Сојузен натпревар 1979

Седмо одделение

1. Стрелец гаѓа во мета и за секој погодок добива 5 поени, а за секое промашување му се одземаат 3 поени. Стрелецот имал лош ден и по серија стрелања, кои биле повеќе од 10, а помалку од 20, освоил точно нула бодови. Колку пати стрелал стрелецот и колку пати ја погодил метата?

   Решение. Ако стрелецот имал m погодоци и n промашувања, тогаш $5m-3n=0$ и $10<m+n<20$. Единствен пар природни броеви кој ги задоволува двата услови е $m=6, n=10$. Значи, стрелоцот стрелал 16 пати и 6 пати ја погодил метата.

2. Природниот број a не е делив ос 5. Определи го остатокот кој се добива при делење на бројот a^4 со бројот 5.

   Решение. Број a кој не е делив со 5 може да се запише во облик $5k\pm1$ или $5k\pm2$. Имаме

   $$a^2=(5k\pm1)^2=25k^2\pm10k+1=5(5k^2\pm2k)+1=5m+1 \text{ или}$$

   $$a^2=(5k\pm2)^2=25k^2\pm20k+4=5(5k^2\pm4k)+1=5n+4.$$

   Ако квадрираме уште еднаш добиваме

   $$a^4=(5m+1)^2=5(5m^2+2m)+1=5M+1 \text{ или}$$

   $$a^4=(5n+4)^2=5(5n^2+8n+3)+1=5N+1,$$

   па бараниот остаток е 1.

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

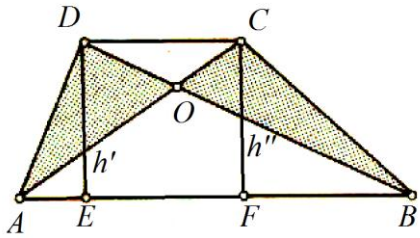
   $$A=\frac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+3\cdot6\cdot12+...+100\cdot200\cdot400}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+3\cdot9\cdot27+...+100\cdot300\cdot900}.$$

   Решение. Имаме

   $$A=\frac{1\cdot2\cdot4(1+2^3+3^3+...+100^3)}{1\cdot3\cdot9(1+2^3+3^3+...+100^3)}=\frac{1\cdot2\cdot4}{1\cdot3\cdot9}=\frac{8}{27}.$$

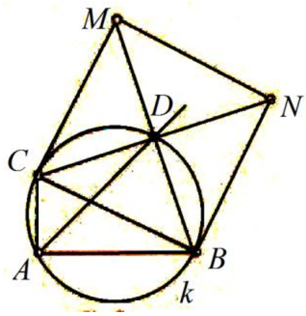
4. Во четириаголник $ABCD$ кај кој страните не се еднакви дијагоналите AC и BD се сечат во точката O. Ако плоштините на триаголниците ADO и BCO се еднакви, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е трапез.

Решение. Ако плоштините на триаголниците ADO и BCO се еднакви, тогаш со додавање на триаголникот ABO добиваме дека и плоштините на триаголниците ABD и ABC се еднакви. Значи, $\frac{AB \cdot h'}{2} = \frac{AB \cdot h''}{2}$, па затоа $h' = h''$, т.е. $DE = CF$. Според тоа, четириаголникот $CDEF$ е правоаголник, па затоа $DC \parallel AB$. Но страните AB и CD не се еднакви, што значи дека четириаголникот $ABCD$ е трапез.



5. Над хипотенузата на правоаголен триаголник е конструиран квадрат кој не го содржи темето на правиот агол на дадениот триаголник. Докажи дека симетралата на правиот агол на дадениот триаголник минува низ центарот на квадратот.

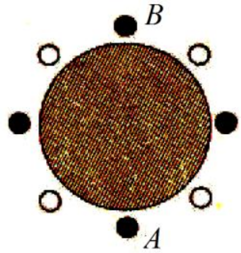
Решение. Нека A е темето на правиот агол, $BCMN$ е квадрат и D е центарот на квадратот (цртеж десно). Бидејќи аголот BDC е прав, добиваме дека кружницата k опишана околу триаголникот ABC ја содржи точката D. Тетивите CD и BD се еднакви меѓу себе, како половини од дијагоналите на квадратот. Затоа периферискиte агли BAD и CAD над овие тетиви се еднакви, што значи дека AD е симетрала на правиот агол на дадениот триаголник, што и требаше да се докаже.



Осмо одделение

1. На некоја свечена вечера шефот на салата добил задача околу една тркалезна маса да распореди четири мажи и определен број жени, и тоа така што ниту една жена да не седи до друга жена, а наспроти (дијаметрално) секое лице да седи лице од спротивниот пол. Дали шефот на салата успеал да направи таков распоред?

Решение. За да наспроти секој од четирите ма-



жи седи жена, на масата мора да се распоредат точно четири жени и тоа така што меѓу секои две жени има по еден маж. Нека AB е еден дијаметар на тркалезната маса (види цртеж). Ако A е маж, тогаш B е жена. Но, лево и десно од дијаметарот AB мора да седат по три лица. Сега двете лица до B мора да се мажи, па останува три жени да распоредиме на преостанатите четири места, што значи дека две жени ќе мора да седат една до друга, што е противречност. Значи, шефот на салата не успеал да го направи бараниот распоред.

