задача 2. Цевка со должина $5m$ е поделена на еднакви делови со 4 сечења. Од секој дел е формиран правоаголник таков што должината е четирипати поголема од ширината. Колку cm изнесува должината на правоаголнкот?

Решение. Со 4 сечења од цевката се добиваат пет дела, секој со должина $5:5=1m$. Од тоа што должината е четири пати поголема од ширината значи дека должината и ширината прават заедно пет еднакви дела. Од тоа што периметарот на секој правоаголник е 1 метар се добива дека еден дел изнесува $1m=100cm:10=10cm$. Конечно должината на правоаголникот изнесува $40cm$.

Задача 3. За призмата која има 7 ѕидови одреди го бројот на рабови и темиња. Запиши го равенството кое важи меѓу бројот на темиња, рабови и ѕидови за било која призма и потоа провери го дека важи за дадената призма.

Решение. Бројот на рабови на призмата со 7 ѕидови е 15, а бројот на темиња 10. Равенството гласи:

$$Sидови\ (S)+Темиња\ (T)=Рабови\ (P)+2.$$

Дека ова равенство важи за дадената призма, се гледа од следниот израз:

$$7+10=15+2.$$

Задача 4. Збирот на сите страни на два квадрати е 96 cm. Ако страната на едниот квадрат е три пати поголема од страната на другиот квадрат, тогаш пресметај ги должините на страните на двата квадрати.

Решение. *Прв начин*. Бидејќи страната на поголемиот квадрат е три пати поголема од страната на помалиот квадрат збирот на по една страна одф двата квадрати е четири пати поголем од страната на помалиот квадрат. Но, квадратот има четири страни, па затоа збирот на страните на двата квадрати е $4\cdot 4=16$ пати поголем од страната на помалиот квадрат. Значи, страната на помалиот квадрат е $96:6=16cm$. Тогаш страната на поголемиот квадрат е $6\cdot 3=18cm$.

Втор начин. нека x е должината на страната на помалиот квадрат. Тогаш должината на страната на поголемиот квадрат е $3x$, па зато

$$4x+4\cdot 3x=96,\ \text{т.е.}\ x=6cm.$$

Значи, страната на помалиот квадрат е $6cm$, а страната на поголемиот квадрат е $3\cdot 6=18cm$.

V одделение

Задача 1. Над секоја страна на даден правоаголник, надвор од него, конструираме рамностран триаголник. Да се пресмета периметарот на добиената фигура ако периметарот на правоаголникот е $72cm$.

Решение. При конструирање на рамностраните триаголници секоја страна на правоаголникот ја заменуваме со две страни со иста должина. Според тоа, периметарот на добиената фигура е двапати поголем од периметарот на правоаголникот, т.е. $L=2\cdot 72=144cm$.

Задача 2. Растојанието меѓу телефонските столбови на една улица долга $1600m$, било $80m$. Заради садење нови дрвца на улицата, столбовите биле разместени така што новото растојание меѓу столбовите е $50m$. Колку столбови по разместувањето останале на истото место?

Решение. Бидејќи $NZS(50,80)=400$, а првиот столба останува на своето место се добива дека неразместени столбови ќе има вкупно $1+1600:400=1+4=5$ столба.

Задача 3. Даден е рамностран триаголник со плоштина $6cm^2$. Над секоја негова страна е конструиран рамностран триаголник. Да се пресмета плоштината на добиената фигура.

Решение. При конструкцијата, над секоја страна на рамностран триаголник конструираме рамностран триаголник со страна со иста должина како страната на триаголник, што значи дека додаваме нов рамностран триаголник кој има иста плоштина како почетниот рамностран триаголник. Значи, добиената фигура се состои од четири рамнострани триаголници еднакви на почетниот рамностран триаголник. Затоа плоштината на добиента фигура е четири пати поголем од плоштината на рамностраниот триаголник, т.е. $P = 4 \cdot 6 = 24cm^2$.

Задача 4. Производот на три природни броја е 240. Производот на првиот и вториот број е 60, а производот на првиот и третиот број е 24. Кои се тие броеви ?

