https://matematickitalent.mk Објавено на 14.2.2023

Prilog rješavanju logaritamsko–eksponencijalnih jednadžbi

DINO DUMANČIĆ*

Sažetak. *U članku se najprije navodi definicija i osnovna svojstva logaritamske funkcije. Također navode se i neka složenija svojstva i formule podesne za rješavanje logaritamskih i eksponencijalnih jednadžbi. Pokazana je međusobna povezanost ovih formula te navedeni neki ilustrativni primjeri i zadaci.*

Ključne riječi: *jednadžba, eksponencijalna i logaritamska funkcija*

Contribution to solving exponential and logarithmic equations

Abstract. *The paper gives the definition and basic properties of a logarithmic function. Some more complex properties and formulas suitable for solving exponential and logarithmic equations are also given. Mutual interrelations between these formulas are shown and some illustrative examples are given.*

Key words: *equation, exponential and logarithmic functions*

1. Uvod

Na općinsko–školskom natjecanju iz matematike za učenike trećih razeda srednje škole 2007. godine pojavio se i ovakav zadatak.

Zadatak 1. *Odredite pozitivni realni broj $x > 0$ koji je rješenje jednadžbe*

$$15^{\log_5 x} \cdot x^{\log_5 45x} = 1.$$

Logaritmiranjem obje strane jednadžbe po bazi 5 i izlučivanjem zajedničkog faktora dobivamo

$$\log_5 x\,(\log_5 15 + \log_5 45x) = 0,$$
$$\log_5 x \cdot \log_5 675x = 0,$$

odakle dobivamo dva različita rješenja polazne jednadžbe

$$\log_5 x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1,$$
$$\log_5 675x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \tfrac{1}{675}.$$

Pokazat ćemo drugi način rješavanja ovakvih jednadžbi primjenom nekih specijalnih relacija koje vrijede za logaritamsku funkciju.

*Srednja škola D. Miholjac

2. Logaritamska funkcija – definicija i osnovna svojstva

Logaritamska funkcija $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $\quad a > 0$, $a \neq 1$ definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = a^x$, $\quad a > 0$, $a \neq 1$ (vidi primjerice [3], [4], [5], [6]). Zbog toga vrijedi $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$, a specijalno u našem slučaju dobivamo dvije korisne formule

$$\begin{aligned} &\log_a a^x = x \quad x \in \mathbb{R},\\ &a^{\log_a x} = x, \quad x > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Primijetimo da je vrijednost logaritamske funkcije baze a u točki x onaj broj y, kojim treba potencirati bazu a da bi se dobio broj x, tj.

$$\log_a x = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x. \tag{2}$$

Odmah se vidi da specijalno vrijedi

$$\log_a a = 1 \quad \text{i} \quad \log_a 1 = 0. \tag{3}$$

Navedimo osnovna svojstva logaritamske funkcije, koja neposredno slijede iz definicijske jednakosti (2)

$$\begin{array}{lll} (i) & \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y & \text{zbog} \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y},\\ (ii) & \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y & \text{zbog} \quad a^x : a^y = a^{x-y},\\ (iii) & \log_a x^y = y \log_a x & \text{zbog} \quad (a^x)^y = a^{xy}. \end{array} \tag{4}$$

3. Neka posebna svojstva logaritamske funkcije

Prethodno navedenim svojstvima dodajmo još dvije važne formule

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}, \quad a, x, y > 0, \tag{5}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad a, x, y > 0. \tag{6}$$

Dokaz formule (5). Očigledno vrijedi jednakost

$$\log_a x \, \log_a y = \log_a y \, \log_a x.$$

Korištenjem formule (iii) iz (4) dobivamo

$$\log_a y^{\log_a x} = \log_a x^{\log_a y},$$

a zbog bijektivnosti logaritamske funkcije odmah slijedi (5).

Dokaz formule (6). Neka je $y = \log_a x$. Prema (2) vrijedi $a^y = x$, pa zbog bijektivnosti logaritamske funkcije vrijedi

$$\log_b a^y = \log_b x \Longrightarrow y \log_b a = \log_b x,$$

iz čega dobivamo (6).

Pokažimo nadalje da iz (5) slijedi (6) i obrnuto.

(a) (5) $\Rightarrow$ (6).
Ako u (5) stavimo $y = b$ i logaritmiramo po bazi a, dobivamo

$$\log_a b \log_b x = \log_a x \log_b b.$$

Kako je prema (3) $\log_b b = 1$, odavde neposredno slijedi (6).

(b) (6) $\Rightarrow$ (5).
Označimo $z = x^{\log_a y}$. Logaritmiranjem obje strane po bazi a i korištenjem (6) dobivamo

$$\log_a x = \frac{\log_a z}{\log_a y} = \log_y z.$$

Odavde korištenjem (3) dobivamo $z = y^{\log_a x}$, a kako je $z = x^{\log_a y}$, dobili smo formulu (5).