2. На чело на колоната на велосипедска трка се наоѓаат велосипедистите Ацо и Боро, возејќи еден покрај друг. Тие толку им побегнале на другите велосипедисти така што до целта никој не може да ги стигне. На $20\,km$ пред целта на Ацо му пукнала гума. Боро продолжил да вози до целта со просечна брзина од $40\,km/h$. Ацо за поправка на гумата изгубил 3 минути, а потоа продолжил да вози со просечна брзина од $45\,km/h$. Кој победил во трката и со колкаво растојание предност?

Решение. Боро возел до целта $\frac{20}{40}=0,5\,h$, односно $30\min$. На Ацо му биле потребни $\frac{20}{45}h+3\min=\frac{89}{3}\min$. Бидејќи $\frac{89}{3}<30$, заклучуваме дека победник е Ацо. Ацо пред Боро стигнал за $30-\frac{89}{3}=\frac{1}{3}\min=20\,s$. За тие 20 секунди на Боро му преостанало да помине $\frac{20}{3600}\cdot 40=\frac{2}{9}\,km$.

3. Даден е изразот $\sqrt{x^2+y^2-z^2-2xy}$. Ако $x=361979$ и $z=561990$, определи ги сите вредности на y за кои дадениот израз прима најмала можна вредност.

Решение. Најмалата вредност на дадениот корен може да е 0. Значи, мора да биде

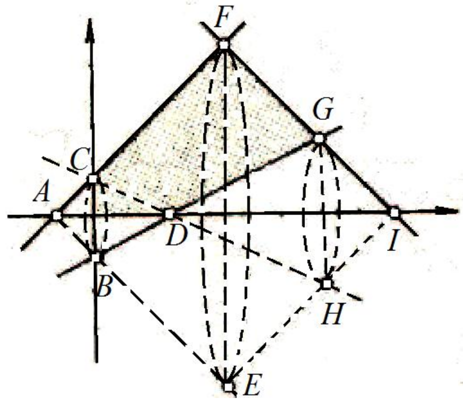
$$x^2+y^2-z^2-2xy=0,\text{ т.е. } (x+y-z)(x+y+z)=0.$$

Оттука добиваме $x+y-z=0$ или $x+y+z=0$, што значи $y=z-x$ или $y=-z-x$. Бараните вредности за y се 200011 или -923969.

4. Правите $x-y=-1$, $x+y=8$ и $x-2y=2$ и двете координатни оски формираат петаголник. Определи го волуменот на ротационото тело кое се добива со ротација на овој петаголник околу апсцисната оска.

Решение. Добиениот петаголник е осенчен на цртежот десно.

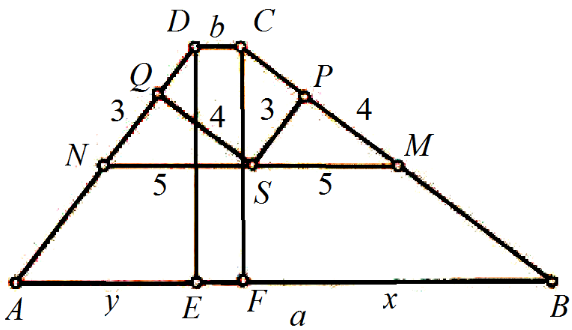
Координатите на темињата се добиваат во пресеците на соодветните прави и тие се $(0,1),(0,0),(2,0),(6,2),(\frac{7}{2},\frac{9}{2})$.



Бараниот волумен ќе го добиеме ако од збирот на волумените на конусите добиени со ротација на триаголниците AEF и IEF ги одземеме волумените на комусите добиени со ротација на триаголниците ABC, GHD и GHI. Лесно се добива дека бараниот волумен е $V=\frac{629}{12}\pi$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Трапез има плоштина $80\,cm^2$ и должина на висината $8\,cm$. Средината на средната линија на трапезот од едниот крак е оддалечена $3\,cm$, а од другиот крак е оддалечена $4\,cm$. Определи ги должините на основите на овој трапез.

Решение. Нека $SP=3\,cm$ и $SQ=4\,cm$ (види цртеж). Од плоштината на трапезот добиваме $P=mh$, односно $80=8m$, од каде за средната линија на трапезот добиваме $m=10\,cm$. Значи, $a+b=20\,cm$, а правоаголните триаголници SMP и SMQ имаат хипотенузи $5\,cm$.



Од Питагоровата теорема следува $MP=4\,cm$ и $NQ=3\,cm$. Правоаголните триаголници SMP и BCF се слични, бидејќи имаат еднакви агли во темињата B и M, па затоа $SP:MP=CF:BF$, односно $3:4=8:x$, па затоа $x=\frac{32}{3}$. На ист начин од сличноста на триаголниците следува $SQ:QN=DE:AE$, т.е. $4:3=8:y$, па затоа $y=6$. Четириаголникот $CDEF$ е правоаголник, па затоа $EF=CD=b$. Според тоа, $20=a+b=x+b+y+b=2b+6+\frac{32}{3}$, од каде добиваме $b=\frac{5}{3}\,cm$ и $a=\frac{55}{3}\,cm$.