Решение. Нека бараните броеви се a, b и c. Од условот на задачата следува дека

$$a \cdot b \cdot c = 240, a \cdot b = 60, a \cdot c = 24.$$

Тогаш од $(a \cdot b) \cdot c = 240$ и $a \cdot b = 60$ имаме $60 \cdot c = 240$ односно $c = 4$. Заради $a \cdot c = 24$ добиваме $a = 24 : 4 = 6$. Сега, бидејќи $a \cdot b = 60$ добиваме $b = 60 : 6 = 10$

Конечно, бараните броеви се 4, 5 и 10.

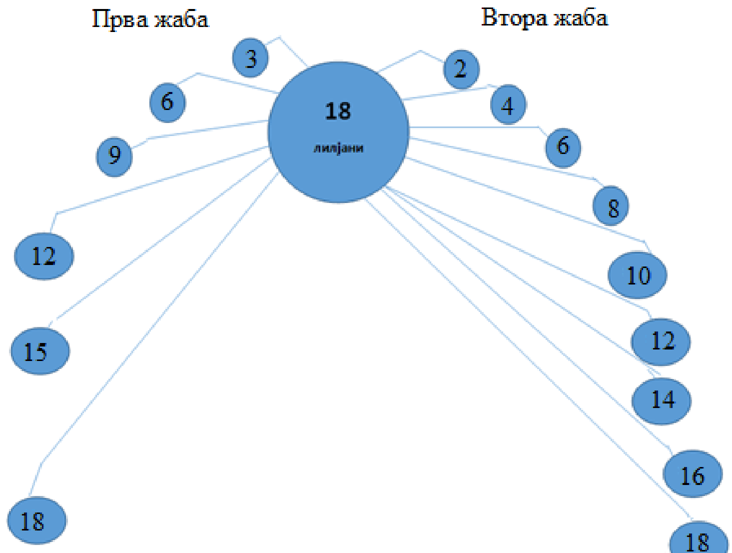
VI одделение

Задача 1. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 3 *dm*. Пресметај го неговиот крак *b*, ако неговата основа е страна на рамностраниот триаголник со периметаар 18 *cm*.

Решение. Должината на страната на рамностран триаголник со периметар $18cm$ е $18 : 3 = 6cm$. Значи, основата на рамнокракиот триаголник е $a = 6cm$. Сега, ако со b го означиме кракот на рамнокракиот триаголник, тогаш неговиот периметар е $L = a + 2b$, па бидејќи $a = 6cm$ и $L = 3dm = 30cm$, добиваме $30 = 6 + 2b$, т.е. $b = (30 - 6) : 2 = 12cm$.

Задача 2. Две жаби во исто време го напуштаат брегот. Се движат по патека од 18 лилјани (барско растение). Првата скока на секој трет лилјан, а втората на секој втор лилјан. На колку исти лилјани ќе скокнат двете жаби и кои се тие?

Решение. *Прв начин.* Првата жаба ќе скокне на лилјаните 3, 6, 9, 12, 15 и 18, а втората жаба ќе скокне на лилјаните 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 и 18 (види цртеж). Според тоа, двете жаби на исти лилјани ќе сконат три пати и тоа на лилјаните со редни броеви 6, 12 и 18.



Втор начин. Двете жќаби ќе скокнат на ист лилјан ако неговиот редн бро е делив со 2 и со 3, т.е. ако е содржател на 2 и 3. Бидејќи $NZS(2,3)=6$ и $18:NZS(2,3)=18:6=3$, заклучуваме дека двете жаби 3 пати ќе скокнат на сит лијан и тоа на лилјани со редни броеви 6, 12 и 18.

Задача 3. Ако бројот 860 се подели со некој број, се добива остаток 9 и ако бројот 1200 се подели со истиот број се добива остаток 16. Определи ги соодветните количници?

Решение. Нека x е бројот со кој се делат броевите 860 и 1200, и нека k_1 е количникот кој се добива при делење на 860 со x, а k_2 е количникот при делење на 1200 со x. Имаме,

$$860 = xk_1 + 9$$
$$xk_1 = 851$$

и

$$1200 = xk_2 + 13$$
$$xk_2 = 1184.$$

Според тоа, x е заеднички содржател на 851 и 1184, кој е поголем од 16. Но,

$$\begin{aligned}\mathrm{NZD}(851,1184) &= \mathrm{NZD}(1184-851,851) = \mathrm{NZD}(333,851)\\ &= \mathrm{NZD}(333,851-333) = \mathrm{NZD}(333,518)\\ &= \mathrm{NZD}(333,518-333) = \mathrm{NZD}(333,185)\\ &= \mathrm{NZD}(333-185,185) = \mathrm{NZD}(148,185)\\ &= \mathrm{NZD}(148,185-148) = \mathrm{NZD}(148,37) = 37,\end{aligned}$$

бидејќи $37\,|\,148=37\cdot 4$. Според тоа,

$$860=37\cdot 23+9 \text{ и } 1200=37\cdot 32+16,$$

што значи дека количникот при делење на 860 со 37 е 23, а при делење на 1200 со 37 е 32.

