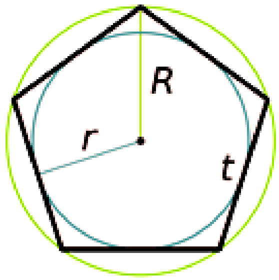
О ЈЕДНОМ ЈЕДНАКОСТРАНИЧНОМ ПЕТОУГЛУ

Ратко Тошић, Нови Сад

Правилан петоугао има све странице једнаке и све углове једнаке (108°). Ми ћемо посматрати конвексан једнакостранични петоугао код кога нису сви углови једнаки. Пођимо од петоугла који се једном својом дијагоналом може поделити на квадрат и једнакостранични троугао (слика 1). Зваћемо га *кућица*.



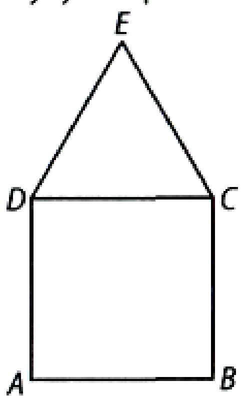
Лако се види да су углови тог петоугла редом 90°, 90°, 150°, 60°, 150°.

Особине кућице

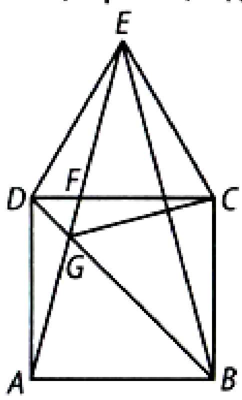
Почнимо од неколико једноставних задатака.

Задатак 1. Одреди величину угла DAE.

Решење. Троугао AED (слика 2) је једнакокрак ($DA = DE$) и $\measuredangle ADE = \measuredangle ADC + \measuredangle CDE = 90° + 60° = 150°$. Зато је угао при основици $\measuredangle DAE = 15°$. (Наравно, тада је и $\measuredangle DEA = 15°$.)



слика 1



слика 2

Последица 1. На основу симетрије квадрата $ABCD$ у односу на праву BD је и $\measuredangle DCG = \measuredangle DAG = 15°$, где је G тачка пресека дијагонала BD и AE.

Последица 2. $\measuredangle AEB = 30°$. Следи на основу тога што је кућица симетрична фигура, при чему је оса симетрије права кроз тачку E која је нормална на страницу AB.

Задатак 2. Одреди угао између дијагонала DC и AE.

Решење. Нека је F тачка пресека дијагонала CD и AE (слика 2). Угао CFE је спољашњи угао троугла DFE, па је $\measuredangle CFE = \measuredangle EDF + \measuredangle DEF = 60° + 15° = 75°$.

Задатак 3. Докажи да тачке D, G, C, E припадају једној кружници.

Решење. Следи на основу тога што је $\measuredangle DEG = \measuredangle DCG = 15°$.

Задатак 4. Одреди угао између дијагонала BD и AE (слика 2).

Решење. Како је $\measuredangle GDE = 60° + 45° = 105°$, из троугла GDE добијамо да је $\measuredangle DGE = 180° - \measuredangle GDE - \measuredangle DEG = 180° - 105° - 15° = 60°$.

Последица 3. $\measuredangle BGE = 120°$.

Задатак 5. Докажи да су троуглови BCG и ECG подударни.

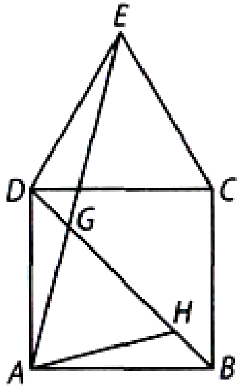
Решење. Следи на основу тога што троуглови BCG и ECG имају заједничку страницу CG и два пара подударних углова ($\measuredangle BCG = \measuredangle ECG = 75°$, $\measuredangle CBG = \measuredangle CEG = 45°$).

Последица 4. $\measuredangle BGC = \measuredangle EGC = 60°$.

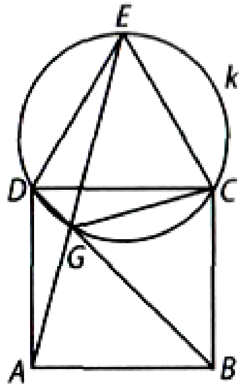
Последица 5. $BG = EG$.

Задатак 6. Докажи да је $BG = AG + DG$.

