JMMO 2003

1. Докажи дека за секој природен број n бројот 7^n-1 не е делив со бројот 6^n-1.

Решение. Нека постои природен број n таков што $6^n-1|7^n-1$. Од

$$6^n-1=(6-1)(6^{n-1}+6^{n-2}+...+6+1)=5A$$

следува дека $5|7^n-1$. Бидејќи 7^n-1 е парен број и $5|7^n-1$ заклучуваме дека цифрата на единиците на 7^n-1 е 0. Последното значи дека цифрата на единиците на 7^n е 1, а тоа е можно само за $n=4k, k\in\mathbb{N}$. Според тоа,

$$6^n-1=(6^2)^{2k}-1=(36)^{2k}-1=(36-1)(36^{2k-1}+36^{2k-2}+...+1)=7\cdot 5B,$$

односно $7|6^n-1$ и како $6^n-1|7^n-1$, добиваме $7|7^n-1$, што е противречност.

2. Во неколку кесиња се ставени 2003 денари, а кесињата се ставени во неколку џебови. Познато е дека бројот на сите кесиња е поголем од бројот на денарите во секој џеб. Дали е точно дека бројот на сите џебови е поголем од бројот на денарите во некое кесе?

Решение. Нека n е бројот на кесињата и m е бројот на џебовите. Ако со a_k го означиме бројот на денарите во $k-$тото кесе, $k=1,2,...,n$, а со b_i бројот на денарите во $i-$тиот џеб, $i=1,2...,m$, тогаш од условот на задачата следува

$a_1+a_2+...+a_n=2003, b_1+b_2+...+b_m=2003$ и $n>b_i$, за $i=1,2...,m$. (1)

Нека претпоставиме дека за секој $k=1,2,...,n$ важи $m\le a_k$. Тогаш

$$nm\le a_1+a_2+...+a_n=2003. \qquad (2)$$

Од друга страна, од (1) следува

$$mn>b_1+b_2+...+b_m=2003. \qquad (3)$$

Сега, од (2) и (3) добиваме $mn\le 2003<mn$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $m>a_k$ за некој $k\in\{1,2,...,n\}$, што значи дека бројот на сите џебови е поголем од бројот на денарите во некое кесе.

3. Даден е триаголник ABC. Нека a е неговата најдолга страна, h е него-

вата најкратка висина, а R и r се радиусите на опишаната и впишаната кружница за $\triangle ABC$. Докажи дека $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$.

Решение. Нега должините на страните на триаголникот се a,b,c, s е неговиот пулопериметар и P е неговата плоштина. Од равенствата $R=\frac{abc}{4P}$, $r=\frac{P}{s}$ и $2P=ah$ и неравенствата $\frac{bc}{2}\geq P$ и $b+c>a$ следува

$$\frac{R}{r}=\frac{\frac{abc}{4P}}{\frac{P}{s}}=\frac{abcs}{4P^2}\geq\frac{2aPs}{4P^2}=\frac{a(a+b+c)}{4P}>\frac{a(a+a)}{4P}=\frac{2a^2}{2ah}=\frac{a}{h}.$$

4. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+x}+\frac{z^2}{1+x}\leq 1.$$

Решение. Од $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ и $0\leq z\leq 1$ следува $x\leq 1+y, y\leq 1+z,$ и $z\leq 1+x$, односно

$$\frac{1}{1+y}\leq\frac{1}{x}, \frac{1}{1+z}\leq\frac{1}{y}, \frac{1}{1+x}\leq\frac{1}{z}.$$

Според тоа,

$$\frac{x^2}{1+y}\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\leq\frac{x^2}{x}+\frac{y^2}{y}+\frac{z^2}{z}=x+y+z=1.$$

5. Дали може 2003×2003 табла да се покрие со 1×2 домина поставени хоризонтално и 1×3 тримина поставени вертикално? (Домината и триминaта не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата.)

Решение. Да претпоставиме дека 2003×2003 може да се покрие со 1×2 домина поставени вертикално и 1×3 тримена поставени хоризонтално така што домината и триминaта на се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата. Таблата ја боиме така што првата колона се бели квадрати, втората се црни квадрати итн. наизменично. Ако имаме x бели и y црни квадрати, тогаш

$$x=y+2003. \qquad (1)$$

Од друа страна, ако бројот на домината е n, тогаш со нив се покриени n бели и n црни квадрати. Нека m_1 е бројот на триминaта кои покриваат бели квадрати и m_2 е бројот на триминaта кои покриваат црни квадрати. Јасно, $m_1+m_2=m$, каде m е вкупниот број тримина. Значи, имаме $3m_1$ бели квадрати покриени со тримина и $3m_2$ црни квадрати покриени со тримина.Според тоа

$$x = n + 3m_1,\ \ y = n + 3m_2\,. \qquad (2)$$

Сега, од (1) и (2) следува

$$3(m_1 - m_2) = 2003\,,$$

што не е можно бидејќи 3 не е делител на 2003. Конечно, од добиената противречност следува дека бараното покривање не е можно.