Задача 4. Страните на еден правоаголен триаголник се последователни природни броеви. Периметарот на правоаголниот триаголник е 12 *dm*. Над секоја страна од триаголникот е конструиран квадрат. Одреди ја плоштината на добиената фигура.

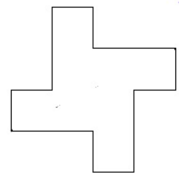
Решение. Нека страните на триаголникот се последователните природни броеви $n-1, n, n+1$. Тогаш $n-1+n+n+1=13$, па затоа $n=4\,dm$. Според тоа, должините на страните на триаголникот се 3 *dm*, 4 *dm* и 5 *dm*. Плоштината на правоаголниот триаголникот е еднаква на половина од плоштината на правоаголникот со страни 3 *dm* и 4 *dm*, што значи дека таа еднаква на $(3\cdot 4):2=6\,dm^2$. Плоштините на конструираните квадрати се еднакви на $3\cdot 3=9\,dm^2, 4\cdot 4=16\,dm^2$ и $5\cdot 5=25\,dm^2$. Конечно, плоштината на добиената фигура е еднаква на $6+9+16+25=56\,dm^2$.

VII одделение

Задача 1. Еден шестцифрен број завршува на цифрата 5. Ако таа цифра се премести на почетокот на бројот, т.е. се избрише од крајот и се допише на почетокот на бројот, тогаш новодобиениот број ќе биде 4 пати поголем од почетниот број. Одреди го почетниот број.

Решение. Нека со x го означиме петцифрениот почеток на почетниот број, односно почетниот број е еднаков на $10x+5$. Новодобиениот број може да се запише $500000+x$, а од условот на задачата се запишува равенката $4(10x+5)=500000+x$. Со решавање на равенката се добива дека $x=128200$. Значи, почетниот број е 128205.

Задача 2. Фигурата на цртежот е составена од 4 складни правоаголници, кај кои едната страна е два пати подолга од другата. Пресметај го периметарот на оваа фигура, ако нејзината плоштина е $72cm^2$.

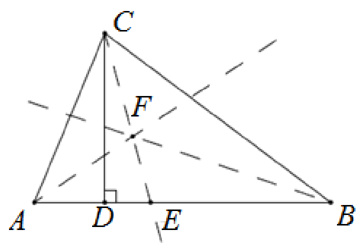


Решение. Ако плоштината на фигурата $72cm^2$, тогаш плоштината на секој правоаголник е $18cm^2$. Бидејќи едната страна е два пати подолга од другата имаме $2a \cdot a = 18$, т.е. $a = 3cm$. Значи, страните на правоаголникот се $3cm$ и $6cm$. Конечно, периметарот на дадената фигура е

$$8a + 4 \cdot 2a = 16a = 48\,cm.$$

Задача 3. Во триаголникот ABC симетралите на аглите во темињата A и B се сечат под агол 140°. Висината и симетралата повлечени од аголот во темето C формираат агол од 20°. Одреди ги аглите во триаголникот.

Решение. Од триаголникот ABF имаме дека $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 140^\circ = 180^\circ$, т.е. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 40^\circ$. Од тука $\alpha + \beta = 80^\circ$, па $\gamma = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. Бидејќи $\angle ECA = \frac{\gamma}{2} = 50^\circ$ и аголот што го формираат симетралата и висината повлечени од темето C следи дека



$$\angle DCA = \angle ECA - \angle ECD = 30^\circ.$$

Од правоаголниот триаголник ADC се добива дека

$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ.$$

Збирот на аглите во еден триаголник е 180° од каде следи дека

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 20^\circ.$$

Задача 4. Во спортска продавница патиките се продавале за 900 ден. поефтино од тренерката. На акција патиките биле намалени за 10% а тренерката за 5%. Габи купила патики и тренерка на намаление и за нив платила вкупно 5480 ден. Колку чинеле патиките, а колку тренеркатапред намалувањето?