Решење 1. Нека је H тачка на дијагонали BD таква да је $BH = DG$ (слика 3). Троугао AHG је једнакостраничан, јер је $\measuredangle HAG = 60°$ и $AG = AH$ (на основу подударности троуглова ADG и ABH који имају подударне по две странице и захваћени угао). Следи да је $HG = AG$, одакле је $BG = HG + BH = HG + DG = AG + DG$.



слика 3

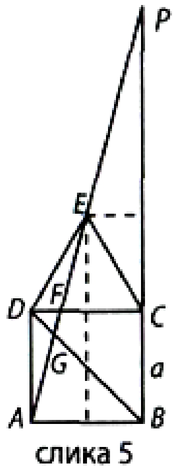


слика 4

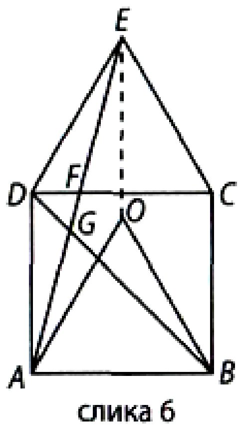
За ученике који су упознати са Птоломејевом теоремом и њеним последицама дајемо још једно решење:

Решење 2. Означимо са k кружницу описану око једнакостраничног троугла DCE (слика 4). Видели смо да тој кружници припада и тачка G која лежи на краћем луку DC те кружнице. Као директну последицу Птоломејеве теореме имамо тврђење да је $GE = GC + GD$, одакле на основу Последице 5 следи $BG = GC + GD = GA + GD$.

Мало тежи су следећи задаци:



слика 5



слика 6

Задатак 7. У ком односу тачка F дели дуж CD?

Решење. Продужимо FE до пресека P са правом BC (слика 5). Лако се израчунава да је $BP = 2\cdot(a+\sqrt{3})$, односно $CP = a(1+\sqrt{3})$. (Зашто?) Правоугли троуглови FCP и FDA су слични и при томе је $CP:DA=(a+a\sqrt{3}):a=(1+\sqrt{3}):1$. Следи да је и други пар одговарајућих страница у истом односу, тј. $FC:DF=(1+\sqrt{3}):1$.

Задатак 8. У ком односу тачка *G* дели дијагоналу *BD*?

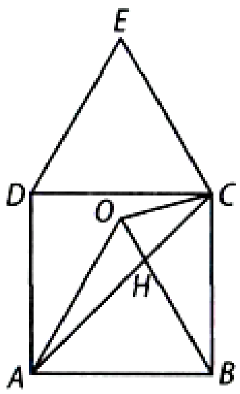
Решење. Према претходном задатку је $AB:DF=DC:DF=(2+\sqrt{3}):1$, па су троуглови *ABG* и *FDG* (слика 5) слични са коефицијентом сличности $2+\sqrt{3}$. Следи да су и одговарајуће странице *BG* и *DG* у истом односу, тј. $BG:DG=(2+\sqrt{3}):1$.

Задатак 9. Нека је *O* тачка у унутрашњости квадрата *ABCD* таква да је *ABO* једнакостраничан троугао (слика 6). Доказати да је *O* центар кружнице описане око троугла *ABE*.

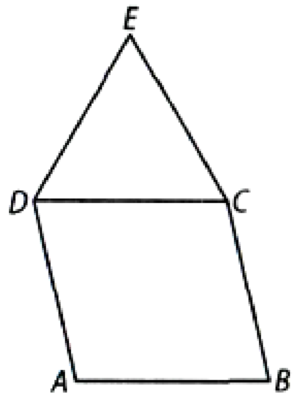
Решење. Лако се показује да је четвороугао *BCEO* паралелограм, па је $OE = BC = OB = OA$, тј. тачке *A*, *B* и *E* су на једнаким растојањима од тачке *O*.

Задатак 10. Докажи да тачке *A*, *B*, *G*, *O* припадају једној кружници.

Решење. Следи на основу тога што је $\measuredangle AOB = \measuredangle AGB = 60°$ (слика 6).



слика 7



слика 8

Задатак 11. Нека је *H* тачка пресека дужи *BO* са дијагоналом *AC* (слика 7). Докажи да је троугао *COH* једнакокрак.

Решење. Троугао *CBO* је једнакокрак са углом при врху $\measuredangle CBO = 30°$, па је угао при основици $\measuredangle BOC = \measuredangle BCO = 75°$. С друге стране, из троугла *BHC* добијамо да је $\measuredangle BHC = 180° - \measuredangle BCH - \measuredangle HBC = 180° - 45° - 30° = 105°$, одакле је њему напоредан угао $\measuredangle OHC = 75°$. Како су углови $\measuredangle HOC$ и $\measuredangle OHC$ једнаки, троугао *COH* је једнакокрак.