Specijalno iz (6) slijedi korisna formula koja povezuje dvije različite baze logaritamske funkcije

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a, b > 0. \tag{7}$$

Primjer 1. *Zadatak 1 s početka članka*

$$15^{\log_5 x} \cdot x^{\log_5 45x} = 1,$$

koji smo riješili na uobičajen način, riješit ćemo primjenom formule (5). Ako faktor $15^{\log_5 x}$ prema formuli (5) zamijenimo s $x^{\log_5 15}$, polazna jednadžba postaje

$$x^{\log_5 675x} = 1.$$

Budući da funkcija opća potencija $x \mapsto x^{\varphi(x)}$ može primiti vrijednost 1 ili tako da je $x = 1$ ili tako da je $\varphi(x) = 0$, lako dobivamo dva rješenja prethodne jednadžbe

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{1}{675}.$$

Primjenom programskog sustava *Mathematica* također se može riješiti ova jednadžba primjenom naredbe `FindRoot`, ali pri tome početna aproksimacija mora biti vrlo blizu rješenja.

```
In[1]:=  f[x_] := 15^Log[5, x]  x^Log[5, 45 x] - 1
```

(i) primjenom `FindRoot[f[x] == 0, {x, .01}]` dobivamo `x -> 0.00148148`, $\left(\text{tj. } \frac{1}{675}\right)$,

(ii) primjenom `FindRoot[f[x] == 0, {x, 2}]` dobivamo `x -> 1`.

Primjer 2. *Primjenom formule (5) riješimo sljedeću jednadžbu (vidi [1], str. 85)*

$$5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x - 1}.$$

Najprije primijetimo da rješenje x mora zadovoljavati uvjet $x > 0$. Korištenjem formule (5) i sređivanjem jednadžbe dobivamo

$$\frac{3}{5}x^{\log 5} = \frac{5}{3}x^{\log 3} \Longrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 = x^{\log \frac{3}{5}}.$$

Ponovnim korištenjem formule (5) dobivamo

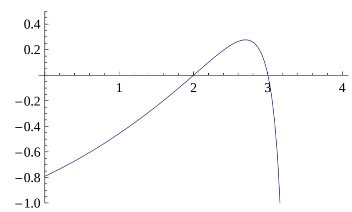
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^{\log x},$$

odakle slijedi rješenje $x = 100$. Drugi način rješavanja vidi u [1], str. 85. Primjenom programskog sustava *Mathematica* također možemo dobiti ovo rješenje naredbom `FindRoot`, ali pri tome početna aproksimacija mora biti veća od 18.

Primjer 3. *Primjenom formule (6) riješimo sljedeću jednadžbu (vidi [1], str. 83)*

$$\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3.$$

Najprije primijetimo da traženi realni broj $x \in \mathbb{R}$ mora zadovoljavati sljedeće



Slika 1: Graf funkcije $f(x) = \frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} - 3$

uvjete:

$$5 - x > 0 \quad \& \quad 5 - x \neq 1 \quad \& \quad 35 - x^3 > 0,$$

tj. moguće rješenje mora zadovoljavati uvjet: $x < \sqrt[3]{35} \approx 3.27107$, što je vidljivo i iz grafa funkcije $f(x) = \frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} - 3$ prikazanog na *Slici 1*.

Korištenjem formule (6) polazna jednadžba postaje

$$\log_{(5-x)}(35 - x^3) = 3.$$

Na osnovi definicijske jednakosti (2) dobivamo jednadžbu

$$(5 - x)^3 = 35 - x^3,$$

odnosno kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

čija su rješenja $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Primjenom programskog sustava *Mathematica* također možemo dobiti ova rješenja naredbom `FindRoot` i odgovarajućom početnom aproksimacijom.

Zadatak 2. *Na osnovi formule (5) (odnosno formule (6)) pokažite da vrijedi*

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x.$$

Uputa: stavite $b = a^n$ i primijenite formulu (6).

Zadatak 3. *Na kraju navedimo još nekoliko zadataka za vježbu (iz [1], [2], [3], [7]) u kojima je korisno primijeniti formule (5) ili (6):*

a) $4^{\log x} - 32 + x^{\log 4} = 0,\qquad$ *b)* $3^{\log\frac{1}{x}} - 12\cdot x^{\log 3} + 1 = 0,$

c) $\frac{2\log 2 + \log(x-3)}{\log(7x+1)+\log(x-6)+\log 3} = \frac{1}{2}$

d) Riješite sustav jednadžbi:

$$5^{\log x} = 3^{\log y}$$

$$(3x)^{\log 3} = (5y)^{\log 5}$$

Rješenje: a) $x_0 = 100$, b) $x_0 = 0.1$, c) $x_0 = 9$, d) $(x_0, y_0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{5})$.

Literatura

[1] B. Apsen, *Riješeni zadaci elementarne matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[2] M. Bombardelli, Ž. Hanjš, S. Varošanec, *Matematička natjecanja 1995./1996.*, Element, 1997.

[3] N. Elezović, B. Dakić, *Matematika 2. Udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija*, Element, 2004.

[4] A. Fetzer, H. Fränkel, *Mathematik I. Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.

[5] D. L. Hoffman, *Calculus*, Mc Graw Hill, Boston, 2004.

[6] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000.

[7] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.