Решение. Цената на патиките пред намалувањето била p, а на тренерките била $p + 900$. По намалувањето важи:

$$\frac{90}{100}p + \frac{95}{100}(p + 900) = 5480.$$

Од овде, патиките пред намалувањето чинеле 2500 денари, а тренерката 3400 денари.

VIII одделение

Задача 1. На таблата се запишани два цели броеви чиј збир е делив со седум. Третиот број е еднаков на разликата на првиот и вториот, четвртиот – на разликата на вториот и третиот, петтиот – на разлика на третиот и четвртиот итн. Докажи дека збирот од квадратите на првите седум броја добиени на претходно опишаниот начин е делив со седум.

Решение. Нека првите два членови на низата се $a_1 = x, a_2 = y$. Нивниот збир е делив со 7, значи постои цел број kза кој важи $x + y = 7k$. За останатите броеви добиваме:

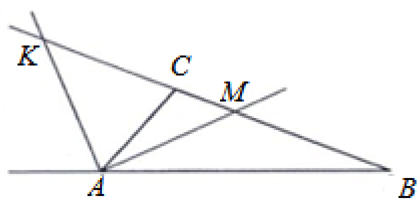
$$a_3 = a_1 - a_2 = x - y,$$
$$a_4 = a_2 - a_3 = 2y - x,$$
$$a_5 = a_3 - a_4 = 2x - 3y,$$
$$a_6 = a_4 - a_5 = 5y - 3x,$$
$$a_7 = a_5 - a_6 = 5x - 8y.$$

Имаме:

$$\begin{aligned} & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = \\ & = x^2 + y^2 + (x-y)^2 + (2y-x)^2 + (2x-3y)^2 + (5y-3x)^2 + (5x-8y)^2 \\ & = 41x^2 - 128xy + 104y^2 \\ & = (42x^2 - 126xy + 105y^2) - (x^2 + 2xy + y^2) \\ & = 7(6x^2 - 18xy + 15y^2) - (x+y)^2 \\ & = 7(6x^2 - 18xy + 15y^2) - 49k^2 \\ & = 7(6x^2 - 18xy + 15y^2) - 7k^2) \end{aligned}$$

од што следува тврдењето на задчата.

Задача 2. Во триаголникот ABC внатрешниот агол кај темето A е 50°. Симетралите на внатрешниот и надворешниот агол кај темето A ја сечат BC во точките M и K, соодветно. Пресметај ги аглите на триаголникот



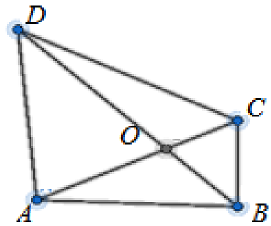
ABC ако триаголникот AMK е рамнокрак.

Решение. Аголот MAK е прав агол, па $\measuredangle AMK = \measuredangle MKA = 45^{\circ}$. Од триаголникот ACM имаме $\measuredangle ACM = 180^{\circ} - 45^{\circ} - 25^{\circ} = 110^{\circ}$, а од триаголникот ABC се добива дека $\measuredangle ABC = 180^{\circ} - 50^{\circ} - 110^{\circ} = 20^{\circ}$.

Задача 3. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ дијагоналите се сечат во точка O. Ако триаголниците AOB и COD имаат еднакви плоштини тогаш четириаголникот $ABCD$ е трапез или паралелограм. Докажи!

Решение. Да забележиме дека

$P_{ABD} = P_{AOB} + P_{AOD} = P_{COD} + P_{AOD} = P_{ACD}$ (*)



Триаголниците ABD и ACD имаат заедничка страна AD, па од $(*)$ следува дека имаат еднакви висини спуштени кон AD (од B и C соодветно). Значи, точките B и C се на исто растојание од правата AD. Бидејќи точките се на иста страна од правата AD следува дека $BC \| AD$

Задача 4. Пресметај: $\frac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 6^7}{8^9 \cdot 10^{11}} : 0{,}015^7$.

Решение. Имаме:

$$\frac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 6^7}{8^9 \cdot 10^{11}} : 0{,}015^7 = \frac{2^3 \cdot (2^2)^5 \cdot 6^7}{(2^3)^9 \cdot 10^{11}} : (\frac{15}{1000})^7 = \frac{2^{13}}{2^{27} \cdot 10^{11}} \cdot (\frac{6 \cdot 1000}{3 \cdot 5})^7$$

$$= \frac{1}{2^{14} \cdot 10^{11}} \cdot 400^7 = \frac{1}{2^{14} \cdot 10^{11}} \cdot 4^7 \cdot 100^7$$

$$= \frac{1}{2^{14} \cdot 10^{11}} \cdot 2^{14} \cdot 10^{14} = 10^3 = 1000.$$

IX одделение

Задача 1. За природните броеви a,b,c,d е познато дека

$$ac + ad + bc + db = 68 \text{ и } c + d = 4.$$

Пресметај ја вредноста на изразот $a+b+c+d$.

Решение. Од $ac+ad+bc+db=68$ добиваме дека

$$a \cdot (c+d) + b \cdot (c+d) = 68$$

односно

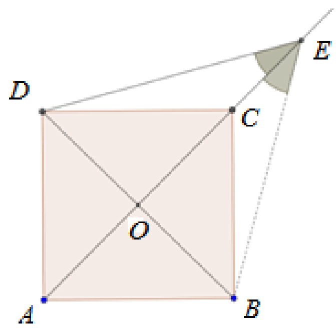
$$(a+b) \cdot (c+d) = 68.$$

Од тоа што $c+d=4$ дибиваме $4(a+b)=68$.Значи, $a+b=17$. Според тоа, $a+b+c+d=17+4=21$.

Задача 2. Даден е квадрат $ABCD$. На продолжението на дијагоналата AC е избрана точка E така што $\overline{DE}=\overline{AC}$. Одреди ја големината на аголот DEC.

Решение. Нека точката O е пресекот на дијагоналите. Тогаш имаме дека $\overline{BO}=\overline{DO}$. Од условот на задачата имаме дека $\overline{DE}=\overline{AC}$. Од тоа што $ABCD$ е квадрат имаме дека $\overline{BD}=\overline{AC}$. Значи,

$$\overline{BD}=\overline{DE} \qquad (1)$$



Од друга страна имаме дека отсечката BE е слика на отсечката DE при осна симетрија во однос на правата AC. Така добиваме дека

$$\overline{BE}=\overline{DE} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) заклучуваме дека триаголникот BED е рамностран. Значи $\angle BED=60^\circ$. Од складноста на триаголниците BOE и DOE имаме дека $\angle DEO=\angle BEO=30^\circ$. Значи, $\angle DEC=\angle DEO=30^\circ$.

Задача 3. Одреди ги природните броеви a, b и c кои ги исполнуваат релаци-ите:

$$a^2+ab+ac=20,$$

$$ab+b^2+bc=30 \text{ и}$$

$$ac+bc+c^2=50.$$

Решение. Дадените релации ги запишуваме во облик

$$a(a+b+c)=20,$$

$$b(a+b+c)=30 \text{ и}$$

$$c(a+b+c)=50.$$

Со нивно собирање добиваме

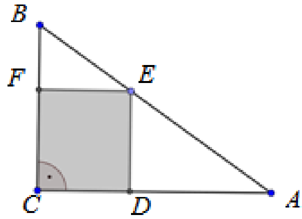
$$a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)=100,$$

$$(a+b+c)(a+b+c)=100, \text{ т.е.}$$

$$(a+b+c)^2=100.$$

Имајќи во предвид дека a, b и c се природни броеви, оттука следува дека $a+b+c=10$. Од ова равенство и дадените услови во задачата до-биваме дека бараните броеви се $a=2$, $b=3$ и $c=5$.

Задача 4. Пресметај ја плоштината на квадратот впишан во правоаголен триаголник со хипотенуза $13cm$ и катета $5cm$.



Решение. Нека $c=13$, $a=5$, тогаш од Питагоровата теорема имаме $5^2+b^2=13^2$ односно $b^2=144$. Така добиваме дека $b=12$. Нека $E\in AB$, $D\in AC$ и $F\in BC$ се такви што $CDEF$ е квадрат. Од сличноста на триаголниците AED и EBF ја добиваме пропорцијата $(12-x):x=x:(5-x)$. На тој начин имаме $(12-x)\cdot(5-x)=x^2$ од каде се добива дека $x=\frac{60}{17}$. Од формулата за плоштина на квадрат добиваме дека $P=x^2=\frac{3600}{289}$.