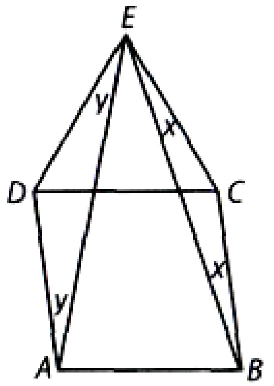
Последица 6. $OC = HC$.

Нахерена кућица

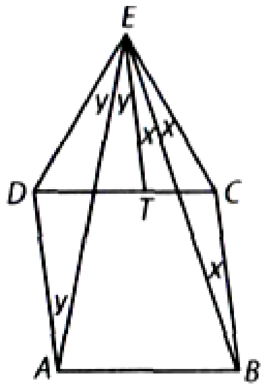
Посматрајмо сада конвексан једнакостранични петоугао ABCDE који се једном дијагоналом може поделити на ромб и једнакостранични троугао (слика 8). Зваћемо га *нахерена кућица*.

За кућицу смо видели да је $\measuredangle AEB = 30°$ (последица 2). Уз аналогне ознаке као за усправну кућицу доказаћемо да исто тврђење важи и за нахерену кућицу, тј. даћемо неколико решења следећег задатка.

Задатак 12. Докажи да је, уз ознаке као на слици 9, $\measuredangle AEB = 30°$.



слика 9



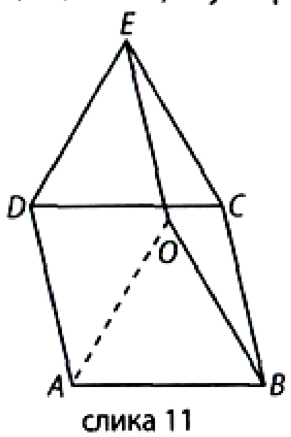
слика10

Решење 1. Нека је $\measuredangle CEB = x$, $\measuredangle DEA = y$ (слика 9). Тада је и $\measuredangle EBC = x$ и $\measuredangle EAD = y$. Даље имамо да је $\measuredangle EAB + \measuredangle EBA = 180° - x - y$ (јер је $\measuredangle DAB + \measuredangle CBA = 180°$). Како је $\measuredangle AEB + \measuredangle EAB + \measuredangle EBA = 180°$, то је $\measuredangle AEB = 180° - (180° - x - y) = x + y$. Следи да је $\measuredangle DEC = 2(x + y) = 60°$, одакле је $\measuredangle AEB = x + y = 30°$.

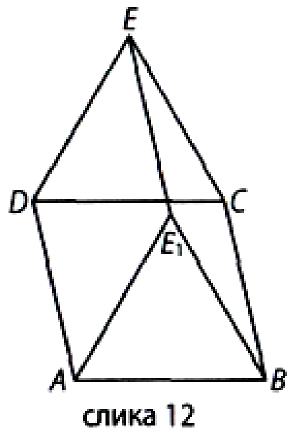
Решење 2. Повуцимо кроз E паралелу са BC и нека она сече дијагоналу CD у тачки T (слика 10). Ако је $\measuredangle CEB = x$, $\measuredangle DEA = y$, онда је и $\measuredangle TEB = \measuredangle EBC = \measuredangle CEB = x$ и $\measuredangle TEA = \measuredangle EAD = \measuredangle AED = y$ (користили смо једнакост наизменичних углова), и даље $\measuredangle DEC = 2x + 2y$; $\measuredangle AEB = 30°$.

Решење 3. Конструишимо ромб *ECBO* (слика 11). Како су дужи *AD*, *BC* и *OE* паралелне и једнаке то је и *EOAD* паралелограм. Међутим, $ED = AD$, па је тај паралелограм ромб. Како дијагонале ромба полове одговарајуће углове, то је $\measuredangle AEB = \frac{1}{2}\measuredangle DEC = 30°$.

Решење 4. Поставимо праву кроз *A* паралелну са *DE* и праву кроз *B* паралелну са *CE* и нека је E_1 њихова тачка пресека (слика 12). Троуглови *DCE* и ABE_1 су подударни. Дужи AE_1 и *DE* су паралелне и једнаке, па то важи и за дужи *AD* и E_1E. Како је $AE_1 = AD$, следи да је $E_1E = E_1A = E_1B$, тј. тачке *E*, *A*, *B* припадају истој кружници са центром E_1. Како је централни угао $\measuredangle AE_1B = 60°$, то је периферијски угао над истом тетивом $\measuredangle AEB = 30°$.



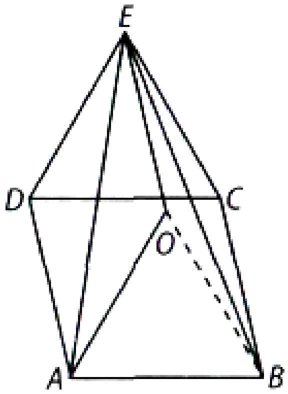
слика 11



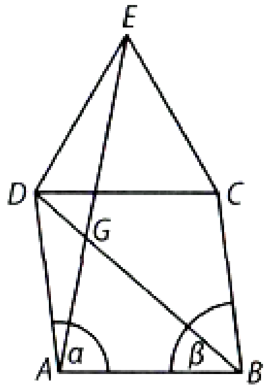
слика 12

Решење 5. Симетријом у односу на праву *AE* троугао *ADE* пресликава се у троугао *AOE* (слика 13). Како је *AE* основица једнакокраког троугла *ADE*, четвороугао *EOAD* је ромб. Слично се троугао *BCE* симетријом у односу на праву *BE* пресликава у троугао

BOE и на тај начин добијамо ромб *EOBC*. Добијамо ромбове са заједничком страницом *OE*, а даље настављамо као у решењу 3.



слика 13



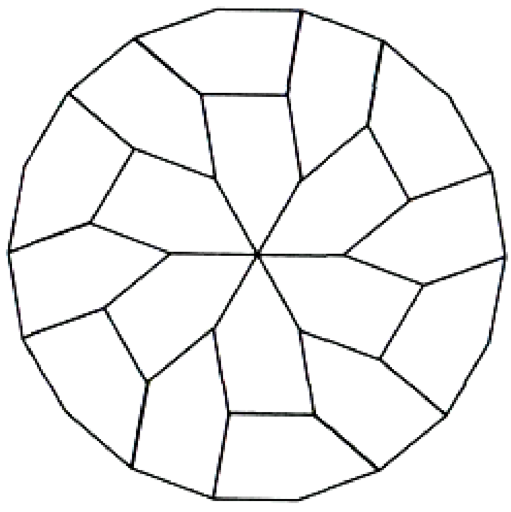
слика 14

Задатак 13. Одреди угао између дијагонала *AE* и *BD* нахерене кућице.

Решење. Нека су $\alpha = \measuredangle DAB$ и $\beta = \measuredangle ABC$ углови ромба *ABCD*, $\alpha + \beta = 180°$, $\alpha > \beta$ (слика 14). Тада је у једнакокраком троуглу *ADE* угао при врху *D* једнак $60° + \beta$, па су углови уз основицу $\measuredangle DAE = \measuredangle DEA = \frac{1}{2}(180° - (60° + \beta)) = 60° - \frac{\beta}{2}$. Посматрајмо сада троугао *DGE*. Величине углова код темена *D* и *E* редом су $60° + \frac{\beta}{2}$ и $60° - \frac{\beta}{2}$. Збир та два угла је 120°. Трећи угао троугла, који представља тражени угао, је онда једнак $180° - 120° = 60°$.

Као што видимо, добили смо исту вредност за величину угла између дијагонала *BD* и *AE* као и у случају усправне кућице. Читаоцима предлажемо да провере које од особина доказаних за усправну кућицу остају у важности и за нахерену кућицу.

Разлагање правилног 18-угла на подударне петоуглове


слика 15

На крају посматрајмо и специјалан случај нахерене кућице кад су величине углова трапеза ABCD 100° и 80°. Тада добијамо петоугао са једнаким страницама и угловима редом 100°, 80°, 160°, 60°, 140°. Интересантна особина овог петоугла је да се од 18 таквих петоуглова може сложити правилан 18-угао. Другим речима, правилан 18-угао може се разрезати на 18 подударних конвексних петоуглова (са горе наведеним угловима) као што је представљено на слици 15.

Задаци за самостални рад

1. Одреди однос површина троуглова *ABG* и *FDG* (слика 2).
2. Који део површине кућице чини збир површина троуглова *ABG* и *GDE*.
3. Одреди полупречник најмањег круга у који се може сместити кућица.
4. Докажи да тачке *C*, *O* и *G* леже на једној правој (слика 6).
5. Испитај која од доказаних тврђења за усправну кућицу важе и за нахерену кућицу.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија