МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 38

Самоил Малчески

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ ЗА НАТПРЕВАРИ ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД VI – IX ОДДЕЛЕНИЕ

Скопје, 2023

Рецензент:
Д-р Даниел Велинов
Градежен факултет, Скопје

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е мала збирка од 248 задачи од теорија на броеви, повеќето од кои се задавани на математички натпревари во основното образование и тоа на белоруските, босанско-херцеговачките, италијанските, македонските, мос-овските, новозеландските, српските, хрватските, холандските, украинските и швајцарските натпревари, а дел од задачите се обработувани со учениците од некои земји за учество на меѓународните математички натпревари. Сепак, повеќето задачи се на ниво на задачите кои се задаваат на регионалните и националните натпревари за учениците од шесто до деветто оделение во деветгодишното основно образование, односно на петто до осмо одделение во осумгодишното основно образование, па затоа оваа мала збирка задачи првенствено може да послужи за подготовка на учениците токму за ваквиот вид напревари, но и за националните математички олимпијади за учениците од основното образование, така и за соодветните мешународни натпревари. Самата збирка не содржи теориски резултати, бидејќи за таа намена се доволни статиите и книгите кои се наведени во литературата на крајот од оваа книга.

Задачите во оваа збирка се поделени во девет глави и тоа:

1. Воведни задачи
2. Деливост. Општи признаци за деливост
3. Посебни признаци за деливост
4. Делење со осаток
5. Најголем заеднички делител и најмал заеднички содржател
6. Прости и сложени броеви
7. Број на делители на природен број
8. Конгруенции и
9. Диофантови равенки.

Повеќето од задачите се детално решени, а само мал број задачи се со кратки решенија, кои се доволни за да се следи идејата на решението. Затоа, на читателот му препорачувам сите решенија детално да ги испише. Освен тоа, сакам да напоменам дека и покрај вложениот напор задачите не

се идеално подредени според тежината на истите, бидејќи за ваков вид задачи тоа практично и не е можно целосно да се направи.

Сметам дека читателот треба прво самостојно да се обиде да ја реши секоја задача, а потоа да провери дали неговото решение се совпаѓа со понуденото решение, или пак ако не успеал сам да ја реши задачата, да го проучи понуденото решение. Имено, дел од подготовките за натпреварите треба да се одвива токму на самостојно откривање на решенијата на задачите кои претходно биле задавани на различни натпревари, почнувајќи од регионално ниво, па се до Јуниорската балканска математичка олимпијада, која покрај Европскиот математички куп (јуниори), Турнирот на градови (основна и напредна варијанта за 8 и 9 одделение) и Иранската геометриска олимпијада (елементарно ниво), кои моментално се показател за нивото кое треба да го достигнат учениците на возраст до 15,5 години.

Во оваа пригода сакам да му се заблагодарам на рецензентот д-р Даниел Велинов чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надевам дека оваа мала збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците како за националните, така и за меѓународните натпревари, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Како што реков, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така и од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидам благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје Авторот
август, 2023 г.

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Секоја цифра на шестцифрен број, почнувајќи од цифрата на единиците, е еднаква на збирот на претходните две цифри (кои се наоѓаат лево од неа). Определи го трицифрениот завршеток на најголемиот број со ова својство.

2. За природните броеви k,m,n важи
$$n^4+2n^3+kn^2=m^2-1. \qquad (1)$$
Определи ги најмалата можна вредност на k и сите m,n за таа вредност на k.

3. Секој природен број може да се запише како збир на степени на бројот 2. Определи ги сите трицифрени броеви кои можат да се претстават како збир на точно 9 степени на бројот 2.

4. Даден е производот $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 2012\cdot 2013$. Кој е најмалиот број множители што треба да се избришат така, што во добиениот производ цифрата на единиците да е 9?

5. За еден природен број ќе велиме дека е *добар*, ако цифрата на единиците му е 0 или 1, цифрата на десетките му е 0, 1 или 2, цифрата на стотките му е 0, 1, 2 или 3, цифрата на илјадитите му е 0, 1, 2, 3 или 4 итн. Првите 10 добри броеви се 1, 10, 11, 20, 21, 100, 101, 110, 111 и 120. Добрите броеви ги запишуваме во низа во растечки редослед. Кој е стотиот добар број?

6. Збирот на некои 50 последователни природни броеви е точен квадрат. Определи ги двата најмали можни збира на такви 50 последователни броеви.

7. Цифрата на десетките на квадратот на еден природен број е непарна. Докажи дека цифрата на единиците на квадратот на тој број е 6.

8. Докажи дека бројот

$$M = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

каде n е природен број пого-лем од 1, не може да е природен број.

9. Определи го четирицифрениот број $\overline{abcd}$ за кој важи:
$$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2023.$$

10. Докажи дека постојат бесконечно многу подредени тројки (x, y, z) природни броеви такви што $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 3$.

11. Докажи дека за секој природен број n постојат најмалку 10 подредени тројки (x, y, z) природни броеви такви што $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}$.

12. Определи ги сите природни броеви k кои може да се запишат како разлика на квадрати на два природни броја.

2. ДЕЛИВОСТ. ОПШТИ ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ

1. Определи ги сите трицифрени природни броеви кои се такви што ако било кои две цифри им се заменат со било кои две други цифри (преостанатата цифра останува на своето место), тогаш новодобиениот број не е делив со 113.

2. Ако на трицифрениот број кој е делив со 7 последните две цифри се еднакви, тогаш и збирот на неговите цифри е делив со 7. Докажи!

3. Дали постојат цели броеви a,b,c и d такви што важи
$$\begin{aligned} abcd - a &= 1357, \\ abcd - b &= 3571, \\ abcd - c &= 5713, \\ abcd - d &= 7135. \end{aligned} \qquad (1)$$

4. Определи ги сите трицифрени природни броеви $\overline{abc}$, такви што $\sqrt{\overline{abc}+\sqrt{c}}$ исто така е природен број.

5. Докажи дека збирот на $2n+1$ последователни природни броеви е делив со $2n+1$.

6. Збирот на 7 природни броја е 2012. Збирот на два од овие броеви е 755, а збирот на други два е 759. Докажи дека производот на седумте броја е делив со 8.

7. На таблата се запишани броевите 4, 14, 24, ..., 104. Откако е избришан еден од овие броеви, збирот на преостанатите броеви е делив со 11. Дали е можно да се избрише уште еден од преостанатите броеви така, што збирот на броевите кои ќе преостанат повторно да е делив со 11?

8. Анте на таблата во растечки редослед ги запишал сите парни броеви од 2 заклучно до 2010. Потоа Матеј ги избришал сите броеви, кои се

деливи со 3. Колку броеви останале запишани на таблата?

9. На таблата се запишани 9 последователни трицифрени броеви, такви што во записите на ниту еден од нив не е цифрата 0. Потоа се запишани производите на цифрите на секој од запишаните броеви и е пресметан нивниот збир. Дали може на овој начин да се добие бројот: а) 2013, б) 1125?

10. Определи го најголемиот 13-цифрен природен број, делив со 13, чии последни четири цифри се 2013. А кој е најмалиот таков 13-цифрен број?

11. Определи го најмалиот природен број n, за кој бројот $(n+10)!$ завршува на 218 нули повеќе отколку бројот $n!$.

12. Определи го најмалиот природен број, кој е делив со 17 и сите цифри му се еднакви.

13. Определи го бројот на сите 2011-цифрени броеви, деливи со 7, кои се запишуваат со помош на 2010 единици и една седумка.

14. Определи го збирот на сите природни двоцифрени броеви кои се деливи со секоја од своите цифри.

15. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што збирот $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a$ е делив со 3 и со 2011.

16. Теодор има кутија чоколадни бомбони и кутија гумени бомбони. Претпладне тој изел $\frac{1}{3}$ од чоколадните бомбони и $\frac{2}{5}$ од гумените бомбони. Попладне Теодор изел $\frac{1}{3}$ од преостанатите чоколадни бомбони и $\frac{2}{5}$ од преостанатите гумени бомбони. Потоа Теодор ги пребројал бомбоните и видел дека во двете кутии останале вкупно 42 бомбони. Колку бонмбони изел Теодор? (Јасно, Теодор јаде цели бомбони, а не дел од бонбона.)

17. Ако a,b и c се цели броеви и $5a-3b+12c=0$, докажи дека

$(3b-2c)a$ е делив со 15.

18. Природните броеви a и b го задоволуваат равенството $2a-5b=6$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот $w=a^2-7b^2$ и броевите за кои истата се достигнува.

19. Дадени се 13 различни цели броеви. Дали е точно дека секој од дадените броеви е делив со 5, ако е познато дека, збирот на произволни
а) четири, б) десет,
од дадените броеви е делив со 5.

20. На таблата се запишани сите трицифрени броеви во чиј запис може да учествуваат само цифрите 1, 2 и 3. Некои цифри може да се повторуваат, а некои да не учествуваат во записот на некој број. Докажи дека збирот на овие броеви е делив со 37.

21. Докажи дека, ако збирот на броевите $\overline{abc}$ и $\overline{xyz}$ е делив со 37, тогаш и бројот $\overline{abcxyz}$ е делив со 37.

22. Замислив природен број $A<500$ и цели броеви k,n,m такви што $A=(k-m)(m-n)(n-k)=k+m+n$. Определи ги сите можни вредности за A.

23. Ако a^2 е делив со $a-b$, докажи дека b^2 е делив со $a-b$.

24. Докажи дека, ако $ab+cd$ е делив со $a-c$, тогаш и $ad+bc$ е делив со $a-c$.

25. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броја е делив со 9

26. Докажи, дека бројот $A=\frac{a^4}{24}+\frac{a^3}{4}+\frac{11a^2}{24}+\frac{a}{4}$ е природен број за секој природен број a.

27. Нека a,b,c се цели броеви. Докажи, дека ако бројот $a^3+b^3+c^3$ е

делив со 6, тогаш и бројот $a+b+c$ е делив со 6.

28. Ако збирот на 2023 природни броеви е делив со 6, тогаш и збирот на нивните кубови е делив со 6. Докажи!

29. Определи го најмалиот природен број n за кој секоја од дропките
$$\frac{7}{n+9},\frac{8}{n+10},\frac{9}{n+11},\ldots,\frac{30}{n+32},\frac{31}{n+33}$$
е нескратлива.

30. Определи го збирот на сите природни броеви n за кои дропката $\frac{6n+900}{2n-3}$ е природен број.

31. Определи ги сите цели броеви n за кои бројот $\frac{n+4}{3n-2}$ е цел број.

32. Определи ги сите цели броеви m за кои бројот $\frac{2m^2+7m-9}{m^2+m+1}$ е цел број.

33. Определи ги сите природни броеви x и y за кои $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}$ и $\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ се природни броеви, а разликата $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}-\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ е точен квадрат на природен број.

34. Определи ги сите парови природни броеви (x,y) за кои $\frac{1+x^3}{1+2xy^2}$ е природен број.

35. Докажи ги следниве тврдења:
а) $99\,|\,10^{10}-1$, б) $100\,|\,11^{10}-1$, в) $620\,|\,125^5-25^6$,
г) $33\,|\,2^{55}+1$, д) $13\,|\,3^{2013}-1$.

36. Докажи, дека изразот $A=(2\cdot5^7-5\cdot2^7)^{83}-(2\cdot5^7)^{83}-(5\cdot2^7)^{83}$ е делив со 10^{83}.

37. Докажи дека за секој природен број n барем еден од броевите $3^{3n}+2^{3n}$ и $3^{3n}-2^{3n}$ е делив со 35.

38. Нека n е природен број. Докажи дека бројот $(n+1)(n+2)...(n+n)$ е делив со 2^n, но не е делив со 2^{n+1}.

39. Докажи дека $9 \mid 2^{4n+1}-2^{2n}-1$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

40. Нека n е природен број. Докажи дека $72 \mid 3^n+63$ ако и само ако n е парен број.

41. Докажи дека бројот $A=2222^{5555}+5555^{2222}$ е делив со 7.

42. Дадени се 11 цели броеви, такви што: ако го отстраниме било кој од броевите, тогаш преостанатите 10 броја може да се поделат во две групи од по 5 броја со еднакви збирови. Докажи дека сите 11 броеви се еднакви.

43. Секој од броеите $a_1, a_2, ..., a_n$ е еднаков на 1 или на -1 и важи
$$a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n+a_na_1=0.$$
Докажи дека $4 \mid n$.

3. ПОСЕБНИ ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ

1. Секоја буква во зборот АКРА е заменета со една од цифрите 1, 4 и 6, така што на различните букви соодветствуваат различни букви, а на исти цифри соодветствуваат исти букви. Ако добиениот четирицифрен број е делив со 3, која цифра е запишана на местото на буквата А?

2. Докажи дека бројот 12345678910111213...201120122013 е делив со 3.

3. Со помош на бројот $100!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100$ се формира нов број, еднаков на збирот на неговите цифри. Од вториот број се формира трет број, еднаков на збирот на цифрите на вториот број. Од третиот број се формира четврт број еднаков на збирот на цифрите на третиот број итн. Продолжувајќи ја постапката добиваме едноцифрен број. Кој е тој број?

4. Ако трицифрениот број $\overline{1x2}$ е делив со 4, а трицифрениот број $\overline{16x}$ е делив со 3, определи ја цифрата x.

5. Определи ги сите природни броеви кои се деливи со 8, збирот на цифрите им е 7, а производот им е 6.

6. Определи ги цифрите x и y така што производот на трицифрените броеви $\overline{12x}$ и $\overline{34y}$ е делив со 15.

7. Определи ги сите природни броеви $\overline{abcdef}$ кои се запишани со цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6, така што ниту една цифра во записот не се појавува два пати и важи: $2|\overline{ab}$, $3|\overline{abc}$, $4|\overline{abcd}$, $5|\overline{abcde}$ и $6|\overline{abcdef}$.

8. Определи ги сите природни броеви од видот $\overline{xxyz}$ кои се деливи со 36 и $\overline{xyz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}$ е делив на 57.

9. Определи го најмалиот седумцифрен број од видот $\overline{17x679y}$ кој е

делив со 45.

10. Матео ја заборавил четирицифрената шифра на својот телефон, но се сеќава на некои детали. Бројот е делив со 15, но не е делив со 6, а цифрите се намалуваат од цифрата на илјадитите кон цифрата на единиците. Која е шифрата на телефонот на Матео?

11. Во бројот $\overline{KALIAKRA}$ сите цифри се непарни и на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Ако бројот е делив со 45, кој е најголемиот можен број од дадениот вид?

12. Во бројот 65432789 прецртај најмал можен број цифри така што добиениот број ќе биде делив со 36. Кој број го доби?

13. Даден е бројот 123456789. Колку најмалку цифри треба да пречкртаме за да преостанатиот број е делив со 36?

14. Секоја од буквите K, L, O, N и S е заменета со различна непарна цифра. Четирицифрениот број $\overline{SLON}$ е делив со 15, но не е делив со 9. Со која цифра е заменета буквата K ?

15. Определи ги цифрите a и b така што $\overline{5a432b}$ ќе биде најмалиот природен број кој е делив со 12.

16. Цифрите a, b, c, d се такви што броевите $A = \frac{\overline{2a4b}}{15}$ и $B = \frac{\overline{3c8d}}{18}$ се природни. Определи го збирот на најмалиот можен број A и најголемиот можен број B.

17. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{a783b}$ е делив со 56.

18. Определи ги непознатите цифри на бројот $A = \overline{4a3b6}$ така што тој ќе биде делив со 33.

19. Определи ги четирите најмали последователни природни броја такви што првиот е делив со 2, вториот е делив со 3, третиот е делив со 7 и четвртиот е делив со 5.

4. ДЕЛЕЊЕ СО ОСТАТОК

1. Дадена е низата букви
   КОЛИЧНИКОСТАТОККОЛИЧНИКОСТАТОККОЛИЧНИК...
   Определи ја 2022-та буква во оваа низа.

2. Определи го бројот на трицифрените броеви кои се деливи со 41. Дали нивниот збир е делив со 11?

3. Определи ги најмалиот и најголемиот седумцифрен број кој е делив со 11 и чии цифри се различни од 0.

4. Страниците на една книга биле нумерирани последователно со броевите 1, 2, 3, ..., 336. Од книгата на произволен начин се искинати 111 листови. Докажи дека:
   а) производот на броевите, со кои се нумерирани преостанатите (неискинати) листови е делив со 3,
   б) збирот на броевите, запишани на преостанатите (неискинати) листови не може да е еднаков на 1005.

5. Збирот на еден двоцифрен број и двоцифрениот број запишан со истите цифри земени во обратен редослед, при делење со 5 дава остаток 2. Кој е тој број?

6. Ако се подели бројот 2013 на еден број a, се добива количник b и остаток c. Определи ги броевите a,b,c ако е познато дека овие броеви се должини на страни на рамнокрак триаголник.

7. Ако се подели бројот 2014 на еден број a, се добива количник b и остаток c. Определи ги броевите a,b,c ако е познато дека овие броеви се должини на страни на рамнокрак триаголник.

8. Определи ги последните четири цифри на точен квадрат на природен број, ако се знае дека последните три од нив се еднакви.

9. Збирот на цифрите на природниот број n е еднаков на збирот на цифрите на природниот број $5n$. Докажи дека бројот n е делив со 9.

10. Дали постои природен број n за кој бројот $n(n+1)(n+2)(n+3)+2014$ е точен квадрат.

11. Докажи, дека збирот на сите трицифрени броеви, кои се точни квадрати не е точен квадрат.

12. Природниот број n е точен квадрат. Збирот на цифрите му е 22, цифрата на стотките му е 3, цифрата на десетките му е 7 и во неговиот декаден запис нема цифра која се повторува. Определи го најмалиот таков број.

13. Докажи дека не постои правоаголен триаголник чии катети се природни броеви, а должината на хипотенузата е $\sqrt{20222023}$.

14. Определи го најмалиот природен број n, таков што бројот $3^k+n^k+(3n)^k+2014^k$ е точен квадрат за некој природен број k, но не е точен куб за ниту еден природен број k.

15. Нека $A=57!$ и $B=59!$. Докажи дека A и B даваат исти остатоци при делење со 311.

16. Збирот на три различни природни броја е 2012. Ако најголемиот број го поделиме со најмалиот се добива количник 2 и остаток 3. Разликата на двата помали броја е 3. Кои се тие броеви?

17. При делење на бројот 2216 со природниот број a се добива остаток 29. Определи ги сите можни вредности на a.

18. Бројот N е добиен со последователно запишување на броевите од 1 до 99, т.е. $N=\overline{12345...979899}$. Определи го остатокот од делењето на N со 360.

19. Нека m и n се два различни четирицифрени броја, секој од кои е запишан со цифрите 1, 2, 3 и 4, при што секоја цифра е употребена

само еднаш. Дали е можно еден од броевите m и n да е делител на другиот број.

20. Нека n е природен број, таков што секој од броевите $2n+1$ и $3n+1$ е точен квадрат.
    а) Докажи, дека $40 \mid n$.
    б) Определи го најмалиот природен број n за кој броевите $2n+1$ и $3n+1$ се точни квадрати.

21. Нека m и n се природни броеви такви што $m+n$ е непарен број. Докажи, дека 13^m+13^n
    а) може да се претстави како збир на три точни квадрати,
    б) не може да се претстави како збир на два заемно прости точни квадрати.

22. Дадени се природните броеви a и b. Ако a^2 се подели со b, се добива остаток 8, а ако a^3 се подели со b, се добива остаток 25. Определи го бројот b.

23. Определи го остатокот при делењето на бројот $25\cdot 3^{2021}$ со бројот $4\cdot 3^{2020}$.

24. Пресметај го остатокот кој се добива при делење на $2^{4n+2}+2^4$ со $2^{2n+1}+2^{n+1}+1$ за секој природен број $n\geq 2$.

5. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

1. При делење на 860 со еден број се добива остаток 9, а при делење на 1200 со истиот тој број се добива остаток 16. Определи ги количниците при овие делења.

2. Определи го $\text{NZD}(942, 444)$.

3. Докажи дека дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати.

4. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $n = 111111$ и $m = 111111111$.

5. Нека a, b и c се природни броеви такви што
$$\text{NZD}(a,b) = 4,\ \text{NZD}(b,c) = 6 \text{ и } \text{NZS}(a,b,c) = 36000.$$
Која е најголемата можна вредност на $\text{NZD}(a,c)$?

6. Пресметај
$$A = \text{NZD}(1,91) + \text{NZD}(2,91) + \text{NZD}(3,91) + ... + \text{NZD}(90,91) + \text{NZD}(91,91).$$

7. Нека $a, b, c \in \mathbb{N}$ се такви што $\frac{ab}{a-b} = c$ и $\text{NZD}(a,b,c) = 1$. Докажи дека $a - b$ е точен квадрат.

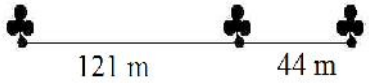
8. Андреј замислил три броја. Најголемиот заеднички делител на првиот и вториот број е 12, на првиот и третиот е 8, а на вториот и третиот е 20. Кои се најмалите броеви кои можел да ги замисли Андреј?

9. За детските градинки во еден град треба дневно да се обезбедат $120\,kg$ портокали, $260\,kg$ банани и $380\,kg$ јаболка.
а) Колку најмногу градинки може да постојат во овој град ако во секоја градинка се распоредува исто количество од секој вид овошје? (Бројот килограми од секој распореден вид овошје е природен број.)

б) Колку лимони треба да се обезбедат за сите градинки ако се троши пет пати помалку лимони од портокали и јаболка заедно?

10. Според Горјан 25% од неговите книги се романи, а $\frac{1}{9}$ се поезија. Горјан има повеќе од 50 и помалку од 100 книги. Колку книги има Горјан?

11. На права линија се засадени три дрва, така што растојанието од првото до второто дрво е $212\,m$, а од второто до третото е $44\,m$ (цртеж десно). Кој е најмалиот број дрва што треба уште да се засадат, така што растојанијата меѓу секои две соседни дрва ќе бидат еднакви?

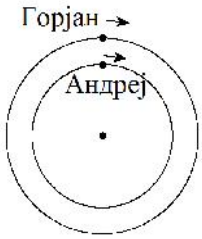


12. Производот на моите години и годините на мојот дедо е 2016. Определи колку години мојот дедо е постар од мене, ако најголемиот заеднички делител на моите и неговите години е двоцифрен број?

13. Определи ги сите двоцифрени броеви $\overline{ab}$, $a<b$, такви што најголемиот заеднички делител на $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ е $a+b$.

14. Најмалиот заеднички содржател на два двоцифрени броја е 2015. Определи го збирот на тие броеви.

15. Горјан и Андреј трчаат во една иста насока по кружни патеки со заеднички центар, при што на пичетокот тие се на минимално растојание еден од друг. Андреј целосно ја обиколува патеката на секои 20 секунди, а Горјан целосно ја обколува патеката на секои 28 секунди. По колку секунди тие ќе се наоѓаат на максимално можно растојание еден од друг?



16. Во кутија има најмалку 99, а најмногу 199 моливи. Колку моливи има во кутијата, ако е познато, дека сите моливи може да се распределат на 18 или на 24 ученици, така што секое дете ќе добие еднаков број моливи?

17. Гусарот Црнобрадиот сакал да ги преброи своите златници, кои биле повеќе од 250, а помалку од 300. Тој златниците ги наредил во купчиња од по 12, но два златника останале. Потоа Црнобрадот ги наредил златниците во купчиња од по 16, но повторно 2 останале. Колку златници имал Црнобрадиот?

18. Филип има кутија со џамлии. На прашањето колку џамлии има во кутијата, тој одговорил: „Ако ги бројам по две, или по три, или по четири, или по пет, или по шест, секогаш ми останува една џамлија. Ако ги бројам по седум не ми останува ниту една џамлија.“ Кој е најмалиот број џамлии во кутијата?

19. Дедото и вели на Ана: „Сега јас сум 2 пати повозрасен од тебе. Пред неколку години бев 3 пати повозрасен од тебе. Низ годините мојата возраст беше сооодветно 4 пати и 5 пати поголема од тебе.“ Ако знаеш, дека сега годините на дедото се цел двоцифрен број, а годините на Ана се цел број, определи ја возраста на дедото?

20. Матеј замислил четири различни природни броја, меѓу кои нема два заемно прости броја. Најмалиот заеднички содржател на четирите броја е 30, а нивниот производ не е точен квадрат и е делив со 24. Кои броеви ги замислил Матеј?

21. Пабло напишал 2011 броеви, првиот од кои е 1, а секој следен е за 3 поголем од претходниот: 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... Матео напишал 2011 броја, првиот од кои е 9 и секој следен е за 7 поголем од претходниот: 9, 16, 23, 30, ... Колку различни броеви запишале Пабло и Матео?

22. Најголемиот заеднички делител на два двоцифрени броја е 4, а најмалиот заеднички содржател е 144. Определи го збирот на овие броеви.

23. На пазар дедо Марко продава јаболка, круши и мандарини. Овошјето го продава на парче. На неговата тезга едновремено дошле двајца купувачи. Во тој момент дедо Марко имал 227 парчиња овошје. Првиот купувач купил $\frac{2}{3}$ од сите јаболка, $\frac{3}{10}$ од сите круши и $\frac{5}{7}$ од сите мандарини. Вториот купувач купил $\frac{1}{11}$ од сите јаболка, $\frac{1}{4}$ од сите круши и $\frac{1}{5}$ од сите мадарини. Колку парчиња јаболка, круши и

мадарини купиле првиот и вториот купувач. Колку парчиња јаболка, круши и мандарини имал дедо Марко пред нивното купување?

24. Определи ги сите природни броеви a такви што
$$806 \cdot \text{NZD}(a,806) + a \cdot \text{NZS}(a,806) \leq 2015a .$$

25. Докажи дека за секои природни броеви a,k,l важи
$$\text{NZD}(a^k - 1, a^l - 1) = a^{\text{NZD}(k,l)} - 1 .$$

26. Определи ги сите подредени парови природни броеви (a,b) такви што
$$\text{NZS}(a,b) = \text{NZD}(a,b) + 20,$$
$$5a - 7b = 4.$$

6. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

1. Определи ги сите прости броеви p за кои важи $2 < \frac{p}{16} < 3$.

2. Пресметај го збирот на сите прости броеви p за кои важи $\frac{1}{6} < \frac{p}{16} < \frac{1}{2}$ и определи колку пати тој збир е помал од вредноста на изразот
$A = 20 \cdot 13 - 13 \cdot 18 + 18 \cdot 11 - 11 \cdot 16 + 16 \cdot 9 - 9 \cdot 14 + 14 \cdot 7 - 7 \cdot 12 + 12 \cdot 5 - 5 \cdot 10$

3. Темјана редоследно ги запишува броевите $1, -3, 5, -7, 9, -11, \ldots$ (наизменично ги менува знаците на броевите кои по апсолутна вредност ја формираат низата непарни природни броеви). Колку броеви Темјана може да запише така што збирот на сите запишани броеви ќе биде делител на бројот 2023?

4. Определи шестцифрен број кој е запишан со цифрите 4, 5, 6, 7, 8 и 9 (секоја цифра е употребена по еднаш) и кој е делив со 2013.

5. Со кој најмал природен број треба да се помножи бројот 63000 така што добиниот производ ќе биде точен квадрат?

6. Дали постојат цифри a и b ($a \neq 0$) такви што дванаесетцифрениот број $\overline{abbaabbaabba}$ е квадрат на природен број?

7. Определи го најмалиот природен број n за кој $n(n+1)(n+2)(n+3)$ е делив со 120000.

8. За да ја играм новата комјутерска игра, треба да внесам иницијален код. Во упатството пишува, дека кодот се состои од четири цифри чиј производ е 2520, запишани во опаѓачки редослед. Кој е иницијалниот код на комјутерската игра?

9. Определи ги сите природни броеви деливи со 8 чиј збир на цифри е помал од 10, а производот на цифрите им е 12.

10. Теодор последователно ги собирал природните броеви, се додека не добил збир кој е трицифрен број запишан со една иста цифра. Колку броеви собрал Теодор?

11. Бројот 2022 е запишан како производ на пет различни цели броеви. Определи го најмалиот можен збир на овие пет броеви.

12. Бројот 2090 е запишан како производ на шест различни цели броеви. Определи го најмалиот можен збир на овие шест броеви.

13. Ако бројот 19250 се подели со некој број се добива остаток 11, а ако бројот 20302 се подели со истиот тој број се добива остаток 3. Определи ги количниците од овие делења?

14. Илина поделила квадрат со страна $180\,cm$ на квадрати со страна $n\,cm$, каде n е природен број поголем од 1. Темјана поделила квадрат со страна $204\,cm$ на квадрати со страна $n+5\,cm$. И во двата случаи не останале делови од големите квадрати. Колку квадрати исекле двете девојчиња?

15. Определи ги сите трицифрени прости броеви $\overline{xyz}$ за кои важи $x \cdot y \cdot z = 252$.

16. Определи го збирот на цифрите на природниот број $\overline{abcde}$, ако бројот $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}+\overline{ea}$ е точен квадрат.

17. Докажи дека при делење на прост број p со бројот 30 се добива остаток кој е прост број.

18. Ако p и p^2+2 се прости броеви, докажи дека и бројот p^3+2 е прост.

19. а) Дали постојат четири различни природни броја такви што збирот на секои три од нив е прост број?
    б) Дали постојат пет различни природни броеја такви што збирот на секои три од нив е прост број?

20. Определи сложен природен број s и прост природен број p, такви што $\frac{32^5 \cdot 16^4 \cdot 8^3}{64^2} = s^p$.

21. Определи прост број p и различни цели броеви a и b такви што $p + |ab| = 10$. Колку решенија има задачата (сметаме дека решението е исто ако броевите a и b ги заменат вредностите).

22. Определи ги сите непарни прости броеви p такви што збирот на сите нескратливи дропки со именител p кои се поголеми од 4 и се помали од 6 е еднаков на 100.

23. Познато е дека трицифрените броеви $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ имаат заеднички прост делител p.
    а) Докажи, дека p е делител на барем еден од броевите $a+b+c$, $a-b+c$ и $a-c$.
    б) Определи ги сите можни вредности за p кога $a \neq c$.

24. Се формираат сите различни производи од по два различни множители од првите пет прости броеви. Пресметај го квадратниот корен од производот на квадратните корени на добиените производи.

25. Нека a и b се два различни природни броја, поголеми од 1 такви што $b^2 + a - 1$ е делител на $a^2 + b - 1$. Докажи дека бројот $b^2 + a - 1$ има најмалку два различни прости делители.

26. Определи ги сите прости броеви помали од 1000 чиј збир на цифри е еднаков на 4.

27. Ако n е сложен број, докажи дека и $2^n - 1$ е сложен број.

28. Определи ги сите цели броеви n такви што бројот $n^3 - 2n^2 + 2n - 4$ е прост.

29. Определи ги сите тројки прости броеви (a,b,c) за кои важи

$$abc < ab + bc + ca\,. \qquad (1)$$

30. Определи го најмалиот природен број, кој истовремено е 2 пати поголем од квадрат на природен број и 5 пати поголем од петти степен на природен број.

31. За еден природен број ќе велиме дека и *надворешен*, ако сите степени во неговото канонично разложување се непарни. На пример, броевите 22, 23 и 24 формираат низа од три последователни надворешни броеви, бидејќи $22 = 2^1 \cdot 11^1, 23 = 23\ , 24 = 2^3 \cdot 3^1$. Колкава е најголемата должина на низа последователни надворешни броеви?

32. За еден природен број n ќе велиме дека е *суперпрост* ако разликата на секои два негови последователни позитивни делители е прост број. Определи ги сите суперпрости броеви.

33. Докажи дека постојат бесконечно многу прости броеви од вид $6k + 5$.

34. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот $2p^2 + p + 9$ е точен квадрат.

35. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот $37p^2 - 47p + 4$ е точен квадрат.

36. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот $p^2 - p + 1$ е точен куб.

37. Определи ги сите прости броеви p и q, за кои важи

$$p^3 + q^3 + 1 = p^2 q^2\,.$$

7. БРОЈ НА ДЕЛИТЕЛИ НА ПРИРОДЕН БРОЈ

1. Определи ги сите прости броеви p такви што бројот p^2+11 има точно шест различни делители.

2. Определи го најмалиот трицифрен број n запишан со различни цифри кој има точно три делители.

3. Определи го бројот на делителите на бројот 36270.

4. Определи ги сите броеви кои се помали од 100000 и кои имаат точно пет делители.

5. Нека $\overline{abc}$ е трицифрен прост број. Колку делители има шестцифрениот број $\overline{abcabc}$.

6. Определи го простиот број p ако се знае дека бројот $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 p$ има 90 делители.

7. Нека n е најмалиот природен број кој е делив со 60 и кој се запишува само со цифрите 0 и 7. Колку делители има бројот n?

8. Бројот n ги има следниве својства.
   - бројот $2n$ е точен квадрат,
   - бројот $3n$ е точен куб,
   - бројот $6n$ има 308 делители од кои еден е 81.

   Колку делители има бројот n?

9. Нека $n-1$ и $n+1$ се прости броеви и $n>18$, $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека бројот n има најмалку 8 природни делители.

10. Колку делители има бројот 30^{30} кои завршуваат со точно 15 нули.

11. За еден природен број n со $S(n)$ го означуваме бројот на природните броеви m, за кои $m+n$ е делител на mn. Определи го најголемиот од броевите $S(2014), S(2015)$ и $S(2016)$.

8. КОНГРУЕНЦИИ

1. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на природниот број n. Ако важи $S(n)=S(2n)$, докажи дека n е делив со 9.

2. Нека $S(x)$ е збирот на цифрите на природниот број x. Определи ги сите природни броеви x за кои важи
$$x+S(x)+S(S(x))+S(S(S(x)))=2007.$$

3. Нека m и n се природни броеви такви што бројот $mn+1$ е делив со 24. Докажи дека $m+n$ е делив со 24.

4. Нека $p=p_1p_2...p_n$ е производот на првите n прости броеви. Докажи дека за $n>1$ броевите $p+1$ и $p-1$ не се точни квадрати.

5. Определи ја цифрата на единиците на бројот $((((7^6)^5)^4)^3)^2$.

6. Нека a е цифрата на единиците на бројот 7^{456}, b е цифрата на единиците на бројот 8^{567} и c е цифрата на единиците на бројот 9^{678}. Определи го бројот $\overline{abc}$.

7. Ако a,b,c се природни броеви, докажи дека
$$7\mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3).$$

8. Определи ги сите природни брови n за кои бројот 2^n-1 е делив со 7. Докажи дека не постои природен број n за кој бројот 2^n+1 е делив со 7.

9. Докажи дека збирот $2^{444}+3^{666}$ е делив со бројот 5.

10. Определи го остатокот од делењето на $2^{25}\cdot 5^{15}$ со 3.

11. Колку е остатокот при делење на бројот $7^{50}+5^{70}$ со 12?

12. Определи го остатокот при делењето на бројот $2^{223}+2022^{2023}$ со бројот 7.

13. Определи ги последните две цифри на бројот 99^{2010}.

14. Докажи дека бројот $7^{2n}-4^{2n}$ е делив со 33 за секој природен број n.

15. Докажи дека збирот $1^{2023}+2^{2023}+3^{2023}+4^{2023}+5^{2023}$ е делив со 5, но не е делив со 10.

16. Определи ја цифрата на единиците на збирот
$$18^1+18^2+\ldots+18^{19}+18^{20}.$$

17. Определи ја цифрата на единиците на збирот
$$1^{2022}+2^{2022}+3^{2022}+\ldots+2021^{2022}.$$

18. Нека $a_n=2+3^{n-1}$. Да се определи најголемиот природен број k, за кој постои природен број m, таков што секој од броевите a_m, $a_{m+1},\ldots,a_{m+k}$ е прост.

9. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$15x + 25y = 14.$$

2. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$15x + 25y = 10.$$

3. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$13p + 3q = 2022.$$

4. Определи ги сите прости броеви a, b и c такви што
$$4a + 5b + 6c = 96.$$

5. Определи ги сите прости броеви p и q за кои важи
$$20p + 23q = 2023.$$

6. Дадена е равенката $8x + 3y = 2022$. Нека $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ се сите парови природни броеви кои ја задоволуваат дадената равенка. Пресметај го збирот $x_1 + x_2 + ... + x_n$.

7. Цифрата на единиците на еден трицифрен број е 2. Ако цифрата на единиците ја преместиме на местото на стотките, тогаш бројот ќе се намали за 36. Определи го збирот на цифрите на почетниот број?

8. Илија за 30 птици платил 30 евра. За секои три сипки платил по 1 евро, за секои два папагали платил по 1 евро и за секој славеј платил по 2 евра. Колку славеја купил Илија?

9. На еден натпревар се зададени 13 прашања. За точен одговор се добиваат 7 поени, за непотполн одговор се добиваат 3 поени и за погрешен одговор се добиваат 0 поени. Илија освоил 53 поени. Колку погрешни одговори дал Илија?

10. Определи ги сите природни броеви k и n такви што
$$(k^2+1)(n^2+1)-2(k+2)(n+3)+20=0.$$

11. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2-xy-2y^2-3x-3y=2014.$$

12. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1).$$

13. Определи ги природните броеви x,y,z за кои важи $x<y<z$ и
$$x^3+x^2z+x^2y+xyz+x^2+xz+xy+yz=2013.$$

14. Збир на последователни природни броеви е еднаков на 2023. Колку собирци може да има овој збир.

15. Бројот 2001 може да се запише како збир на два последователни броја: $1000+1001=2001$. На колку различни начини можеме бројот 2001 да го запишеме како збир на неколку последователни природни броеви.

16. Определи ги сите парови природни броеви такви што нивниот производ е десет пати поголем од нивниот збир.

17. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат прости броеви p и q такви што
$$n^2=p^2+pq+q^2.$$

18. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2+y^2+z^2=2004xyz.$$

19. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x!+2y=25.$$

20. Определи ги сите природни броеви a,b,c,d,e такви што
$$a!+b!+c!+d!=e!.$$

21. Докажи дека равенката
$$x^2 - 3y = 17$$
нема решенија во множеството цели броеви.

22. Докажи дека равенката
$$x^2 + 4x - 8y = 11$$
нема решенија во множество-то цели броеви.

23. Докажи дека равенката
$$3x^2 - 4y^2 = 13$$
нема решение во множеството цели броеви.

24. Докажи дека равенката
$$2x^2 - 5y^2 = 7$$
нема решение во множеството цели броеви.

25. Докажи дека равенката
$$3x^2 + 8 = y^2$$
нема решение во множеството цели броеви.

26. Докажи дека равенката
$$2x^2 - 4x - 5y^2 - 10y = 10$$
нема решение во множеството цели броеви.

27. Определи го збирот на решенијата на равенката
$$x^2 + 5y = 1234567\,.$$

28. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$2019x^4 + 2020y^4 = 2021^{2021}\,.$$

29. а) Определи ги остатоците кои ги даваат при делењето со 11 броевите од видот $n^5, n \in \mathbb{N}$.

    б) Докажи дека равенката $x^5 + y^5 + z^5 = 2022^{2022}$ нема решение во множеството природни броеви.

30. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$xy - y + 2x = 4 .$$

31. Во множеството цли броеви реши ја равенката
$$3(m^2 + n^2) - 7(m + n) = -4 . \quad (1)$$

32. Определи ги сите парови природни броеви чија разлика на квадрати е еднаква на 2023.

33. Определи ги вредностите на a за кои $\sqrt{a-3}$ и $\sqrt{a+12}$ се цели броеви.

34. Определи ги сите природни броеви кои кога ќе ги зголемиме за 5 добиваме точен квадрат и кога ќе ги намалиме за 11 повторно добиваме точен квадрат.

35. Определи ги должините на страните на правоаголен триаголник ако мерните броеви изразени во сантиметри им се цели броеви, а едната катета има должина $37\,cm$.

36. Природните броеви a,b и c се такви што
$$\frac{a}{5} + \frac{b}{13} - \frac{c}{31} = \frac{1}{2015} .$$
Определи ја најмалата можна вредност на c ,.

37. Определи правилна нескратлива дропка $\frac{a}{b}\,(a,b>0)$ таква, што
$$\frac{a+3}{b+3} = \frac{5a}{4b} . \quad (1)$$

38. Определи ги сите нескратливи дропки $\frac{a}{b}, a,b \in \mathbb{N}$, такви што
$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 2\frac{71}{80} .$$

39. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{13} .$$

40. Определи двоцифрен број кој е еднаков на удвоениот производ на

своите цифри.

41. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{5}.$$

42. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$xy+5y=x^2+10x+30.$$

43. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2-xy+2x-3y=6.$$

44. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$y^4+x=xy+8.$$

45. Определи ги сите природни броеви x, y, z такви што
$$x>y+1,\ y>z+1 \text{ и } \frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+2}+\frac{3}{z+3}=1.$$

46. Определи четирицифрен број кај кој првите две цифри се еднакви, последните две цифри се еднакви и кој е квадрат на природен број.

47. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот
$$2^4\cdot 3^{16}+5^2\cdot 3^{14}+3^n$$
е точен квадрат.

48. Определи ги сите четворки природни броеви (m,n,p,q) такви, што
$$3^m+3^n+3^p+3^q=3672.$$

49. Да се определи најмалиот природен број k, за кој равенката
$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=x+y+k$$
има решение во множеството природни броеви. За најденото k да се реши равенката.

50. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$2^x + 1 = y^2 .$$

51. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{x}{2^x} + \frac{y}{2^y} = \frac{z}{2^z} . \qquad (1)$$

52. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$p^2 - x! = 2 ,$$

каде p е прост број.

53. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p^2 + q = 101 .$$

54. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p^3 - q^7 = p - q .$$

55. Определи ги сите прости броеви p и природни броеви n, за кои

$$p(p-1) = 2(n^3 + 1) .$$

56. Определи ги сите прости броеви p и q, такви што

$$p^2 - pq - q^3 = 1 .$$

57. Реши ја равенката

$$(p-1)! + 1 = p^m ,$$

каде p е прост број, а m е при-роден број.

58. Определи ги сите правоаголни триаголници чии должини на страни се природни броеви и за кои важи дека производот на неговите катети е три пати поголем од неговиот периметар.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Секоја цифра на шестцифрен број, почнувајќи од цифрата на единиците, е еднаква на збирот на претходните две цифри (кои се наоѓаат лево од неа). Определи го трицифрениот завршеток на најголемиот број со ова својство.

   Решение. Нека $\overline{abcdef}$ е шестцифрен број кој го задоволува условот на задачата. Тогаш за цифрите c,d,e,f важи:

   $$c=a+b,\ d=b+c,\ e=c+d,\ f=d+e.$$

   Од овие равенства следува $f=5b+3a$. Сега, од условот $3a+5b\le 9$, следува дека $b=1$ или $b=0$. Притоа вредноста на a е поголема (со тоа и шестцифрениот број е поголем) ако $b=0$. Тогаш цифрата a може да биде 1, 2 или 3. Најголем шестцифрен број се добива за $a=3$. Ако $a=3$ и $b=0$, тогаш другите цифри се $c=3, d=3, e=6, f=9$. Значи, најголемиот број кој го задоволува условот на задачата е 303369, а неговиот трицифрен завршеток е 369.

2. За природните броеви k,m,n важи

   $$n^4+2n^3+kn^2=m^2-1. \qquad (1)$$

   Определи ги најмалата можна вредност на k и сите m,n за таа вредност на k.

   Решение. За $k=1,2,3$ имаме

   $$(n^2+n)^2<n^4+2n^3+kn^2+1<(n^2+n+1)^2,$$

   па затоа не постои m така што важи (1).

   За $k=4$ имаме

   $$(n^2+n)^2<n^4+2n^3+kn^2+1<(n^2+n+2)^2,$$

   што значи дека единствената вредност е $m=n^2+n+1$. Тогаш важи

   $$n^4+2n^3+4n^2=n^4+2n^3+3n^2+2n,$$

   од каде добиваме $n=2$ и затоа $m=7$.

3. Секој природен број може да се запише како збир на степени на бројот 2. Определи ги сите трицифрени броеви кои можат да се претста-

ват како збир на точно 9 степени на бројот 2.

Решение. Имаме

$$1023 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 .$$

Според тоа, за да добиеме трицифрен број кој е претставен како збир на девет степени на бројот 2, од горниот збир треба да отстраниме точно еден собирок. Јасно, тоа не може да се степените $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ бидејќи тој степен треба да биде поголем од 23. Значи, треба да отстраниме еден од степените $2^5, 2^6, 2^7, 2^8$ или 2^9, при што се добиваат броевите 991, 959, 895, 767 и 511.

4. Даден е производот $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2012 \cdot 2013$. Кој е најмалиот број множители што треба да се избришат така, што во добиениот производ цифрата на единиците да е 9?

Решение. Прво да ги разгледаме броевите од 1 до 2010. Треба да ги избришеме си броеви кај кои цифрата на единиците е 0, 2, 4, 5, 6 или 8, бидејќи во спротивно цифрата на единиците на производот ќе биде парна или 5. Имаме $6 \cdot 201 = 1206$ такви броеви. Понатаму, цифрата на единиците на секој од производите $1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9$, $11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ итн. е еднаква на 9. Освен тоа $9 \cdot 9 = 81$ и $1 \cdot 9 = 9$, што значи дека цифрата на единиците на производот на преостанатите броеви е 9. Да ги разгледаме последните три броја 2011, 2012 и 2013. Бројот 2011 може да остане, но треба да ги избришеме броевите 2012 и 2013. Според тоа, треба да избришеме најмалку $1206 + 2 = 1208$ броеви.

5. За еден природен број ќе велиме дека е *добар*, ако цифрата на единиците му е 0 или 1, цифрата на десетките му е 0, 1 или 2, цифрата на стотките му е 0, 1, 2 или 3, цифрата на илјадитите му е 0, 1, 2, 3 или 4 итн. Првите 10 добри броеви се 1, 10, 11, 20, 21, 100, 101, 110, 111 и 120. Добрите броеви ги запишуваме во низа во растечки редослед. Кој е стотиот добар број?

Решение. Да ја разгледаме низата од добри броеви. Првиот двоцифрен добар број од оваа низа е на второто место во низата. Првиот трицифрен добар број е на шестото место во оваа низа. Првиот четирицифрен добар број е на $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$-тото место во оваа низа, а првиот петцифрен добар број е на $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot = 120$-тото место во оваа низа. Значи, бараниот број има 4 цифри. Имаме, $100 = 24 \cdot 4 + 4$, па затоа првата цифра е 4 и бројот е 4020.

6. Збирот на некои 50 последователни природни броеви е точен квадрат. Определи ги двата најмали можни збира на такви 50 последователни броеви.

Решение. Нека $n-24, n-23, ..., n-1, n, n+1, ..., n+25$ се педесет последователни природни броеви чиј збир е точен квадрат. Јасно, $n \geq 25$ и збирот е

$$n-24+n-23+...+n-1+n+n+1+...+n+25 = 50n+25 = 25(2n+1).$$

Бидејќи 25 е точен квадрат, треба и бројот $2n+1$ да е точен квадрат. Од $2n+1 \geq 51$ и $2n+1$ е непарен број следува дека најмалиот точен квадрат на бројот $2n+1$ е 81, а следниот точен квадрат е 121. Во првиот случај имаме $2n+1=81$, па најмалиот збир е

$$25(2n+1) = 25 \cdot 81 = 2025 = 45^2,$$

а во вториот случај имаме $2n+1=121$ и следниот по големина збир е

$$25(2n+1) = 25 \cdot 121 = 3025 = 55^2.$$

7. Цифрата на десетките на квадратот на еден природен број е непарна. Докажи дека цифрата на единиците на квадратот на тој број е 6.

Решение. Нека разгледуваниот број е $n = 100z + 10y + x$, каде x и y се цифри, а z е природен број. Тогаш

$$\begin{aligned} n^2 &= 10000z^2 + 100y^2 + x^2 + 20xy + 200xz + 2000yz \\ &= 20(500z^2 + 5y^2 + xy + 10xz + 10yz) + x^2, \end{aligned}$$

од каде следува дека цифрата на десетките на бројот n^2 е непарна ако и само ако цифрата на десетките на бројот x^2 е непарна. Последното е можно ако и само ако $x=4$ или $x=6$, при што и во двата случаја цифрата на единиците на бројот n^2 е 6.

8. Докажи дека бројот $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, каде n е природен број поголем од 1, не може да е природен број.

Решение. Нека k е најголемиот природен број за кој $2^k \leq n$ и P е производот на сите непарни броеви кои се пмали или еднакви на n. Нека претпоставиме дека M е природен број. Тогаш бројот $2^{k-1}PM$ е природен број. Но, тој е збир во кој сите собирци освен собирокот

$2^{k-1}P\frac{1}{2^k}=\frac{P}{2}$ се природни броеви, што е противречност.

9. Определи го четирицифреniот број $\overline{abcd}$ за кој важи:

$$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2023.$$

Решение. Имаме

$$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2023,$$
$$(1000a+100b+10c+d)+(100a+10b+c)+(10a+b)+a=2023,$$
$$1111a+111b+11c+d=2023,$$

каде a,b,c,d се цифри. Јасно, $a=1$, па затоа

$$1111+111b+11c+d=2023,$$
$$111b+11c+d=912.$$

Сега, $11c+d\le 108$, па затоа мора да е $b=8$, бидејќи за $b\le 7$, добиваме $11c+d\ge 135$, што не е можно. Понатаму, $11c+d=24$, па затоа $c\le 2$. Ако $c=2$, тогаш $d=2$, а за $c=1$ добиваме $d=13$, што не е можно. Конечно, $\overline{abcd}=1822$.

10. Докажи дека постојат бесконечно многу подредени тројки (x,y,z) природни броеви такви што $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx+3$.

Решение. Равенството $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx+3$ последовател-но е еквивалентно со равенствата

$$(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)=6,$$
$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=6.$$

Сега е јасно дека подредените тројки $(x,y,z)=(k,k+1,k+2)$, каде $k\in\mathbb{N}$ го задоволуваат последното равенство, што значи дека го задоволуваат даденото равенство. Овие тројки се различни и ги има бесконечно многу.

11. Докажи дека за секој природен број n постојат најмалку 10 подредени тројки (x,y,z) природни броеви такви што $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{n}$.

Решение. Да забележиме дека ако за некоја тројка (x,y,z) важи $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, тогаш за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $\frac{1}{nx}+\frac{1}{ny}+\frac{1}{nz}=\frac{1}{n}$. Затоа е доволно за $n=1$ да најдеме 10 решенија од видот (x,y,z), бидејќи тогаш

за секој $n \geq 1$ ќе имаме по 10 различни решенија од видот (nx, ny, nz).

Бидејќи $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$, бараните 10 решенија се:

$$(2,3,6),\ (6,2,3),\ (3,6,2),\ (6,3,2),\ (2,6,3),$$
$$(3,2,6),\ (2,2,4),\ (2,4,2),\ (4,2,2),\ (3,3,3).$$

12. Определи ги сите природни броеви k кои може да се запишат како разлика на квадрати на два природни броја.

Решение. Ако $k = 2t+1$, каде $t \in \mathbb{N}$, тогаш имаме

$$k = 2t+1 = (t+1)^2 - t^2.$$

Ако $k = 4t$, каде $t \geq 2$ е природен број, тогаш имаме

$$k = 4t = (t+1)^2 - (t-1)^2.$$

Ако $k = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$, следува дека не е можно да е $k = 1$, бидејќи во спротивно треба да е $m+n = m-n = 1$, а тоа не е можно. Исто така, не може да е $k = 4$, бидејќи во спротивно мора да важи $m+n = m-n = 2$ (двата броја $m+n$ и $m-n$ се со иста парност), а тоа не е можно.

Да претпоставиме дека $k = 4t-2 = 2(2t-1)$, каде t е природен број, може да се запише како разлика на два квадрати, т.е.

$$k = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n).$$

Тоа значи дека точно еден од двата броја е парен, што не е можно бидејќи броевите $m+n$ и $m-n$ се со иста парност.

Според тоа, сите природни броеви кои може да се прикажат како разлика на два квадрати се од видовите $k = 2t+1, t \in \mathbb{N}$ и $k = 4t$, каде $t \geq 2$ е природен број.

2. ДЕЛИВОСТ. ОПШТИ ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ

1. Определи ги сите трицифрени природни броеви кои се такви што ако било кои две цифри им се заменат со било кои две други цифри (преостанатата цифра останува на своето место), тогаш новодобиениот број не е делив со 113.

   Решение. Сите трицифрени броеви кои се деливи со 113 се: 113, 226, 339, 452, 565, 678, 791 и 904. Кај сите овие броеви на местната вредност на стотките не се појавува цифрата 8 (цифрата 0 не ја земаме предвид бидејќи тогаш добиениот број не е трицифрен). На местната вредност на десетките не се појавуваат цифрите 4 и 8, а на местната вредност на единиците не се појавуваат цифрите 0 и 7. Бараните броеви на секоја местна вредност мора да имаат цифра која на таа местна вредност не се појавува во броевите деливи со 113. Значи, бараните броеви се: 840, 847, 880 и 887.

2. Ако на трицифрениот број кој е делив со 7 последните две цифри се еднакви, тогаш и збирот на неговите цифри е делив со 7. Докажи!

   Решение. Нека $7 \mid \overline{abb}$, каде $a,b \in \{0,1,2,...,9\}$ и $a \neq 0$. Имаме

   $$\overline{abb} = 100a + 10b + b = 100a + 11b = 98a + 7b + 2(a + b + b),$$

   па бидејќи $7 \mid \overline{abb}$, $7 \mid 98a + 7b$ и броевите 2 и 7 се заемно прости, заклучуваме дека $7 \mid a + b + b$.

3. Дали постојат цели броеви a,b,c и d такви што важи

   $$\begin{aligned} abcd - a &= 1357, \\ abcd - b &= 3571, \\ abcd - c &= 5713, \\ abcd - d &= 7135. \end{aligned} \tag{1}$$

   Решение. Нека претпоставиме дека постојат цели броеви a,b,c и d такви што важи (1). Од првото равенство следува дека $a \mid 1357$, па затоа a е непарен број. Слично, од второто, третото и четвртото равенство следува дека броевите b,c и d се непарни. Но, тогаш

$abcd - a$ е разлика на два непарни броја, па затоа е парен број, што противречи на $abcd - a = 1357$. Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат броеви a, b, c и d такви што важи (1).

4. Определи ги сите трицифрени природни броеви $\overline{abc}$, такви што $\sqrt{\overline{abc} + \sqrt{c}}$ исто така е природен број.

Решение. Ако $\sqrt{\overline{abc} + \sqrt{c}} = n$, $n \in \mathbb{N}$, тогаш $\sqrt{c} = n^2 - \overline{abc}$, што значи дека c мора да е точен квадрат, т.е. $c \in \{0,1,4,9\}$. Понатаму, од $n^2 = \overline{abc} + \sqrt{c}$ следува дека c не може да е 1 или 9, бидејќи тогаш n^2 ќе има цифра на единиците 2, што не е можно.

Ако $c = 0$, тогаш $n^2 = \overline{ab0}$, па како $10 \mid n^2$, добиваме дека $100 \mid n^2$. Значи, во овој случај решенија на задачата се броевите 100, 400 и 900.

Ако $c = 4$, тогаш $n^2 = \overline{ab4} + 2$. Значи, n е двоцифрен број помал од 30 кој завршува на цифрата 4 или 6. Постојат четири можности и тоа $n = 14, n = 16, n = 24, n = 26$ и притоа соодветно добиваме

$$14^2 - 2 = 194, 16^2 - 2 = 254, 24^2 - 2 = 574, 26^2 - 2 = 674 .$$

5. Докажи дека збирот на $2n+1$ последователни природни броеви е делив со $2n+1$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k+2n) &= 1 + 2 + \ldots + (k+2n) - (1 + 2 + \ldots + k - 1) \\ &= \frac{(k+2n+1)(k+2n)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + 4kn + 4n^2 + k + 2n - k^2 + k}{2} \\ &= 2kn + 2n^2 + n + k \\ &= 2n(k+n) + (k+n) \\ &= (k+n)(2n+1), \end{aligned}$$

од што следува тврдењето.

6. Збирот на 7 природни броја е 2012. Збирот на два од овие броеви е 755, а збирот на други два е 759. Докажи дека производот на седумте броја е делив со 8.

Решение. Бидејќи збирот на првите два броја е 755, едниот од нив е парен, а другиот е непарен. Аналогно, еден од другите два броја е

парен, а другиот е непарен. Бидејќи збирот на последните три броја е парен, добиваме дека барем еден од овие три броја е парен (во спротивно збирот ќе биде непарен). Така добивме, дека барем три од собирците се парни и затоа производот на сите броеви е делив со 8.

7. На таблата се запишани броевите 4, 14, 24, ..., 104. Откако е избришан еден од овие броеви, збирот на преостанатите броеви е делив со 11. Дали е можно да се избрише уште еден од преостанатите броеви така, што збирот на броевите кои ќе преостанат повторно да е делив со 11?
Решение. Збирот на запишаните броеви е
$$(4+104)+(14+94)+(24+84)+(34+74)+(44+64)+54=594.$$
Имаме, $594=11\cdot 54$. Бидејќи по бришењето на еден од запишаните броеви збирот на преостанатите броеви повторно е делив со 11, заклучуваме дека е избришан број кој е делив со 11. Меѓу запишаните броеви единствен таков број е бројот 44. Сега, бидејќи по бришењето на бројот 44 не останува број кој е делив со 11, не е можно уште еднаш да се избрише некој од преостанатите броеви така, што збирот на броевите кои потоа ќе преостанат повторно ќе биде делив со 11.

8. Анте на таблата во растечки редослед ги запишал сите парни броеви од 2 заклучно до 2010. Потоа Матеј ги избришал сите броеви, кои се деливи со 3. Колку броеви останале запишани на таблата?
Решение. Парни броеви од 1 до 2010 се $2010:2=1005$, што значи дека Анте на таблата запишал 1005 броја. Меѓу запишаните броеви се сите броеви од 1 до 2010 кои се деливи со 6. Бидејќи Матеј ги избришал сите парни броеви кои се деливи со 3, тој всушност ги избришал сите броеви од 1 до 2010 кои се деливи со 6. Значи, Матеј избришал $2010:6=335$ броеви. Според тоа, на таблата останале запишани $1005-335=670$ броеви.

9. На таблата се запишани 9 последователни трицифрени броеви, такви што во записите на ниту еден од нив не е цифрата 0. Потоа се запишани производите на цифрите на секој од запишаните броеви и е пресметан нивниот збир. Дали може на овој начин да се добие бројот:
а) 2013, б) 1125?
Решение. а) Бидејќи 0 не учествува во записите на деветте последователни природни броеви, заклучуваме дека цифрата на единиците на најмалиот од нив е 1. Значи, најмалиот од броевите е од видот $\overline{ab1}$, а

деветтиот е од видот $\overline{ab9}$. Тогаш збирот на производите на нивните цифри е

$$ab(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 45ab .$$

Равенството $45ab = 2013$ не е можно, бидејќи левата страна е делива со 5, а десната страна не е делива со 5.

б) Од равенството $45ab = 1125$, добиваме $ab = 25$. За $a = b = 5$ ги добиваме броевите 551, 552, ..., 559 чиј збир на производите на нивните цифри е 1125.

10. Определи го најголемиот 13-цифрен природен број, делив со 13, чии последни четири цифри се 2013. А кој е најмалиот таков 13-цифрен број?

Решение. Всушност бараме 10-цифрени броеви со цифра на единиците 2, кои се делив со 13. Најголемиот таков број се запишнува со најмногу можно цифри 9. Бидејќи бројот 1001 е делив со 13, заклучуваме дека бројот $999999 = 999 \cdot 1001$ исто така е делив со 13. Останува да го определиме најголемиот четирицифрен број со цифра на единиците 2, кој е делив со 13. Со непосредна проверка на броевите 9992, 9982, 9972, 9962, 9952, 9942, 9932, 9922, ... се наоѓа дака најголемиот таков број е 9932.

За најмалиот број постапуваме аналогно. Тој ќе има прва цифра 1, по што треба да следуваа што е можно повеќе цифри 0. Повтрно користиме дак бројот 999999 е делив со 13 и задачата се сведува на наоѓање на најмалиот четирицифрен број со прва цифра 1, последна цифра 2, кој е делив со 13. Лесно се добива дека тоа е бројот 1092.

Значи, бараните броеви се 9999999932013 и 1000000092013.

11. Определи го најмалиот природен број n, за кој бројот $(n+10)!$ завршува на 218 нули повеќе отколку бројот $n!$.

Решение. Бројот на нулите на крајот во производот на природни броеви зависи од бројот на множителите кои се деливи со 2 и бројот на множителите кои се деливи со 5. Бидејќи во низата природни броеви секој втор број е делив со 2, а секој петти е делив со 5, разликата во бројот на нулите на кои завршуваат броевите $(n+10)!$ и $n!$, е еднаква на бројот на нулите на кои завршува производот $(n+1)(n+2)...(n+10)$. Овој производ се состои од десет множители, кои се десет последователни природни броеви. Го бараме најмалиот природен број n за

кој бројот $(n+1)(n+2)...(n+10)$ е делив со 5^{218}. Бидејќи точно два од секои десет последователни природни броеви се деливи со 5, бараниот најмал n е во случајот кога најголемиот множител е еднаков на 5^{217}, т.е. $n+10=5^{217}$, од каде добиваме $n=5^{217}-10$.

12. Определи го најмалиот природен број, кој е делив со 17 и сите цифри му се еднакви.

Решение. Бидејќи $\overline{aa...a}=a\cdot\overline{11...1}$ и 17 е заемно прост број со секоја цифра a, добиваме дека 17 е делител на $\overline{aa...a}$, ако и само ако 17 е делител на $\overline{11...1}$. Со непосредна проверка се добива дека најмалиот природен број запишан само со цифрата 1, кој е делив со 17 е бројот $\underbrace{11...1}_{16}$.

13. Определи го бројот на сите 2011-цифрени броеви, деливи со 7, кои се запишуваат со помош на 2010 единици и една седумка.

Решение. Најмал број запишан само со цифрата 1 и е делив со 7 е бројот 111111. Бидејќи $2010:6=335$, можеме да запишеме 336 броеви деливи со 7 со 2010 единици и една цифра 7 и тоа:

$$7\underbrace{111111...111111}_{2010},\ 111111\underbrace{111111...111111}_{2004},$$

$$11111111111117\underbrace{111111...111111}_{1998},...,$$

$$\underbrace{111111...111111}_{1998}7111111111111,$$

$$\underbrace{111111...111111}_{2004}7111111,\underbrace{111111...1111117}_{2010}.$$

Други 2011-цифрени броеви, кои го задоволуваат условот на задачата не постојат, бидејќи ниту еден од броевите 1711111, 1171111, 1117111, 1111711, 1111171 не е делив со 7.

14. Определи го збирот на сите природни двоцифрени броеви кои се деливи со секоја од своите цифри.

Решение. Нека $\overline{xy}=10x+y$ е број кој е делив со секоја од своите цифри. Јасно, $x,y\neq 0$. Понатаму, од $x\,|\,10x+y$ следува $x\,|\,y$, па затоа $y=kx$. Аналогно, од $y\,|\,10x+y$ следува $y\,|\,10x$, па е $10x=my$. Оттука

добиваме $10x = my = kmx$, па затоа $km = 10$. Според тоа, $k = 1, 2, 5$, односно $y = x$ или $y = 2x$ или $y = 5x$. Но, $x, y \le 9$, па од последните равенства следува дека бараните броеви се: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 12, 24, 36, 48 и 15, а нивниот збир е едкаов на 630.

15. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што збирот $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a$ е делив со 3 и со 2011.

Решение. Броевите 3 и 2011 се заемно прости, па затоа разгледуваниот збир е делив со $3 \cdot 2011 = 6033$. Освен тоа,

$$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a \le 9999 + 999 + 99 + 9 = 11106 < 2 \cdot 6033,$$

па затоа $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 6033$. Според тоа,

$$1111a + 111b + 11c + d = 6033. \qquad (1)$$

За $a \ge 6$ важи $1111a + 111b + 11c + d \ge 6666 > 6033$, а за $a \le 4$ важи $1111a + 111b + 11c + d \le 4444 + 999 + 99 + 9 = 5551 < 6033$. Според тоа, $a = 5$ и со замена во (1) ја добиваме равенката

$$111b + 11c + d = 478. \qquad (2)$$

За $b \ge 5$ важи $111b + 11c + d \ge 555 > 478$, а за $b \le 3$ добиваме дека важи $111b + 11c + d \le 333 + 99 + 9 = 441 < 478$, па затоа $b = 4$ и со замена во (2) ја добиваме равенката

$$11c + d = 34. \qquad (3)$$

Единствено решение на последната равенка е $c = 3$ и $d = 1$. Според тоа, единствен број со саканите својства е бројот 5431.

16. Теодор има кутија чоколадни бомбони и кутија гумени бомбони. Претпладне тој изел $\frac{1}{3}$ од чоколадните бомбони и $\frac{2}{5}$ од гумените бомбони. Попладне Теодор изел $\frac{1}{3}$ од преостанатите чоколадни бомбони и $\frac{2}{5}$ од преостанатите гумени бомбони. Потоа Теодор ги пребројал бомбоните и видел дека во двете кутии останале вкупно 42 бомбони. Колку бонмбони изел Теодор? (Јасно, Теодор јаде цели бомбони, а не дел од бонбона.)

Решение. Теодор изел $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$ од чоколадните и $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{16}{25}$ од гумените бомбони. Значи, бројот на чоколадните бомбони е делив со 9, а бројот на гумените бомбони е делив со 25. Ако чоколадните бомбони се $9k$, а гумените се $25n$, тогаш Теодор изел $5k + 16n$ бон-

бони, а преостанале $4k+9n$ бомбони, т.е. $4k+9n=42$. Во последната равенка е јасно дека $2\mid n$ и $3\mid k$, па затоа $n=2m$ и $k=3p$ и со замена во равенката, по делењето со 6, добиваме $2p+3m=7$. Значи, m е непарен број и $0<3m<7$, па затоа $m=1$ и сега $p=2$. Според тоа, $k=6$ и $n=2$, што значи дека Теодор изел 62 бомбони.

17. Ако a,b и c се цели броеви и $5a-3b+12c=0$, докажи дека $(3b-2c)a$ е делив со 15.

Решение. Даденото равенство ќе го запишеме во видот $5a=3(b-4c)$. Броевите 3 и 5 се заемно прости, па од последното равенство следува дека $3\mid a$. Понатаму, $3b-2c=5(a-2c)$, па затоа $5\mid 3b-2c$. Конечно од $3\mid a$ и $5\mid 3b-2c$ следува $3\cdot 5\mid (3b-2c)a$, што и требаше да се докаже.

18. Природните броеви a и b го задоволуваат равенството $2a-5b=6$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот $w=a^2-7b^2$ и броевите за кои истата се достигнува.

Решение. Од равенството $2a-5b=6$ следува дека 2 е делител на b. Значи, постои природен број t таков што $b=2t$. Сега, со замена во $2a-5b=6$ добиваме $a=5t+3$. Понатаму, имаме

$$\begin{aligned} w &= a^2-7b^2 \\ &= (5t+3)^2-7(2t)^2 \\ &= 25t^2+30t+9-28t^2 \\ &= -3t^2+30t+9 \\ &= -3(t^2-10t-3) \\ &= -3((t-5)^2-25-3) \\ &= -3(t-5)^2+84 \\ &\le 84 \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $t=5$, т.е. ако и само ако $a=28$ и $b=10$. Според тоа, максималната можна вредност на дадениот израз е $w_{\max}=84$ и истата се достигнува за $(a,b)=(28,10)$.

19. Дадени се 13 различни цели броеви. Дали е точно дека секој од даде-

ните броеви е делив со 5, ако е познато дека, збирот на произволни
а) четири, б) десет,
од дадените броеви е делив со 5.

Решение. а) Нека дадените броеви се $a_1, a_2, a_3, ..., a_{12}, a_{13}$ и нека S е нивниот збир. Тогаш од

$$S - a_{13} = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + (a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12})$$

следува дека S и a_{13} при делење со 5 даваат еднакви остатоци. Но, тоа значи дека секои два од дадените броеви при делење со 5 даваат еднаков остаток r. Бидејќи збирот на произволни четири од дадените броеви е делив со 5, добиваме дека збирот на нивните остатоци при делење со 5 е делив со 5, т.е. $4r$ е делив со 5, од каде следува дека $r = 0$, т.е. секој од дадените броеви е делив со 5.

б) Збирот на секои десет од броевите 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 101, 111 и 121 е делив со 5, но ниту еден од нив не е делив со 5. Според тоа, одговорот на прашањето е одречен.

20. На таблата се запишани сите трицифрени броеви во чиј запис може да учествуваат само цифрите 1, 2 и 3. Некои цифри може да се повторуваат, а некои да не учествуваат во записот на некој број. Докажи дека збирот на овие броеви е делив со 37.

Решение. Цифрата на стотките на запишаните броеви може да е било која од цифрите 1, 2 или 3, а истото важи и за цифрите на десетките и единиците. Според тоа, на таблата се запишани $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ броеви. Притоа, кај 9 од овие броеви цифрата на единиците е 1, кај други 9 цифрата на десетките е 1 и кај трети 9 цифрата на стотките е 1. Истото важи и за цифрата 2 и за цифрата 3. Затоа збирот на запишаните броеви е еднаков на

$$(9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3) \cdot 100 + (9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3) \cdot 10 + (9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3) \cdot 1 = 54 \cdot 111$$

Но, $111 = 3 \cdot 37$, па затоа збирот на запишаните броеви е делив со 37.

21. Докажи дека, ако збирот на броевите $\overline{abc}$ и $\overline{xyz}$ е делив со 37, тогаш и бројот $\overline{abcxyz}$ е делив со 37.

Решение. Имаме:

$$\overline{abcxyz} = 1000\overline{abc} + \overline{xyz} = 999\overline{abc} + \overline{abc} + \overline{xyz} = 37 \cdot 27\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{xyz}).$$

Јасно, $37 \mid 37 \cdot 27\overline{abc}$ и како по претпоставка $37 \mid \overline{abc} + \overline{xyz}$, од последното равенство следува $37 \mid \overline{abcxyz}$.

22. Замислив природен број $A<500$ и цели броеви k,n,m такви што $A=(k-m)(m-n)(n-k)=k+m+n$. Определи ги сите можни вредности за A.

Решение. Ако m,n,k даваат три различни остатоци при делење со 3, тогаш десната страна на равенството $(k-m)(m-n)(n-k)=k+m+n$ е делива со 3, а левата страна не е делива со 3, противречност. Понатаму, ако два од броевите m,n,k даваат ист остаток при делење со 3, тогаш левата страна е делива со 3, па затоа и десната страна е делива со 3, т.е. и третиот број го дава истиот остаток при делење со 3. Но, тоа значи дека левата страна е делива со 27, т.е. $27\mid A$. Бидејќи $A>0$, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $k<m<n$. Нека $k-m=-3a,\ m-n=-3b,\ n-k=3(a+b)$, каде a,b се природни броеви. Бидејќи $A<500$, добиваме дека важи $ab(a+b)\le[\frac{499}{27}]=18$. Единствени можности за $ab(a+b)$ се $1\cdot1\cdot2,\ 1\cdot2\cdot3,\ 1\cdot3\cdot4,\ 2\cdot2\cdot4$, при што соодветните вредности на A се:

$$A=54=(15-18)(18-21)(21-15)=15+18+21,$$
$$A=162=(50-53)(53-59)(59-50)=50+53+59,$$
$$A=324=(103-106)(106-115)(115-103)=103+106+115,$$
$$A=432=(138-144)(144-150)(150-138)=138+144+150.$$

23. Ако a^2 е делив со $a-b$, докажи дека b^2 е делив со $a-b$.

Решение. Имаме, $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, што значи дека a^2-b^2 е делив со $a-b$. Сега, ако a^2 е делив со $a-b$, тогаш разликата на броевите a^2 и a^2-b^2 е делив со $a-b$, т.е. $a^2-(a^2-b^2)=b^2$ е делив со $a-b$.

24. Докажи дека, ако $ab+cd$ е делив со $a-c$, тогаш и $ad+bc$ е делив со $a-c$.

Решение. Важи

$$ab+cd-(ad+bc)=b(a-c)-d(a-c)=(a-c)(b-d).$$

Десната страна на горното равенство е делива со $a-c$, па затоа ако $ab+cd$ е делив со $a-c$, тогаш и $ad+bc$ е делив со $a-c$.

25. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броја е делив со 9

Решение. Меѓу три последователни броја $n-1, n, n+1$ еден е делив со 3. Имаме

$$\begin{aligned}(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 &= n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2-3n+1\\ &= 3n^3+6n = 3n(n^2+2) = 3n((n-1)(n+1)+3)\\ &= 9n+3(n-1)n(n+1),\end{aligned}$$

од каде следува тврдењето на задачата.

26. Докажи, дека бројот $A=\frac{a^4}{24}+\frac{a^3}{4}+\frac{11a^2}{24}+\frac{a}{4}$ е природен број за секој природен број a.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}A &= \frac{a^4+6a^3+11a^2+6a}{24} = \frac{a(a^3+6a^2+11a+6)}{24}\\ &= \frac{a(a^3+a^2+5a^2+5a+6a+6)}{24} = \frac{a(a^2(a+1)+5a(a+1)+6(a+1))}{24}\\ &= \frac{a(a+1)(a^2+5a+6)}{24} = \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{24}.\end{aligned}$$

Броителот е производ на четири последователни природни броја, од кои едниот е делив со 3. Потоа, меѓу броевите имаме два парни, од кои едниот е делив со 2, а другиот е делив со 4. Конечно, броителот е делив со 24, т.е. A е природен број.

27. Нека a, b, c се цели броеви. Докажи, дека ако бројот $a^3+b^3+c^3$ е делив со 6, тогаш и бројот $a+b+c$ е делив со 6.

Решение. Имаме:

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c) = a(a-1)(a+1)+b(b-1)(b+1)+c(c-1)(c+1).$$

Секој од собирците на десната страна на равенството е производ на три последователни цели броја. Меѓу три последователни природни броеви има најмалку еден парен и точно еден број делив со 3, па затоа нивниот производ е делив со 6. Според тоа, збирот на десната страна на равенството е делив со 6, па бидејќи $a^3+b^3+c^3$ е делив со 6, заклучуваме дека и $a+b+c$ е делив со 6.

28. Ако збирот на 2023 природни броеви е делив со 6, тогаш и збирот на нивните кубови е делив со 6. Докажи!

Решение. За секој природен број a важи

$$a^3 - a = (a-1)a(a+1).$$

Меѓу три последователни природни броеви има најмалку еден парен и точно еден број делив со 3, па затоа нивниот производ е делив со 6. Според тоа, бројот $a^3 - a$ е делив со 6. Оттука следува дека збирот

$$a_1^3 - a_1 + a_2^3 - a_2 + ... + a_{2023}^3 - a_{2023} = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{2023}^3 - \\ - (a_1 + a_2 + ... + a_{2023})$$

е делив со 6. Но, според условот збирот $a_1 + a_2 + ... + a_{2023}$ е делив со 6, па затоа и збирот $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{2023}^3$ е делив со 6, што и требаше да се докаже.

29. Определи го најмалиот природен број n за кој секоја од дропките

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, ..., \frac{30}{n+32}, \frac{31}{n+33}$$

е нескратлива.

Решение. Дадените дропки се нескратливи ако и само ако реципрочните дропки се нескратливи

$$\frac{n+9}{7}, \frac{n+10}{8}, \frac{n+11}{9}, ..., \frac{n+32}{30}, \frac{n+33}{31},$$

односно ако и само ако дропките

$$\frac{n+2}{7}, \frac{n+2}{9}, \frac{n+2}{10}, ..., \frac{n+2}{30}, \frac{n+2}{31}$$

се нескратливи (од секоја дропка одземаме 1). Сите овие дропки се нескратливи ако и само ако бројот $n+2$ е заемно прост со броевите 7, 8, 9, ..., 30 и 31. Јасно, бројот $n+2$ не е помал од 32, а не е ниту 32, 33, 34, 35 или 36, бидејќи сите овие броеви имаат заеднички делител со некој од броевите 7, 8, 9, ..., 30, 31. Значи, најмалиот таков $n+2$ е бројот 37, кој е заемно прост со наведените броеви. Конечно, најмалиот број n кој го задоволува условот на задачата е $n = 35$.

30. Определи го збирот на сите природни броеви n за кои дропката $\frac{6n+900}{2n-3}$ е природен број.

Решение. Имаме:

$$\frac{6n+900}{2n-3} = \frac{3(2n-3)+909}{2n-3} = 3 + \frac{909}{2n-3}.$$

Според тоа, дадената дропка е природен број ако и само ако дропката $\frac{909}{2n-3}$ е природен број. Дропката $\frac{909}{2n-3}$ е природен број ако $2n-3 \mid 909$.

Бидејќи $909 = 3 \cdot 3 \cdot 101$, делители на бројот 909 се: 1, 3, 9, 101, 303 и 909. Според тоа, $2n - 3 \in \{1, 3, 9, 101, 303, 909\}$, од каде добиваме

$$n \in \{2, 3, 6, 52, 153, 456\}.$$

Конечно, збирот на бараните броеви е еднаков на 672.

31. Определи ги сите цели броеви n за кои бројот $\frac{n+4}{3n-2}$ е цел број.

Решение. Нека $m = \frac{n+4}{3n-2}$ е цел број. Тогаш

$$3m = \frac{3n+12}{3n-2} = \frac{3n-2+14}{3n-2} = 1 + \frac{14}{3n-2},$$

што значи дека $\frac{14}{3n-2}$ е цел број. Според тоа, $3n - 2$ е делител на 14, па затоа $3n - 2 \in \{-14, -7, -2, -1, 1, 2, 7, 14\}$. Оттука добиваме $n \in \{-4, 0, 1, 3\}$. За $n = -4$ добиваме $m = 0$, за $n = 0$ добиваме $m = -2$, за $n = 1$ добиваме $m = 5$ и за $n = 3$ добиваме $m = 1$.

32. Определи ги сите цели броеви m за кои бројот $\frac{2m^2+7m-9}{m^2+m+1}$ е цел број.

Решение. Имаме

$$\frac{2m^2+7m-9}{m^2+m+1} = 2 + \frac{5m-11}{m^2+m+1},$$

од каде следува дека бројот $\frac{5m-11}{m^2+m+1}$ треба да е цел број. Бидејќи $m^2 + m + 1 > 0$ за секој m, добиваме дека $\frac{5m-11}{m^2+m+1} < 0$ за $m \le 2$ и $\frac{5m-11}{m^2+m+1} > 0$ за $m \ge 3$.

Нека $m \le 2$. Тогаш $n = \frac{5m-11}{m^2+m+1} < 0$ и бидејќи n е цел број, важи $\frac{5m-11}{m^2+m+1} \le -1$, односно $5m - 11 \le -m^2 - m - 1$, т.е. $m^2 + 6m - 10 \le 0$. Оттука следува $(m+3)^2 \le 19$, па затоа $-4 \le m + 3 \le 4$, $-7 \le m \le 1$. Со проверка добиваме дека разгледуваниот број е цел за $m \in \{-2, -1, 0, 1\}$.

Нека $m \ge 3$. Тогаш $n = \frac{5m-11}{m^2+m+1} > 0$ и бидејќи n е цел број, важи $\frac{5m-11}{m^2+m+1} \ge 1$, односно $5m - 11 \ge m^2 + m + 1$, т.е. $m^2 - 4m + 12 \le 0$, што не е можно бидејќи $m^2 - 4m + 12 = (m-2)^2 + 8 \ge 8$. Значи, во овој случај немаме решенија.

Конечно, разгледуваниот број е цел за $m \in \{-2,-1,0,1\}$.

33. Определи ги сите природни броеви x и y за кои $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}$ и $\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ се природни броеви, а разликата $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}-\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Според условот на задачата $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}$ и $\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ се природни броеви, па затоа треба $\frac{x^2+20}{x^2-20}$ и $\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}=\frac{5y^3+24}{5y^3-24}$ да се точни квадрати на природни броеви.

Имаме, $\frac{x^2+20}{x^2-20}=\frac{x^2-20+40}{x^2-20}=1+\frac{40}{x^2-20}$, од каде, бидејќи $x^2-20>0$, следува дека $x^2=20+k$, каде $k \mid 40$. Јасно, $k \in \{1,2,4,5,8,10,20,40\}$ и со непосредна проверка добиваме само за $k=5$ десната страна на последното равенство е точен квадрат и притоа $x=5$ и $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}=3$.

Од друга страна, $\frac{5y^3+24}{5y^3-24}=1+\frac{48}{5y^3-24}$, од каде, бидејќи $5y^3-24>0$, следува $y^3=\frac{24+m}{5}$, каде $m \mid 48$. Јасно $m \in \{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$ и со непосредна проверка добиваме дека само за $m=16$ десната страна на последното равенство е точен куб и притоа $y=2$ и

$$\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}=\sqrt{\frac{5y^3+24}{5y^3-24}}=2.$$

Конечно, бидејќи

$$\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}-\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}=3-2=1^2,$$

добиваме дека единствени природни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата се $x=5$ и $y=2$.

34. Определи ги сите парови природни броеви (x,y) за кои $\frac{1+x^3}{1+2xy^2}$ е при-

роден број.

Решение. Ќе го користиме равенството

$$x^2(1+2xy^2)-2y^2(1+x^3)=x^2-2y^2.$$

Нека $\frac{1+x^3}{1+2xy^2}\in\mathbb{N}$. Тогаш $1+x^3\geq 1+2xy^2$, па затоа $x^2\geq 2y^2$. Освен тоа, согласно горното равенство $1+2xy^2$ е делител на x^2-2y^2, па затоа

$$1+2xy^2\leq x^2-2y^2.$$

Посленото е еквивалентно на неравенството

$$2y^2(x+1)\leq (x+1)(x-1),$$

па затоа

$$2y^2\leq x-1. \qquad (1)$$

Понатаму, ќе го искористиме равенството

$$x(1+2xy^2)-2y^2(x^2-2y^2)=x+4y^4.$$

Од последните две равенства заклучуваме, дека $1+2xy^2$ е делител на $x+4y^4$, што значи дека $1+2xy^2\leq x+4y^4$, односно

$$x(2y^2-1)\leq 4y^4-1=(2y^2+1)(2y^2-1).$$

Сега, ако скратиме со $2y^2-1$, добиваме

$$x\leq 2y^2+1. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува, дека $x=2y^2+1$. Според тоа, сите решенија на задачата се $(x,y)=(2t^2+1,t)$, каде $t\in\mathbb{N}$.

35. Докажи ги следниве тврдења:

а) $99\,|\,10^{10}-1$, б) $100\,|\,11^{10}-1$, в) $620\,|\,125^5-25^6$,

г) $33\,|\,2^{55}+1$, д) $13\,|\,3^{2013}-1$.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned}10^{10}-1&=(10^2)^5-1=100^5-1\\&=(100-1)(100^4+100^3+100^2+100+1)\\&=99\cdot(100^4+100^3+100^2+100+1),\end{aligned}$$

па затоа $99\,|\,10^{10}-1$.

б) Имаме

$$11^{10}-1=(11-1)(11^9+11^8+11^7+11^6+11^5+11^4+11^3+11^2+11+1)$$
$$=10\cdot(11^9+11^8+11^7+11^6+11^5+11^4+11^3+11^2+11+1).$$

Во заградата на последниот израз секој од собирците завршува на цифрата 1, па како имаме 10 собирци, збирот завршува на цифрата 0, т.е. изразот во заградата е делив со 10. Според тоа, бројот $11^{10}-1$ е делив со $10\cdot 10=100$.

в) Имаме

$$125^5-25^6=(5^3)^5-(5^2)^6=5^{15}-5^{12}=5^{12}(5^3-1)$$
$$=5^{12}\cdot(5-1)(5^2+5+1)=5^{12}\cdot 4\cdot 31$$
$$=5^{11}\cdot 5\cdot 4\cdot 31=5^{11}\cdot 620,$$

па затоа $620\,|\,125^5-25^6$.

г) Имаме

$$2^{55}+1=(2^5)^{11}+1=32^{11}+1$$
$$=(32+1)(32^{10}-32^9+32^8-32^7+\ldots+32^3-32+1)$$
$$=33\cdot(32^{10}-32^9+32^8-32^7+\ldots+32^3-32+1),$$

па затоа $33\,|\,2^{55}+1$.

д) Имаме

$$3^{2013}-1=3^{3\cdot 671}-1=(3^3)^{671}-1=27^{671}-1$$
$$=(27-1)(27^{670}+27^{669}+27^{668}+\ldots+27^2+27+1)$$
$$=26\cdot(27^{670}+27^{669}+27^{668}+\ldots+27^2+27+1),$$

и како $13\,|\,26$ заклучуваме дека $13\,|\,3^{2013}-1$.

36. Докажи, дека изразот $A=(2\cdot 5^7-5\cdot 2^7)^{83}-(2\cdot 5^7)^{83}-(5\cdot 2^7)^{83}$ е делив со 10^{83}.

Решение. Имаме:

$$A=10^{83}(5^6-2^6)^{83}-10^{83}(5^6)^{83}-10^{83}(2^6)^{83}$$
$$=10^{83}((5^6-2^6)^{83}-(5^6)^{83}-(2^6)^{83}),$$

од што следува тврдењето на задачата.

37. Докажи дека за секој природен број n барем еден од броевите $3^{3n}+2^{3n}$ и $3^{3n}-2^{3n}$ е делив со 35.

Решение. Ако n е непарен број, тогаш

$$3^{3n}+2^{3n}=27^n+8^n=(27+8)(27^{n-1}-27^{n-2}\cdot 8+\ldots-27\cdot 8^{n-2}+8^{n-1}),$$

па затоа $35\mid 3^{3n}+2^{3n}$. Ако $n=2k$, за некој природен број k, тогаш

$$\begin{aligned}3^{3n}-2^{3n}&=3^{6k}-2^{6k}=729^6-64^6\\&=(729-64)(729^{k-1}+729^{k-2}\cdot 64+\ldots+729\cdot 64^{k-2}+64^{k-1})\\&=35\cdot 19(729^{k-1}+729^{k-2}\cdot 64+\ldots+729\cdot 64^{k-2}+64^{k-1})\end{aligned}$$

и затоа $35\mid 3^{3n}-2^{3n}$.

38. Нека n е природен број. Докажи дека бројот $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)$ е делив со 2^n, но не е делив со 2^{n+1}.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)\ldots(n+n)&=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}=\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\\&=\frac{2^n\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)\cdot(3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\\&=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1),\end{aligned}$$

па затоа бројот е делив со 2^n, но не е делив со 2^{n+1}.

39. Докажи дека $9\mid 2^{4n+1}-2^{2n}-1$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. За секој $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$\begin{aligned}2^{4n+1}-2^{2n}-1&=2\cdot 2^{4n}-2^{2n}-1=2\cdot(2^{2n})^2-2^{2n}-1\\&=2\cdot(2^{2n})^2-2\cdot 2^{2n}+2^{2n}-1\\&=2\cdot 2^{2n}(2^{2n}-1)+(2^{2n}-1)\\&=(2^{2n}-1)(2^{2n+1}+1)\\&=(4^n-1)(2+1)(2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ldots+2^2-2+1)\\&=3\cdot(4-1)(4^{n-1}+4^{n-1}+\ldots+4+1)(2^{2n}-2^{2n-1}+\ldots+2^2-2+1)\\&=9\cdot(4^{n-1}+4^{n-1}+\ldots+4+1)(2^{2n}-2^{2n-1}+\ldots+2^2-2+1),\end{aligned}$$

па затоа $9\mid 2^{4n+1}-2^{2n}-1$.

40. Нека n е природен број. Докажи дека $72\mid 3^n+63$ ако и само ако n е парен број.

Решение. Нека n е парен природен број. За $n=2$, важи $3^2+63=72$, па затоа $72 \mid 3^2+63$. Нека $n=2k, k\geq 2$. Тогаш

$$\begin{aligned} 3^n+63 &= 3^{2k}+63 = 9^k-9+9+63 = 9\cdot(9^{k-1}-1)+72 \\ &= 9\cdot(9-1)(9^{k-2}+9^{k-3}+\ldots+9+1)+72 \\ &= 72\cdot(9^{k-2}+9^{k-3}+\ldots+9+2), \end{aligned}$$

па затоа $72 \mid 3^n+63$.

Обратно, нека $72 \mid 3^n+63$. Имаме

$$3^n+63 = 3^n-9+72 = 3^2(3^{n-2}-1)+72 = 9\cdot(3^{n-2}-1)+72,$$

па затоа $72 \mid 9\cdot(3^{n-2}-1)$, од каде обиваме дека $8 \mid 3^{n-2}-1$. Но,

$$3^{n-2}-1 = (3-1)(3^{n-3}+3^{n-4}+\ldots+3+1),$$

па затоа $8 \mid 3^{n-2}-1$ ако $4 \mid 3^{n-3}+3^{n-4}+\ldots+3+1$. Ако n е непарен број, т.е. $n=2k-1, k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$3^{n-3}+3^{n-4}+\ldots+3+1 = 3^{2k-4}+3^{2k-5}+\ldots+3^2+3+1$$

па како збирот има непарен број непарни собирци, тој е непарен број и затоа $4 \nmid 3^{n-3}+3^{n-4}+\ldots+3+1$. Значи, n мора да е парен број, т.е. $n=2k$, што и требаше да се докаже.

41. Докажи дека бројот $A=2222^{5555}+5555^{2222}$ е делив со 7.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} A &= 2222^{5555}+5555^{2222} \\ &= (2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222}). \end{aligned}$$

Понатаму, важи

$$\begin{aligned} 2222^{5555}+4^{5555} &= (2222+4)B = 2226B = 7\cdot 318B, \\ 5555^{2222}-4^{2222} &= (5555-4)C = 5551C = 7\cdot 793C, \\ 4^{5555}-4^{2222} &= 4^{2222}(4^{3333}-1) = 4^{2222}((4^3)^{1111}-1) \\ &= 4^{2222}(64^{1111}-1) = 4^{2222}\cdot 63D \\ &= 4^{2222}\cdot 7\cdot 9D. \end{aligned}$$

Конечно, од горните равенства следува $7 \mid A$

42. Дадени се 11 цели броеви, такви што: ако го отстраниме било кој од

броевите, тогаш преостанатите 10 броја може да се поделат во две групи од по 5 броја со еднакви збирови. Докажи дека сите 11 броеви се еднакви.

Решение. Нека дадените броеви се $a_1, a_2, ..., a_{11}$. Ако го одземеме a_1 од сите броеви добиваме $b_1 = a_1 - a_1 = 0, b_2 = a_2 - a_1, ..., b_{11} = a_{11} - a_1$. Лесно се гледа дека добиените броеви исто така го задоволуваат условот на задачата. Сега, ако $S = b_1 + b_2 + ... + b_{11}$, од условот следува дека $S - b_1, S - b_2, ..., S - b_{11}$ се парни броеви. Значи, сите броеви $b_1, b_2, ..., b_{11}$ се со еднаква парност (парноста на S). Но, $b_1 = 0$, па затоа сите броеви $b_1, b_2, ..., b_{11}$ се парни. Ако овие броеви ги поделиме со 2, добиените броеви повторно го задоволуваат условот на здачата и повторно првиот меѓу нив е еднаков на 0. Според тоа, и овие броеви се парни. Повторно делиме со 2 итн. Овоа постапка може да се повторува бесконечно многу пати сако ако $b_1 = b_2 = ... = b_{11} = 0$, што значи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_{11}$.

43. Секој од броеите $a_1, a_2, ..., a_n$ е еднаков на 1 или на -1 и важи

$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0.$$

Докажи дека $4 \mid n$.

Решение. Збирот $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1$ има n собирци и секој од нив е еднаков на 1 или на -1. Бидејќи збирот е еднаков на 0, добиваме дека бројот собирците еднакви на 1 е еднаков на бројот на собирците еднакви на -1, што значи дека $n = 2k$. Понатаму,

$$(a_1a_2)(a_2a_3)...(a_{n-1}a_n)(a_na_1) = (a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n)^2 = 1.$$

Од друга страна бидејќи k од множителите на левата страна се еднакви на -1, а другите се еднакви на 1, заклучуваме дека

$$(a_1a_2)(a_2a_3)...(a_{n-1}a_n)(a_na_1) = (-1)^k.$$

Значи, $(-1)^k = 1$, што значи дека $k = 2m$, односно $n = 2k = 4m$.

3. ПОСЕБНИ ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ

1. Секоја буква во зборот АКРА е заменета со една од цифрите 1, 4 и 6, така што на различните букви соодветствуваат различни букви, а на исти цифри соодветствуваат исти букви. Ако добиениот четирицифрен број е делив со 3, која цифра е запишана на местото на буквата А?
   Решение. Ако А е 1, тогаш збирот на цифрите на бројот ќе биде $2\cdot 1+4+6=12$, ако А е 4, тогаш збирот на цифрите на бројот ќе биде $2\cdot 4+1+6=15$ и ако А е 6, тогаш збирот на цифрите на бројот ќе биде $2\cdot 6+1+4=17$. Еден број е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3, па затоа на местото на буквата А може да е некоја од цифрите 1 и 4.

2. Докажи дека бројот 1234567891011121314...201120122013 е делив со 3.
   Решение. Дадениот број е добиен со последователно запишување на броевите од 1 до 2013. Бидејќи 2013 е делив со 3, дадениот број може да се подели на блокови од по три последователни природни броја:
   $$123|456|789|101112|131415|..|201120122013.$$
   Притоа имаме $2013:3=671$ блокови составени од три последователни природни броја. Меѓу три последователни броја еден е делив со 3, еден при делење со 3 дава остаток 1 и еден при делење со 3 дава остаток 2. Тоа значи дека збирот на цифрите при делење со 3 на едниот број дава остаток 0, на другиот број дава остаток 1 и на третиот број дава остаток 2. Според тоа, збирот на цифрите на трите последователни броја, кој е еднаков на збирот на цифрите на еден блок при делење со 3 дава остаток еднаков на остатокот при делење со 3 на збирот $0+1+2=3$, што значи остаток 0. Значи, збирот на цифрите на секој блок е делив со 3, па затоа и збирот на цифрите на сите 671 блокови е делив со 3, т.е. дадениот број е делив со 3.

3. Со помош на бројот $100!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100$ се формира нов број, еднаков на збирот на неговите цифри. Од вториот број се формира трет број, еднаков на збирот на цифрите на вториот број. Од третиот број се формира четврт број еднаков на збирот на цифрите на третиот број

итн. Продолжувајќи ја постапката добиваме едноцифрен број. Кој е тој број?

Решение. Јасно, бројот 100! е делив со 9, па затоа збирот на неговите цифри е делив со 9, т.е. вториот број е делив со 9. На потполно ист начин заклучуваме дека третиот, четвртиот итн. последниот број, кој е едноцифрен број различен од 0 е делив со 9. Но, едноцифрен број различен од 0 и делив со 9 е само бројот 9 и тоа е бараниот број.

4. Ако трицифреniот број $\overline{1x2}$ е делив со 4, а трицифреniот број $\overline{16x}$ е делив со 3, определи ја цифрата x.

Решение. Од признакот за деливост со 4, следува дека бројот $\overline{x2}$ е делив со 4, т.е. $x \in \{1,3,5,7,9\}$. Од признакот за деливост со 3 следува дека $1+6+x$ е делив со 3, т.е. $x \in \{2,5,8\}$.Од $x \in \{1,3,5,7,9\}$ и $x \in \{2,5,8\}$ следува дека $x = 5$.

5. Определи ги сите природни броеви кои се деливи со 8, збирот на цифрите им е 7, а производот им е 6.

Решение. Бидејќи производот на цифрите на бројот е 6, секоја негова цифра е фактор на бројот 6, што значи дека цифрите припаѓаат на множеството $\{1,2,3,6\}$. Сега, бројот е делив со 8, па затоа тој е парен, што значи дека цифрата на единиците му е 2 или 6.

Ако цифрата на единиците е 6, тогаш збирот на преостанатите цифри е еднаков на $7-6=1$. Затоа бараниот број е 16.

Ако цифрата на единиците е 2, тогаш производот на преостанатите цифри мора да е 3, што значи дека една од неговите цифри мора да е 3, а другите цифри мора да се еднакви на 1 и нивниот збир треба да е $7-(2+3)=2$. Значи, цифрите на бројот се 2, 3, 1 и 1. Парни броеви запишани со овие цифри се: 1132, 1312 и 3112. Од овие три броја само броевите 1312 и 3112 се деливи со 8.

Конечно, решение на задачата се броевите 16, 1312 и 3112.

6. Определи ги цифрите x и y така што производот на трицифрените броеви $\overline{12x}$ и $\overline{34y}$ е делив со 15.

Решение. Од $15 | \overline{12x} \cdot \overline{34y}$ следува дека барем еден од броевите е делив со 3 и барем еден е делив со 5.

1) Нека $5 | \overline{12x}$. Ако $x = 0$, тогаш $15 | 120$, па затоа $y \in \{0,1,2,...,9\}$.

Ако $x=5$, тогаш мора да е $3|\overline{34y}$, па затоа $y\in\{2,5,8\}$.

2) Нека $5|\overline{34y}$. Ако $y=0$, тогаш мора да е $3|\overline{12x}$, па затоа $x\in\{0,3,6,9\}$. Ако $y=5$, тогаш $15|345$, па затоа $x\in\{0,1,2,...,9\}$.

Според тоа, задачата има 24 различни решенија, бидејќи производите $120\cdot340$, $120\cdot345$ и $125\cdot345$ се јавуваат по два пати.

7. Определи ги сите природни броеви $\overline{abcdef}$ кои се запишани со цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6, така што ниту една цифра во записот не се појавува два пати и важи: $2|\overline{ab}$, $3|\overline{abc}$, $4|\overline{abcd}$, $5|\overline{abcde}$ и $6|\overline{abcdef}$.

Решение. Бидејќи во записот на бараните броеви се само цифрите од 1 до 6, од условот $5|\overline{abcde}$ следува $e=5$. Понатаму, броевите $\overline{ab}$, $\overline{abcd}$ и $\overline{abcdef}$ се деливи со 2, па затоа цифрите b,d и f мора да се во некој редослед цифрите 2, 4 и 6. Значи, цифрите a и c се во некој редослед цифрите 1 и 3.

Ќе ги разгледаме случаите кога цифрата b е некоја од цифрите 2, 4 или 6.

1) Нека $b=2$, т.е. бројот е од видот $\overline{a2cd5f}$. Бидејќи бројот $\overline{a2c}$ е делив со 3, збирот на цифрите $a+2+c$ е делив со 3, што е точно бидејќи цифрите a и c се во некој редослед цифрите 1 и 3. Ако $a=1$ и $c=3$, тогаш бројот е од видот $\overline{123d5f}$, а ако $a=3$ и $c=1$, тогаш б ројот е од видот $\overline{321d5f}$. Броевите $\overline{123d}$ и $\overline{321d}$ треба да се деливи со 4, а тоа е можно само ако и во двата случаја $d=6$ и тогаш $f=4$. Броевите 123654 и 321654 се деливи со 6 бидејќи се парни, збирот на цифрите им е 21 и е делив со 3.

2) Нека $b=4$, т.е. бројот е $\overline{a4cd5f}$. Тогаш бројот $\overline{a4c}$ треба да е делив со 3, што значи дека збирот на неговите цифри $a+4+c$ треба да е делив со 3, што не е можно бидејќи цифрите a и c се во некој редослед цифрите 1 и 3.

3) Нека $b=6$, т.е. бројот е $\overline{a6cd5f}$. Тогаш бројот $\overline{a6c}$ треба да е делив со 3, што значи дека збирот на неговите цифри $a+6+c$ треба да е делив со 3, што не е можно бидејќи цифрите a и c се во некој редослед цифрите 1 и 3.

8. Определи ги сите природни броеви од видот $\overline{xxyz}$ кои се деливи со 36 и $\overline{xyz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}$ е делив на 57.

   Решение. Имаме

   $$\overline{xyz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}=111(x+y+z).$$

   Бидејќи $57=3\cdot 19$, а $111=3\cdot 37$, зклучуваме дека $x+y+z$ е делив со 19. Но, $x+y+z\le 27$, па затоа $x+y+z=19$. Освен тоа $2x+y+z$ е делив со 9, што значи $x+19$ е делив со 9. Од $9\mid x+19$ следува $x=8$. Значи, $y+z=11$ и $\overline{yz}$ е делив со 4. Од последните два услови следува дека $\overline{yz}=56$ или $\overline{yz}=92$. Конечно, $\overline{xxyz}=8856$ или $\overline{xxyz}=8892$.

9. Определи го најмалиот седумцифрен број од видот $\overline{17x679y}$ кој е делив со 45.

   Решение. Еден број е делив со 45 ако и само ако е делив со 5 и со 9. Според тоа, мора да е $y=0$ или $y=5$ и $9\mid 1+7+x+6+7+9+y$, т.е. $9\mid 30+x+y$. Ако $y=0$, тогаш $x=6$, а ако $y=5$, тогаш $x=1$. Од добиените броеви помал е бројот 1716795 и тоа е бараниот број.

10. Матео ја заборавил четирицифрената шифра на својот телефон, но се сеќава на некои детали. Бројот е делив со 15, но не е делив со 6, а цифрите се намалуваат од цифрата на илјадитите кон цифрата на единиците. Која е шифрата на телефонот на Матео?

    Решение. Бројот е делив со 15, па затоа е делив со 5. Значи, цифрата на единиците мора да е 0 или 5. Но, бројот не е делив со 2, па затоа цифрата на единиците е 5. Цифрите се намалуваат од цифрата на илјадитите кон цифрата на единиците. Според тоа, преостанатите три цифри мора да се поголеми од 5, па затоа истите може да ги избереме од множеството $\{6,7,8,9\}$. Можните шифри на телефонот на Матео се: 9875, 9865, 9765 и 8765. Понатаму, бројот е делив со 15, па затоа тој е делив со 3. Тоа значи дека збирот на неговите цифри е делив со 3. Од четирите броја само збирот на цифрите на бројот 9765 е делив со 3, па затоа шифрата на телефонот на Матео е 9765.

11. Во бројот $\overline{KALIAKRA}$ сите цифри се непарни и на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Ако бројот е делив со 45, кој е најголемиот можен број од

дадениот вид?

Решение. Дадениот број е делив со 5, па како сите цифри се непарни, заклучуваме дека $A=5$. Значи бројот е од видот $\overline{K5LI5KR5}$ и на буквите K,L,I и R, во некој редослед, им соодветствуваат цифрите 1, 3, 7 и 9. Сега, збирот на цифрите на бројот е еднаков на

$$3\cdot 5+K+(K+I+L+R)=15+K+(1+3+7+9)=35+K\,.$$

Но, бројот е делив со 9, па затоа збирот $35+K$ е делив со 9 и како $K\in\{1,3,7,9\}$, заклучуваме дека $K=1$. Според тоа, разгледуваните броеви се од видот $\overline{15LI51R5}$ и на буквите L,I и R соодветствуваат цифрите 3, 7 и 9, во некој редослед. Конечно, бидејќи се бара најголемиот можен број, одговорот е дека тоа е бројот 15975135.

12. Во бројот 65432789 прецртај најмал можен број цифри така што добиениот број ќе биде делив со 36. Кој број го доби?

Решение. Бидејќи $36=4\cdot 9$ и броевите 4 и 9 се заемно прости заклучуваме дека еден број е делив со 36 ако и смо ако е делив со 4 и е делив со 9. Понатаму, еден број е делив со 4 ако неговиот двоцифрен завршеток е делив со 4. Според тоа, цифрата 9 мора да ја пречкртаме, па како двоцифрениот завршеток на бројот 6543278 е 78 и тој не е делив со 4, мора да ја пречкртаме и цифрата 7. Досега пречкртавме две цифри и го добивме бројот 654328 кој е делив со 4. Понатаму, еден број е делив со 9 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 9. Збирот на цифрите на бројот 654328 е еднаков на 28. Броеви деливи со 9, а помали од 28 се 9, 18 и 27. Но, во записот на бројот 654328 не се содржи цифрата 1, па со пречкртување на една цифра не може да се добие број делив со 9. Значи, треба да пречкртаме цифри така што збирот на цифрите на добиениот број ќе биде 18, што значи збирот на пречкртаните цифри ќе биде 10. За да новиот број биде делив со 4 тоа не смее да се цифрите 2 и 8, па останува да да ги пречкртаме цифрите 6 и 4. Конечно, новиот бој е 5328 и истиот е добиен со пречкртување на четири цифри.

13. Даден е бројот 123456789. Колку најмалку цифри треба да пречкртаме за да преостанатиот број е делив со 36?

Решение. Еден број е делив со 36 ако и само ако е делив и со 4 и со 9. За да бројот биде делив со 4, двоцифрениот завршеток треба да е делив со 4, па затоа мора да ја прецртаме цифрата 9. Останува бројот

12345678 кој е делив со 9, но не е делив со 4. Сега ако пречкртаме било која од преостанатите цифри, добиениот број нема да е делив со 9, па затоа мора да прецртаме барем уште една цифра. Ако ја прецртаме цифрата 7, го добиваме бројот 1234568 кој е делив со 4, бидејќи $4 \mid 68$. За да бројот е делив со 9 треба да ја прецртаме и цифрата 2, при што збирот на цифрите ќе биде 27, т.е. бројот 134568 е делив и со 4 и со 9.

14. Секоја од буквите K, L, O, N и S е заменета со различна непарна цифра. Четирицифреniот број $\overline{SLON}$ е делив со 15, но не е делив со 9. Со која цифра е заменета буквата K ?

Решение. Бидејќи бројот $\overline{SLON}$ е делив со 3, но не и со 9, збирот на цифрите $S+L+O+N$ е делив со 3 и не е делив со 9. Овој збир еднаков на $S+L+O+N=1+3+5+7+9-K=25-K$. Со непосредна проверка се добива дека бројот $25-K$ е делив со 3, а не е делив со 9 само за $K=1$.

15. Определи ги цифрите a и b така што $\overline{5a432b}$ ќе биде најмалиот природен број кој е делив со 12.

Решение. Еден број е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и со 4. Понатаму, еден број е делив со 4 ако и само ако неговиот двоцифрен завршеток е делив со 4, што значи дека бројот $\overline{2b}$ треба да е делив со 4. Оттука следува дека $b=0,4,8$. Понатаму, за да бројот $\overline{5a432b}$ е најмал треба да ја определиме најмалата можна цифра a за која еден од броевите $\overline{5a4320}, \overline{5a4324}$ или $\overline{5a4328}$ е делив со 3

Број е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3. За $\overline{5a4320}$ добиваме дека збирот $14+a$ треба да е делив со 3 и тогаш за a најмалата можна вредност е 1, па го добиваме бројот 514320. За $\overline{5a4324}$ добиваме дека збирот $18+a$ треба да е делив со 3 и тогаш за a најмалата можна вредност е 0, па го добиваме бројот 504324. За $\overline{5a4328}$ добиваме дека збирот $22+a$ треба да е делив со 3 и тогаш a најмалата можна вредност е 2, па го добиваме бројот 524328.

Меѓу најдените три броја најмал е бројот 504324 и тоа е бараниот број.

16. Цифрите a,b,c,d се такви што броевите $A=\frac{\overline{2a4b}}{15}$ и $B=\frac{\overline{3c8d}}{18}$ се природни. Определи го збирот на најмалиот можен број A и најголемиот можен број B.

Решение. Бројот $\overline{2a4b}$ е делив со 15, односно со 3 и со 5. За да бројот е делив со 5, цифрата на единиците мора да е 0 или 5, т.е. $b=0$ или $b=5$. За да бројот е делив со 3 збирот на неговите цифри мора да е делив со 3, т.е. $a+b+6$ мора да е делив со 3. Ако $b=0$, тогаш $a+b+6=a+6$, па $a=0$ е најмалата цифра таква што овој збир е делив со 3. Значи, бројот 2040 е делив со 15, па како тоа е најмалата можна вредност на број од видот $\overline{2a4b}$, добиваме дека тоа е најмалата можна вредност на бројот A еднаква на $\frac{2040}{15}=136$.

Бројот $\overline{3c8d}$ е делив со 18, т.е. е делив со 2 и со 9. Од деливоста со 2 следува $d\in\{0,2,4,6,8\}$, а од деливост со 9 следува дека збирот на неговите цифри е делив со 9, односно $c+d+11$ е делив со 9. За случаите $d=0,d=2,d=4,d=6,d=8$ соодветно ги добиваме броевите $c=7,c=5,c=3,c=1,c=8$, па затоа најголемата можна вредност на бројот од видот $\overline{3c8d}$ е 3888 и притоа се добива најголемата можна вредност на бројот B која е еднаква на $\frac{3888}{18}=216$.

Конечно, бараниот збир е $136+216=352$.

17. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{a783b}$ е делив со 56.

Решение. Еден број е делив со 56 ако и само ако е делив со 7 и со 8. Од деливоста со 8 следува дека трицифрениот завршеток $\overline{83b}$ е делив со 8, од каде следува дека $b=2$.

Понатаму,

$$\overline{a7832}=10000a+7832=7\cdot(1428a+1118)+(4a+6),$$

па од деливост со 7 следува дека $7\mid 4a+6$, каде $a\neq 0$. Сега, од $10\le 4a+6\le 42$, $7\mid 4a+6$ и фактот дека $4a+6$ е парен број добиваме $4a+6\in\{14,28,42\}$, од каде наоѓаме $a=2$ или $a=9$. Според тоа, $(a,b)=(2,2)$ или $(a,b)=(9,2)$.

18. Определи ги непознатите цифри на бројот $A=\overline{4a3b6}$ така што тој ќе биде делив со 33.

Решение. Еден број е делив со 33 ако и само ако е делив со 3 и со 11. Понатаму, број е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3. Според тоа, A е делив со 3 ако и само ако збирот $a+b+13$ е делив со 3, т.е. ако и само ако збирот $a+b+1$ е делив со 3. Но, $1 \le a+b+1 \le 19$ и како $a+b+1=3t$, каде t е некој природен број, добиваме $1 \le 3t \le 19$, од каде следува $t \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Понатаму, еден број е делив со 11 ако и само ако разликата од збировите на цифрите на парните и непарните места е делива со 11. Според тоа, A е делив со 11 ако и само ако $13-(a+b)$ е делив со 11, т.е. $2-(a+b)$ е делив со 11. Значи, постои цел број s таков што $2-(a+b)=11s$. Бидејќи $-16 \le 2-(a+b) \le 2$ и како $2-(a+b)$ е делив со 11, заклучуваме дека $2-(a+b)=-11$ или $2-(a+b)=0$.

Нека $2-(a+b)=11$ и $a+b+1=3t$. Ако ги собереме овие равенства, по средувањето добиваме $3t=14$, што не е можно.

Нека $2-(a+b)=0$ и $a+b+1=3t$. Ако ги собереме овие равенства добиваме $3t=3$. Според тоа, $a+b+1=3$, т.е. $a+b=2$. Од последното равенство следува $(a,b) \in \{(2,0),(1,1),(0,2)\}$ и бараните броеви се 42306, 41316 и 40326.

19. Определи ги четирите најмали последователни природни броја такви што првиот е делив со 2, вториот е делив со 3, третиот е делив со 7 и четвртиот е делив со 5.

Решение. Првиот број е делив со 2, па затоа е парен. Потоа, вториот е непарен, третиот е парен и четвртиот е непарен. Бидејќи четвртиот број е делив со 5 и е непарен неговата цифра на единиците е 5. Според тоа, цифрата на единиците на третиот број е 4, па како тој е делив со 7, тој припаѓа на низата броеви: $7 \cdot (10k+2) = 70k+14,$, за $k=1,2,3,...$

Значи, вториот број може да биде еден од броевите $70k+13,$ за $k=1,2,3,...$. Најмалиот меѓу овие броеви кој е делив со 3 е бројот $70 \cdot 2+13=153$. Затоа бараните броеви се: 152, 153, 154 и 155.

4. ДЕЛЕЊЕ СО ОСТАТОК

1. Дадена е низата букви

   КОЛИЧНИКОСТАТОККОЛИЧНИКОСТАТОККОЛИЧНИК...

   Определи ја 2022-та буква во оваа низа.

   Решение. Низата букви која се повторува е КОЛИЧНИКОСТАТОК и таа има 15 букви. Сега, од $2022 = 15 \cdot 134 + 12$, добиваме дека на 2022-то место е дванаесеттата буква во низата, а тоа е буквата А.

2. Определи го бројот на трицифрените броеви кои се деливи со 41. Дали нивниот збир е делив со 11?

   Решение. Бидејќи $1000 = 41 \cdot 24 + 16$, заклучуваме дека броеви кои се помали од 1000 и се деливи со 41 се точно 24. Но, два од нив (41 и 82) се двоцифрени, па затоа постојат 22 трицифрени броја кои се деливи со 41. Тоа се броевите: $41 \cdot 3, 41 \cdot 4, 41 \cdot 5, ..., 41 \cdot 23, 41 \cdot 24$. Нивниот збир е еднаков на

   $$\begin{aligned} 41 \cdot (3 + 4 + 5 + 6 + ... + 24) &= 41 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 24) - 41 \cdot (1 + 2) \\ &= 41 \cdot \tfrac{24 \cdot 25}{2} - 41 \cdot 3 = 41 \cdot 300 - 41 \cdot 3 \\ &= 41 \cdot 297 = 41 \cdot 11 \cdot 27 \end{aligned}$$

   што значи дека е делив со 11.

3. Определи ги најмалиот и најголемиот седумцифрен број кој е делив со 11 и чии цифри се различни од 0.

   Решение. Најголем седумцифрен број е 9999999, но овој број не е делив со 11. Имаме, $9999999 = 909090 \cdot 11 + 9$, па затоа најголем седумцифрен број кој е делив со 11 е бројот 9999990, но овој број завршува на 0. Според тоа, бараниот број е $9999990 - 11 = 9999979$.

   Најмалиот седумцифрен број запишан со ненулти цифри е 1111111, но овој број не е делив со 11. Бидејќи $1111111 = 11 \cdot 101010 + 1$, ако додадеме 10 го добиваме бројот 1111121 кој е најмалиот седумцифрен број запишан со ненулти цифри.

4. Страниците на една книга биле нумерирани последователно со броевите 1, 2, 3, ..., 336. Од книгата на произволен начин се искинати 111

листови. Докажи дека:

а) производот на броевите, со кои се нумерирани преостанатите (неискинати) листови е делив со 3,

б) збирот на броевите, запишани на преостанатите (неискинати) листови не може да е еднаков на 1005.

Решение. а) Ако не еден лист се запишани броеви кои при делење со 6 даваат остатоци 1 и 2, тогаш нивниот производ не е делив со 3, а во сите други случаи (кога остатоците се 0 и 1 или кога остатоците се 2 и 0) производот е делив со 3. Бројот на листовите на кои се запишани броеви кои при делење со 6 даваат остатоци 1 и 2 е еднаков на $158:3=56$, а по кинењето на 111 листови се останати $168-111=57$ листови. Според тоа, производот на броевите запишани барем на еден од преостанатите листови е делив со 3, па затоа и целиот производ е делив со 3.

б) На предната страна на секој лист е запишан непарен број, а на грбот е запишан неговиот следбеник кој е парен број. Според тоа, збирот на броевите, запишани на секој лист е број кој при делење со 4 дава остаток остаток 3. Останати се 57 листа, па затоа збирот на остатоците на овие 57 броја при делење со 4 е еднаков на $3\cdot 57=171$ и овој број при делење со 4 дава остаток 3. Значи, збирот на сите преостанати броеви при делење со 4 дава остаток 3, па затоа овој број не може да биде еднаков на 1005, бидејќи $1005=4\cdot 251+1$.

5. Збирот на еден двоцифрен број и двоцифрениот број запишан со истите цифри земени во обратен редослед, при делење со 5 дава остаток 2. Кој е тој број?

Решение. Нека $\overline{ab}$ е бараниот двоцифрен број. Имаме

$$\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=10(a+b)+(a+b).$$

Бидејќи $5\mid 10$, остатокот при делење со 5 на збирот $\overline{ab}+\overline{ba}$ е еднаков на остатокот при делење со 5 на збирот $a+b$. Сега, a и b се ненулти цифри, па затоа $a+b\le 18$ и како остатокот при делење на $a+b$ со 5 треба да е еднаков на 2, можни се следниве случаи:

- $a+b=2$ и како $a,b\neq 0$, добиваме $\overline{ab}\in\{11\}$,
- $a+b=7$ и како $a,b\neq 0$, добиваме $\overline{ab}\in\{16,25,34,43,52,61\}$
- $a+b=12$, па затоа $\overline{ab}\in\{39,48,57,66,75,84,93\}$
- $a+b=17$, па затоа $\overline{ab}\in\{89,98\}$.

Конечно, $\overline{ab} \in \{11,16,25,34,39,43,48,52,57,61,66,75,84,89,93,98\}$.

6. Ако се подели бројот 2013 на еден број a, се добива количник b и остаток c. Определи ги броевите a,b,c ако е познато дека овие броеви се должини на страни на рамнокрак триаголник.

Решение. Според условот $2013 = ab + c$, каде $c < a$. Бидејќи a,b,c се страни на рамнокрак триаголник, важи $b = c$ или $a = b$.

Во првиот случај $b = c < a < 2b$ и добиваме

$$2013 = ab + b,$$
$$(a+1)b = 3 \cdot 11 \cdot 61.$$

Лесно се добива дека единствено решение на последната равенка кое го задоволува условот $b < a < 2b$ е $a = 60, b = 33$.

Ако $a = b > c$, ја добиваме равенката $2013 = a^2 + c$. Оттука, ако искористиме дека $0 < c < a$, добиваме

$$a^2 < 2013 < a^2 + a,$$
$$a^2 < 2013 < (a+1)^2.$$

Бидејќи $44^2 = 1936, 45^2 = 2025$, од последните неравенства следува дека $a = 44$. Но, за $a = 44$, добиваме $44^2 + 44 = 1980 < 2013$, противречност.

Конечно, $a = 60, b = c = 33$ е единствено решение на задачата.

7. Ако се подели бројот 2014 на еден број a, се добива количник b и остаток c. Определи ги броевите a,b,c ако е познато дека овие броеви се должини на страни на рамнокрак триаголник.

Решение. Според условот $2014 = ab + c$, каде $c < a$. Бидејќи a,b,c се страни на рамнокрак триаголник, важи $b = c$ или $a = b$.

Во првиот случај $b = c < a < 2b$ и добиваме

$$2013 = ab + b,$$
$$(a+1)b = 2 \cdot 19 \cdot 53.$$

Лесно се добива дека единствено решение на последната равенка кое го задоволува условот $b < a < 2b$ е $a = 52, b = 38$.

Ако $a = b > c$, ја добиваме равенката $2014 = a^2 + c$. Оттука, ако искористиме дека $0 < c < a$, добиваме

$$a^2 < 2014 < a^2 + a,$$
$$a^2 < 2014 < (a+1)^2.$$

Бидејќи $44^2 = 1936, 45^2 = 2025$, од последните неравенства следува дека $a = 44$. Но, за $a = 44$, добиваме $44^2 + 44 = 1980 < 2014$, противречност.

Конечно, $a = 52, b = c = 38$ е единствено решение на задачата.

8. Определи ги последните четири цифри на точен квадрат на природен број, ако се знае дека последните три од нив се еднакви.

Решение. Секој природен број може да се запише во видот $10A + b$, каде A е природен број, а b е цифра. Неговиот квадрат е

$$(10A + b)^2 = 100A^2 + 20Ab + b^2.$$

Првите два собирци завршуваат на 0, пред која стои парна цифра, а последниот собирок е некој од броевите 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, од кои никој не завршува на 2, 3, 7, 8, а непарна цифра на десетките имаат само броевите кои завршуваат на 6. Значи и $(10A + b)^2$ не завршува на 2, 3, 7, 8 и има непарна цифра на десетките само ако завршува на 6. Според тоа, ако последните две цифри на точен квадрат се еднакви, тој може да завршува само на 0 или 4. Јасно, ако последните три цифри на точен квадрат се 0, тогаш и цифрата пред нив е 0. Нека последните три цифри се 444. При делење со 16 на 444 се добива остаток 12. Затоа цифрата пред нив не може да е парна, бидејќи 2000 е делив со 16, а остаток при делење на точен квадрат со 16 може да е само 0, 1, 4 или 9. Од друга страна, секоја непарна цифра може да е пред 444,што може да се види од равенствата

$$38^2 = 1444, \qquad 538^2 = 289444, \qquad 1038^2 = 1077444,$$
$$1538^2 = 2365444, \quad 2038^2 = 4153444.$$

Според тоа, послените четири цифри може да бидат: 0000, 1444, 3444, 5444, 7444 и 9444.

9. Збирот на цифрите на природниот број n е еднаков на збирот на цифрите на природниот број $5n$. Докажи дека бројот n е делив со 9.

Решение. Нека претпоставиме дека n не е делив со 9, т.е. дека $n = 9k + r, 0 < r < 9$. Тогаш остатоците при делењето на бројот n и бројот $5n$ со 9 се:

Остаток на n	1	2	3	4	5	6	7	8
Остаток на $5n$	5	1	6	2	7	3	8	4

Бидејќи секој број при делење со 9 дава ист остаток како и збирот на неговите цифри при делење со 9, од горната табела следува дека збировите на цифрите на броевите n и $5n$ даваат различни остатоци при делење со 9. Последното противречи на условот на задачата, т.е. на тоа дека n и $5n$ имаат еднакви збирови на цифри. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

10. Дали постои природен број n за кој бројот $n(n+1)(n+2)(n+3)+2014$ е точен квадрат.

Решение. Меѓу четири последователни броја $n, n+1, n+2, n+3$ еден е делив со 4. Оттука следува дека остатокот при делење со 4 на бројот $n(n+1)(n+2)(n+3)+2014$ е еднаков на остатокот при делење со 4 на бројот 2014, односно на 2. Од друга страна, при делење со 4 квадратите на природните броеви даваат остаток 0 или 1, што може да се види од следнава табела:

Остаток на a	0	1	2	3
Остаток на a^2	0	1	0	1

Според тоа, не постои природен број n за кој даденият број е квадрат на природен број.

11. Докажи, дека збирот на сите трицифрени броеви, кои се точни квадрати не е точен квадрат.

Решение. Квадратите на броевите од 10 до 31 се единствените броеви кои се запишуваат со три цифри. Од нив 11 се непарни и нивните квадрати даваат остаток 1 при делење со 4, а другите даваат остаток 0 при делење со 4. Значи, збирот на квадратите кои се трицифрени броеви при делење со 4 дава остаток 3, што значи дека не е точен квадрат.

12. Природниот број n е точен квадрат. Збирот на цифрите му е 22, цифрата на стотките му е 3, цифрата на десетките му е 7 и во неговиот декаден запис нема цифра која се повторува. Определи го најмалиот таков број.

Решение. Точни квадрати завршуваат на една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Освен тоа, точните квадрати при делење со 4 даваат остаток 0

или 1. Тоа значи дека при делење со 4 двоцифрениот завршеток на бројот треба да дава остаток 0 или 1. Но, ниту еден од броевите 70, 71, 74, 75 и 79 при делење со 4 не дава остаток 0 или 1. Според тоа, единствена можност е цифрата на единиците на бараниот број да е 6.
Бидејќи бројот завршува на 376, тој е делив со 8, па како тој е точен квадрат заклучуваме дека е делив со 16. Според тоа, цифрата на илјадитите на бараниот број е непарна (Зошто?). Таков четирицифрен број со збир на цифри 22 не постои. Петцифрените броеви кои ги задоволуваат наведените услови се 51376, 33376 и 15376. Од нив само бројот $15376 = 124^2$ е точен квадрат и тоа е бараниот број.

13. Докажи дека не постои правоаголен триаголник чии катети се природни броеви, а должината на хипотенузата е $\sqrt{20222023}$.

Решение. *Прв начин*. Ако постојат природни броеви a и b такви што a,b се должини на катети и $\sqrt{20222023}$ е должина на хипотенуза на правоаголен триаголник, тогаш $a^2 + b^2 = 20222023$. Но, квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1, па затоа при делење со 4 на збирот $a^2 + b^2$ се добива остаток 0, 1 или 2. Од друга страна $20222023 = 4 \cdot 5055505 + 3$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.
Втор начин. Ако постојат природни броеви a и b такви што a,b се должини на катети и $\sqrt{20222023}$ е должина на хипотенуза на правоаголен триаголник, тогаш $a^2 + b^2 = 20222023$. Затоа еден од броевите a и b е парен, а другиот непарен. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a = 2k + 1$ и $b = 2n$, $k,n \in \mathbb{N}$. Со замена во горното равенство, по средувањето го добиваме равенството

$$4(k^2 + k + n^2) = 2 \cdot 10111011,$$

Кое не е можно, бидејќи левата страна е делива со 4, а десната страна не е делива со 4. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.
Трет начин. Цифрата на единиците на квадрат на природен број може да е 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Бидејќи цифрата на единиците на збирот $a^2 + b^2$ е 3, единствена можност е цифрите на единиците на собирците да се 4 и 9. Оттука следува дека едниот собирок е од видот $10k \pm 2$, а другиот собирок е од видот $10n \pm 3$, $k,n \in \mathbb{N}$. Според тоа,

$$(10k \pm 2)^2 + (10n \pm 3)^2 = 20222023,$$
$$100k^2 \pm 40k + 4 + 100n^2 \pm 60n + 9 = 20222023,$$
$$100k^2 \pm 40k + 100n^2 \pm 60n = 20222010,$$
$$2 \cdot (5k^2 \pm 2k + 5n^2 \pm 3n) = 2022201,$$

што не е можно, бидејќи левата страна на последното равенство е парен, а десната страна е непарен број. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

14. Определи го најмалиот природен број n, таков што бројот $3^k + n^k + (3n)^k + 2014^k$ е точен квадрат за некој природен број k, но не е точен куб за ниту еден природен број k.

Решение. Нека $n = 1$. За $k = 1$ добиваме 2021, кој не е точен квадрат, а за $k \geq 1$ изразот дава остаток 3 при делење со 4, па така не може да е точен квадрат.

Нека $n = 2$. За $k = 1$ добиваме 2025, кој е точен квадрат.

Да претпоставиме дека изразот е точен куб за некој k. При делење со 7 точните кубови даваат остатоци 0, 1 или 6, додека изразот дава остатоци 2, 4 или 5, што значи дека при $n = 2$ даденият израз не може да е точен куб за ниту еден природен број k. Значи, бараниот број е $n = 2$.

15. Нека $A = 57!$ и $B = 59!$. Докажи дека A и B даваат исти остатоци при делење со 311.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} B - A &= 59! - 57! = 59 \cdot 58 \cdot 57! - 57! \\ &= 57! \cdot (58 \cdot 59 - 1) \\ &= 3421 \cdot 57! = 57! \cdot 311 \cdot 11. \end{aligned}$$

Значи, разликата $B - A$ е делива со 311, па затоа A и B даваат исти остатоци при делење со 311.

16. Збирот на три различни природни броја е 2012. Ако најголемиот број го поделиме со најмалиот се добива количник 2 и остаток 3. Разликата на двата помали броја е 3. Кои се тие броеви?

Решение. Нека броевите се $a > b > c$. Од условот на задачата имаме $a + b + c = 2012$, $a = 2c + 3$ и $b = c + 3$. Ако од втората и третата ра-

венка замениме во првата, добиваме $2c+3+c+3+c=2012$, т.е. $4c=2006$. Левата страна на последното равенство е делива со 4, а десната не е делива со 4, па затоа не постои природен број c за кој равенството е исполнето. Според тоа, не постојат природни броеви за кои се исполнети условите на задачата.

17. При делење на бројот 2216 со природниот број a се добива остаток 29. Определи ги сите можни вредности на a.
Решение. Од условот на задачата следува дека $a>29$ и дека a е делител на $2216-29=2187$. Сега, бидејќи $2187=3^7$,заклучуваме дека a е степен на бројот 3, кој е поголем од 29. Според тоа, сите можни вредности на a се: 81, 243, 729 и 2187.

18. Бројот N е добиен со последователно запишување на броевите од 1 до 99, т.е. $N=\overline{12345...979899}$. Определи го остатокот од делењето на N со 360.
Решение. Да забележиме дека $360=5\cdot 8\cdot 9$, а бројот
$$N-99=\overline{12345...979800}$$
е делив со 5, 8 и 9 (пресметај го збирот на неговите цифри). Според тоа, бараниот остаток е 99.

19. Нека m и n се два различни четирицифрени броја, секој од кои е запишан со цифрите 1, 2, 3 и 4, при што секоја цифра е употребена само еднаш. Дали е можно еден од броевите m и n да е делител на другиот број.
Решение. Збирот на цифрите на секој од броевите m и n е еднаков на 10, па затоа секој од нив при делење со 9 дава остаток 1. Нека претпоставиме дека $m=nk$. Тогаш $m-n=(k-1)n$, па како $9\mid m-n$ добиваме дека $9\mid(k-1)n$. Но при делење на n со 9 се добива остаток 1, па затоа од $9\mid(k-1)n$ следува $9\mid k-1$. Последното не е можно, бидејќи од $m\neq n$ следува $k>1$, а од друга страна $k<4$ (за најголемиот и најмалиот од разгледуваните броеви важи $4321=1234\cdot 3+619$).

20. Нека n е природен број, таков што секој од броевите $2n+1$ и $3n+1$ е точен квадрат.
а) Докажи, дека $40\mid n$.

б) Определи го најмалиот природен број n за кој броевите $2n+1$ и $3n+1$ се точни квадрати.

Решение. а) Цифрата на единиците на број кој е точен квадрат е 0, 1, 4, 5, 6 или 9. За цифрите на единиците на броевите $n, 2n+1$ и $3n+1$ имаме

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2n+1$	1	3	5	7	9	1	3	5	7	9
$3n+1$	1	4	7	0	3	6	9	2	5	8

Гледаме, дека броевите $2n+1$ и $3n+1$ едновремено имаат последна цифра 0, 1, 4, 5, 6 или 9 само кога цифрата на единиците на бројот n е 0 или 5. Според тоа, n е делив со 5.

Понатаму, точните квадрати при делење со 8 даваат остатоци 1, 4 или 0. Да ги разгледаме можните остатоци на n при делење со 8 и во секој од случаите да го определиме остатокот при делење со 8 на броевите $2n+1$ и $3n+1$. Имаме

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$2n+1$	1	3	5	7	1	3	5	7
$3n+1$	1	4	7	2	5	0	3	6

Гледаме, дека броевите $2n+1$ и $3n+1$ едновремено даваат остаток 1, 4 или 0 при делење со 8 само ако при делење на n со 8 се добива остаток 0, односно n е делив со 8.

б) Најмалиот делител на 40 е бројот 40 и за него важи $2\cdot 40+1=9^2$ и $3\cdot 40+1=11^2$. Според тоа, бараниот број е 40.

21. Нека m и n се природни броеви такви што $m+n$ е непарен број. Докажи, дека 13^m+13^n

а) може да се претстави како збир на три точни квадрати,

б) не може да се претстави како збир на два заемно прости точни квадрати.

Решение. Броевите m и n се со различна парност, па нека $m=2m'$ и $n=2n'+1$.

а) Имаме

$$\begin{aligned} 13^m+13^n &= 13^{2m'}+13^{2n'+1}=13^{2m'}+13\cdot 13^{2n'} \\ &= 13^{2m'}+4\cdot 13^{2n'}+9\cdot 13^{2n'} \\ &= (13^{m'})^2+(2\cdot 13^{n'})^2+(3\cdot 13^{n'})^2. \end{aligned}$$

б) Бидејќи 13 дава остаток -1 при делење со7, остатокот на $13^{2m'}$ при делење со 7 е $(-1)^{2m'}=1$, а $13^n=13^{2n'+1}$ дава остаок $(-1)^{2n'+1}=-1$ при делење со 7. Според тоа, збирот 13^m+13^n е делив со 7. Од друга страна

	Остаток при делење со 7						
a	0	1	2	3	4	5	6
a^2	0	1	4	2	2	4	1

секој точен квадрат при делење со 7 дава остаток 0, 1, 2 или 4. Значи, збирот на два заедмно прости квадрати не може да е делив со 7, т.е. не може да е еднаков на 13^m+13^n.

22. Дадени се природните броеви a и b. Ако a^2 се подели со b, се добива остаток 8, а ако a^3 се подели со b, се добива остаток 25. Определи го бројот b.

Решение. Според условот b е поголем од 25 и е делител на a^2-8 и a^3-25. Според тоа, b е делител на

$$a^3-25-a(a^2-8)=8a-25.$$

Следствено, b е делител на

$$8(a^2-8)-a(8a-25)=25a-64,$$

па затоа b е делител на

$$8(25a-64)-25(8a-25)=113.$$

Но, 113 е прост број, па затоа $b=113$.

23. Определи го остатокот при делењето на бројот $25\cdot 3^{2021}$ со бројот $4\cdot 3^{2020}$.

Решение. Имаме,

$$25\cdot 3^{2021}=75\cdot 3^{2020}=18\cdot 4\cdot 3^{2020}+3\cdot 3^{2020},$$

па затоа остатокот при делењето на бројот $25\cdot 3^{2021}$ со бројот $4\cdot 3^{2020}$ е еднаков на $3\cdot 3^{2020}=3^{2021}$.

24. Пресметај го остатокот кој се добива при делење на $2^{4n+2}+2^4$ со $2^{2n+1}+2^{n+1}+1$ за секој природен број $n\geq 2$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 2^{4n+2}+2^4 &= (2^{2n+1})^2+16 = (2^{2n+1})^2+2\cdot 2^{2n+1}+1-2\cdot 2^{2n+1}+15 \\ &= (2^{2n+1}+1)^2-2^{2n+2}+15 = (2^{2n+1}+1)^2-(2^{n+1})^2+15 \\ &= (2^{2n+1}+2^{n+1}+1)(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)+15. \end{aligned}$$

Сега, бидејќи за $n \geq 2$ важи

$$2^{2n+1}+2^{n+1}+1 \geq 2^5+2^3+1 = 41$$

следува дека при делење на $2^{4n+2}+2^4$ со $2^{2n+1}+2^{n+1}+1$ добиваме количник $2^{2n+1}-2^{n+1}+1$ и остаток 15.

5. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

1. При делење на 860 со еден број се добива остаток 9, а при делење на 1200 со истиот тој број се добива остаток 16. Определи ги количниците при овие делења.

   Решение. Бројот со кој делиме е заеднички делител на $860-9=851$ и $1200-16=1184$ и е поголем од 16. Ако искористиме дека за секои природни броеви $a,b\ (a>b)$ важи $\mathrm{NZD}(a,b)=\mathrm{NZD}(a-b,b)$, добиваме

   $$\mathrm{NZD}(1184,851)=\mathrm{NZD}(851,333)=\mathrm{NZD}(518,333)=\mathrm{NZD}(333,185)$$
   $$=\mathrm{NZD}(185,148)=\mathrm{NZD}(148,37)=37,$$

   што значи дека делиме со бројот 37. Сега, $851=23\cdot 37$ и $1184=32\cdot 37$ што значи дека бараните количници се 23 и 32,

2. Определи го $\mathrm{NZD}(942,444)$.

   Решение. *Прв начин*. Имаме

   $$942=2\cdot 444+54,$$
   $$444=8\cdot 54+12,$$
   $$54=4\cdot 12+6,$$
   $$12=2\cdot 6,$$

   па затоа $\mathrm{NZD}(942,444)=6$.

   Втор начин. Имаме:

   $$\mathrm{NZD}(942,444)=\mathrm{NZD}(942-444,444)=\mathrm{NZD}(498,444)$$
   $$=\mathrm{NZD}(498-444,444)=\mathrm{NZD}(54,444)=\mathrm{NZD}(54,390)$$
   $$=\mathrm{NZD}(54,336)=\mathrm{NZD}(54,282)=\mathrm{NZD}(54,228)$$
   $$=\mathrm{NZD}(54,174)=\mathrm{NZD}(54,120)=\mathrm{NZD}(54,66)$$
   $$=\mathrm{NZD}(54,12)=\mathrm{NZD}(42,12)=\mathrm{NZD}(30,12)=\mathrm{NZD}(18,12)$$
   $$==\mathrm{NZD}(6,12)=6.$$

3. Докажи дека дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати.

   Решение. Имаме

$\mathrm{NZD}(21n+4,14n+3)=\mathrm{NZD}(14n+3,7n+1)=\mathrm{NZD}(7n+2,7n+1)=1$,
што значи дека дадената дропка не може да се скрати.

4. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $n=111111$ и $m=111111111$.

Решение. Бидејќи $n=111\cdot 1001$ и $m=111\cdot 1001001$, добиваме дека 111 е заеднички делител на m и n. Според тоа,

$$\begin{aligned}\mathrm{NZD}(m,n)&=111\cdot\mathrm{NZD}(1001,1001001)\\&=111\cdot\mathrm{NZD}(1001,1001001-1001\cdot 1000)\\&=111\cdot\mathrm{NZD}(1001,1)=111.\end{aligned}$$

5. Нека a,b и c се природни броеви такви што

$$\mathrm{NZD}(a,b)=4,\ \mathrm{NZD}(b,c)=6 \text{ и } \mathrm{NZS}(a,b,c)=36000.$$

Која е најголемата можна вредност на $\mathrm{NZD}(a,c)$?

Решение. Имаме $36000=2^5\cdot 3^2\cdot 5^3$. Понатаму, од условот на задачата следува $a=2^2x, b=2^2\cdot 3y, c=2\cdot 3z$, при што x не е делив со 3, а z не е делив со 2. Според тоа, $\mathrm{NZD}(x,z)$ е делител на 5^3, па затоа најголемата можна вредност на $\mathrm{NZD}(a,c)$ може да е $2\cdot 5^3=250$.

6. Пресметај

$$A=\mathrm{NZD}(1,91)+\mathrm{NZD}(2,91)+\mathrm{NZD}(3,91)+....+\mathrm{NZD}(90,91)+\mathrm{NZD}(91,91).$$

Решение. Бидејќи $91=7\cdot 13$, можно е $\mathrm{NZD}(n,91)$ да е 1, 7, 13 или 91. За $1\le n\le 91$ само за $n=91$ имаме $\mathrm{NZD}(n,91)=91$, потоа за 12 вредности на n имаме $\mathrm{NZD}(n,91)=7$ и тоа се броевите кои се деливи со 7 и се различни од 91, за 6 вредности на n имаме $\mathrm{NZD}(n,91)=13$ и тоа се броевите кои се деливи со 13 и се различни од 91. Според тоа, за $91-1-6-12=72$ вредности на n имаме $\mathrm{NZD}(n,91)=1$. Оттука следува дека

$$\begin{aligned}A&=\mathrm{NZD}(1,91)+\mathrm{NZD}(2,91)+....+\mathrm{NZD}(90,91)+\mathrm{NZD}(91,91)\\&=1\cdot 91+12\cdot 7+6\cdot 13+72=325.\end{aligned}$$

7. Нека $a,b,c\in\mathbb{N}$ се такви што $\frac{ab}{a-b}=c$ и $\mathrm{NZD}(a,b,c)=1$. Докажи дека $a-b$ е точен квадрат.

Решение. Нека претпоставиме дека $a-b$ не е точен квадрат. Тогаш постои прост број p и природен број k, такви што $p^{2k-1} \mid a-b$ и $p^{2k} \nmid a-b$. Од $a-b \mid ab$ следува дека $p^{2k-1} \mid ab$, па затоа барем еден од броевите a и b е делив со p^k. Но, од $p^{2k-1} \mid a-b$ следува дека тоа важи и за другиот од овие два броја, па затоа $p^{2k} \mid ab$. Тоа значи дека $p \mid c$, па затоа $\text{NZD}(a,b,c) \geq p > 1$, што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека $a-b$ е точен квадрат.

8. Андреј замислил три броја. Најголемиот заеднички делител на првиот и вториот број е 12, на првиот и третиот е 8, а на вториот и третиот е 20. Кои се најмалите броеви кои можел да ги замисли Андреј?

Решение. Нека бараните броеви се a,b и c. Тогаш $\text{NZD}(a,b)=12$, $\text{NZD}(a,c)=8$ и $\text{NZD}(b,c)=20$, па затоа мора да важи $12 \mid a$ и $8 \mid a$; $12 \mid b$ и $20 \mid b$; $8 \mid c$ и $20 \mid c$. Бараме броеви кои ги имаат дадените својства и се најмали, па затоа

$a = \text{NZS}(12,8) = 24$, $b = \text{NZS}(12,20) = 60$ и $c = \text{NZS}(8,20) = 40$.

9. За детските градинки во еден град треба дневно да се обезбедат $120\,kg$ портокали, $260\,kg$ банани и $380\,kg$ јаболка.

а) Колку најмногу градинки може да постојат во овој град ако во секоја градинка се распоредува исто количество од секој вид овошје? (Бројот килограми од секој распореден вид овошје е природен број.)

б) Колку лимони треба да се обезбедат за сите градинки ако се троши пет пати помалку лимони од портокали и јаболка заедно?

Решение. а) Бидејќи $\text{NZD}(120,260,380)=20$, во градот може да има најмногу 20 градинки.

б) Во градинките вкупно се трошат $120+380=500$ килограми портокали и јаболки. Значи, за потребите на градинките треба дневно да се обезбедат $500:5=100\,kg$ лимони.

10. Според Горјан 25% од неговите книги се романи, а $\frac{1}{9}$ се поезија. Горјан има повеќе од 50 и помалку од 100 книги. Колку книги има Горјан?

Решение. Од условот на задачата следува дека бројот на книгите на

Горјан е делив со 4 и со 9. Но, $\text{NZD}(4,9)=1$, па затоа бројот на книгите на Горјан е делив со $4\cdot 9=36$. Единствен број кој е делив со 36, а е поголем од 50 и е помал од 100 е бројот 72. Значи, Горјан има 72 книги.

11. На права линија се засадени три дрва, така што растојанието од првото до второто дрво е $212\,m$, а од второто до третото е $44\,m$ (цртеж десно). Кој е најмалиот број дрва што треба уште да се засадат, така што растојанијата меѓу секои две соседни дрва ќе бидат еднакви?

Решение. За да растојанието меѓу секои две соседни дрва е еднакво потребно е тоа да е делител на броевите 121 и 44. Јасно, најмал број дрва ќе бидат засадени ако растојанието е најголемо можно, односно ако тоа е еднакво на $\text{NZD}(121,44)=11$. Тогаш меѓу првите две дрва треба да се засадат $(121-11):11=10$ дрва, а меѓу второто и третото дрво треба да се засадат уште $(44-11):11=3$ дрва. Значи, вкупно треба да се засадат $10+3=13$ дрва.

12. Производот на моите години и годините на мојот дедо е 2016. Определи колку години мојот дедо е постар од мене, ако најголемиот заеднички делител на моите и неговите години е двоцифрен број?

Решение. Нека јас имам x години, а мојот дедо има y години. Тогаш $x=da$ и $y=db$, каде $\text{NZD}(a,b)=1$. Имаме $xy=2016$, односно $d^2ab=2^5\cdot 3^2\cdot 7$. Бидејќи d е двоцифрен број и $d^2\mid 12^2\cdot 2\cdot 7$, заклучуваме дека $d=12$ и $ab=2\cdot 7$, од каде наоѓаме $a=2$ и $b=7$. Значи, јас имам $12\cdot 2=24$ години, а мојот дедо има $12\cdot 7=84$ години. Конечно, мојот дедо е $84-24=60$ години постар од мене.

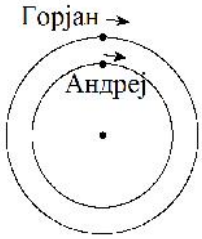
13. Определи ги сите двоцифрени броеви $\overline{ab}$, $a<b$, такви што најголемиот заеднички делител на $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ е $a+b$.

Решение. Јасно, разликата $10a+b-(a+b)=9a$ е делива со $a+b$. Нека $\text{NZD}(a,b)=d$, т.е. $a=da'$ и $b=db'$, каде $\text{NZD}(a',b')=1$. Добивме дека $a+b=d(a'+b')$ е делител на $9da'$. Сега, од $\text{NZD}(a',b')=1$ следува $\text{NZD}(a',a'+b')=1$, па затоа $a'+b'$ е делител на 9, т.е. бидејќи

$a'+b' \geq 1+2=3$ добиваме дека или $a'+b'=3$ или $a'+b'=9$.
Но, $a<b$, па затоа $(a',b') \in \{(1,2),(1,8),(2,7),(4,5)\}$. За $(a',b')=(1,2)$, d е најмногу 4 и ги добиваме решенијата 12, 24, 36 и 48, а за преостанатите три можности од $b' \geq 5$ заклучуваме дека $d=1$, па решенија се 18, 27 и 45.

14. Најмалиот заеднички содржател на два двоцифрени броја е 2015. Определи го збирот на тие броеви.
Решение. Имаме $2015=5\cdot 13\cdot 31$. Бидејќи $13\cdot 31=403$ и $5\cdot 31=165$, а бараните броеви се двоцифрени,заклучуваме дека бројот кој е делив со 31, не е делив со 5 или со 13. Според тоа, тој број е 31. Вториот број е делив со 5 и со 13, па затоа тој бој е $5\cdot 13=65$. Конечно, бараните двоцифрени броеви се 31 и 65, а нивниот збир е $31+65=91$.

15. Горјан и Андреј трчаат во една иста насока по кружни патеки со заеднички центар, при што на пичетокот тие се на минимално растојание еден од друг. Андреј целосно ја обиколува патеката на секои 20 секунди, а Горјан целосно ја обколува патеката на секои 28 секунди. По колку секунди тие ќе се наоѓаат на максимално можно растојание еден од друг?



Решение. Горјан и Андреј ќе се наоѓаат на минимално растојание еден од друг по $NZS(20,28)=140$ секунди. За тоа време Андреј седум пати ќе ја обиколи патеката, а Горјан пет пати ќе ја обиколи патеката. Значи Андреј ќе направи 2 обиколки повеќе. Значи, по $140:4=35$ секунди Андреј ќе направи половина обиколку повеќе од Горјан и во тој момент тие ќе се на максимално растојание еден од друг.

16. Во кутија има најмалку 99, а најмногу 199 моливи. Колку моливи има во кутијата, ако е познато, дека сите моливи може да се распределат на 18 или на 24 ученици, така што секое дете ќе добие еднаков број моливи?
Решение. Јасно, бројот на моливите е делив со 18 и е делив со 24, па затоа тој е делив со $NZS(18,24)=72$. Броеви деливи со 72 се: 72, 144, 216, ... Меѓу овие броеви единствено за бројот 144 важи дека $99 \leq 144 \leq 199$, што значи дека во кутијата имаа 144 моливи.

17. Гусарот Црнобрадиот сакал да ги преброи своите златници, кои биле повеќе од 250, а помалку од 300. Тој златниците ги наредил во купчиња од по 12, но два златника останале. Потоа Црнобрадот ги наредил златниците во купчиња од по 16, но повторно 2 останале. Колку златници имал Црнобрадиот?

Решение. Во двата случаја остануваат по 2 златника повеќе, па ако тргнеме два златника, добиваме дека бројот на преостанатите е делив со $\mathrm{NZS}(12,16)=48$. Единствен број кој е меѓу 250 и 300, а е делив со 48 е бројот 288. Според тоа, Црнобрадиот имал $288+2=290$ златници.

18. Филип има кутија со џамлии. На прашањето колку џамлии има во кутијата, тој одговорил: „Ако ги бројам по две, или по три, или по четири, или по пет, или по шест, секогаш ми останува една џамлија. Ако ги бројам по седум не ми останува ниту една џамлија.“ Кој е најмалиот број џамлии во кутијата?

Решение. Бројот на џамлиите n без остаток може да се подели со 7, а при делење со 2, 3, 4, 5 и 6 дава остаток 1. Тоа значи дека $n-1$ без остаток се дели со 2, 3, 4, 5 и 6, од каде следува дека $n-1$ е содржател на $\mathrm{NZS}(2,3,4,5,6)=60$. Според тоа, $n=60k+1, k\in\mathbb{N}$ и уште $7\mid n$. Понатаму, од

$$61=8\cdot 7+5,\quad 121=17\cdot 7+2,$$
$$181=7\cdot 25+6,\quad 241=34\cdot 7+3$$

и $301=43\cdot 7$ следува дека внајмалиот можен број џамлии во кутијата е 301.

19. Дедото и вели на Ана: „Сега јас сум 2 пати повозрасен од тебе. Пред неколку години бев 3 пати повозрасен од тебе. Низ годините мојата возраст беше сооодветно 4 пати и 5 пати поголема од тебе.“ Ако знаеш, дека сега годините на дедото се цел двоцифрен број, а годините на Ана се цел број, определи ја возраста на дедото?

Решение. Разликата на годините на дедото и Ана е делива со 2, 3 и 4. Бидејќи најмалиот заеднички содржател на овие броеви е 12, добиваме дека разликата на годините е $12k, k\in\mathbb{N}$. Оттука добиваме дека Ана сега има $12k$ години, а дедото има $24k$ години. Бидејќи $24k<100$, добиваме $k\le 4$. Според тоа, Ана може да има 12, 24, 36 или 48 години, а дедото може соодветно да има 24, 48, 72 и 96 години.

Разумни вредности се за Ана 36 или 48 години, а заедото соодветно 72 или 96 години.

20. Матеј замислил четири различни природни броја, меѓу кои нема два заемно прости броја. Најмалиот заеднички содржател на четирите броја е 30, а нивниот производ не е точен квадрат и е делив со 24. Кои броеви ги замислил Матеј?

Решение. Бидејќи најмалиот заеднички содржател на четирите броја е $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, во разложувањето на секој од четирите броја има најмногу една 2. Производот на четирите броја е делив со $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, па затоа барем три броја се деливи со 2.

Ако сите четири броја се деливи со 2, тогаш бидејќи единствени делители на броевите се 2, 3 и 5, броевите се различни меѓу себе и никои два не се заемно прости, а секој од делителите во разложувањето на секој од броевите учествува најмногу еднаш, добиваме дека броевите се $2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5$ и нивниот производ е $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, што значи дека е точен квадрат.

Ако точно три од броевите се деливи со 2, тогаш од истите причини како во претходниот случај броевите се $2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5$. Производот на овие броеви е $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ и тој не е точен квадрат, што значи дека бараните броеви се 6, 10, 15 и 30.

21. Пабло напишал 2011 броеви, првиот од кои е 1, а секој следен е за 3 поголем од претходниот: 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... Матео напишал 2011 броја, првиот од кои е 9 и секој следен е за 7 поголем од претходниот: 9, 16, 23, 30, ... Колку различни броеви запишале Пабло и Матео?

Решение. Последниот број на Пабло е $1 + 2010 \cdot 3 = 6031$, а последниот број на Матео е $9 + 2010 \cdot 7 = 14079$. Првиот број кој се повторува во двете низи е 16. Бидејќи $\mathrm{NZS}(3,7) = 21$, броевите кои се повторуваат се од видот $16 + 21k$, каде $k \in \mathbb{N}_0$ и за овие броеви важи неравенството $16 + 21k \leq 6021$. Според тоа, $k \leq 286$, па затоа имаме 287 броеви кои се повторуваат во двете низи. Значи, Пабло и Матео запишале $4022 - 287 = 3735$ различни броја.

22. Најголемиот заеднички делител на два двоцифрени броја е 4, а најмалиот заеднички содржател е 144. Определи го збирот на овие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се x и y. Без ограничување на

општоста можеме да претпоставиме дека $x < y$. Според условот на здачата имаме $\text{NZD}(x, y) = 4$ и $\text{NZS}(x, y) = 144$. Значи, $x = 4a$, $y = 4b$, каде $\text{NZD}(a,b) = 1$, $a < b$ и затоа важи $\text{NZS}(x, y) = 4ab$. Според тоа, $144 = 4ab$, па затоа $ab = 36$. Сега, бидејќи $\text{NZD}(a,b) = 1$, од добиваме $a = 1$, $b = 36$ или $a = 4$, $b = 9$. Првиот случај отпаѓа бидејќи броевите x и y се двоцифрени, па затоа $a = 4$ и $b = 9$. Конечно, бараните броеви се $x = 4 \cdot 4 = 16$ и $y = 4 \cdot 9 = 36$, и нвниот збир е $x + y = 52$.

23. На пазар дедо Марко продава јаболка, круши и мандарини. Овошјето го продава на парче. На неговата тезга едновремено дошле двајца купувачи. Во тој момент дедо Марко имал 227 парчиња овошје. Првиот купувач купил $\frac{2}{3}$ од сите јаболка, $\frac{3}{10}$ од сите круши и $\frac{5}{7}$ од сите мандарини. Вториот купувач купил $\frac{1}{11}$ од сите јаболка, $\frac{1}{4}$ од сите круши и $\frac{1}{5}$ од сите мадарини. Колку парчиња јаболка, круши и мадарини купиле првиот и вториот купувач. Колку парчиња јаболка, круши и мандарини имал дедо Марко пред нивното купување?

Решение. Со x, y и z да го означиме бројот на јаболката, крушите и мандаринште, соодветно. Бидејќи $\frac{2}{3}x, \frac{3}{10}y, \frac{5}{7}z$ се природни броеви, важи $3 \mid x, 10 \mid y, 7 \mid z$. Слично, $\frac{1}{11}x, \frac{1}{4}y, \frac{1}{5}z$ се природни броеви, па затоа $11 \mid x, 4 \mid y, 5 \mid z$. Оттука следува дека $\text{NZS}(3,11) \mid x$, $\text{NZS}(10,4) \mid y$ и $\text{NZS}(7,5) \mid z$, па затоа $33 \mid x, 20 \mid y$ и $35 \mid z$. Нека $x = 33a$, $y = 20b$ и $z = 35c$. Со замена во $x + y + z = 227$, добиваме $33a + 20b + 35x = 227$. Сега, бидејќи $20b$ завршува на 0, а $35c$ завршува на 0 или 5, можни се два случаја:

1) Ако $35c$ завршува на 0, тогаш $33a$ завршува на 7, па затоа a завршува на 9, што не е можно бидејќи $33 \cdot 9 = 297 > 227$.
2) Ако $35c$ заврпува на 5, тогаш $33a$ завршува на 2, па затоа a завршува на 4. Единствена можност е $a = 4$, и со замена во $33a + 20b + 35x = 227$ добиваме $20b + 35c = 95$, т.е. $4b + 7c = 19$. Во множеството природни броеви единствено решение е $b = 3$ и $c = 1$.

Значи, $x = 132, y = 60, z = 35$, т.е. дедо Марко пред купувањето имал 132 јаболка, 60 круши и 35 мандарини. Првиот купувач купил 88

јаболка, 18 круши и 25 мандарини. Вториот купувач купил 12 јаболка, 15 круши и 7 мадарини.

24. Определи ги сите природни броеви a такви што
$$806 \cdot \mathrm{NZD}(a,806) + a \cdot \mathrm{NZS}(a,806) \le 2015a .$$

Решение. Најмалиот заеднички содржател на a и 806 е број од низата $806, 2\cdot 806, 3\cdot 806, \ldots$ Ако $\mathrm{NZS}(a,806) = 3\cdot 806$ или поголем, тогаш собирокот $a \cdot \mathrm{NZS}(a,806)$ на левата страна на неравенството е $2418a$ или поголем, па затоа $\mathrm{NZS}(a,806)$ мора да е 806 или $2\cdot 806$.

Ако $\mathrm{NZS}(a,806) = 806$, тоа значи дека a е делител на $806 = 2\cdot 13\cdot 31$. Значи, можни вредности на a се 1, 2, 13, 31, 26, 62, 403 и 806. Неравенството е исполнето, бидејќи во тој случај $\mathrm{NZD}(a,806) = a$.

Ако $\mathrm{NZS}(a,806) = 2\cdot 806$, тоа значи дека a е: 4, 52, 124 или 1612. Во тој случај $\mathrm{NZD}(a,806) = \frac{a}{2}$ и важи
$$806 \cdot \mathrm{NZD}(a,806) + a \cdot \mathrm{NZS}(a,806) = 806 \cdot \tfrac{a}{2} + a \cdot 1612 = 2015a .$$

Значи, бараните вредности на a се: 1, 2, 4, 13, 26, 31, 52, 62, 124, 403, 806 и 1612.

25. Докажи дека за секои природни броеви a,k,l важи
$$\mathrm{NZD}(a^k - 1, a^l - 1) = a^{\mathrm{NZD}(k,l)} - 1 .$$

Решение. Ако $k = l$, тогаш тврдењето е тривијално. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $k > l$. Тогаш, од Евклидовиот алгоритам следува
$$\begin{aligned} \mathrm{NZD}(a^k - 1, a^l - 1) &= \mathrm{NZD}(a^k - a^l, a^l - 1) \\ &= \mathrm{NZD}(a^{k-l} - 1, a^l - 1) \\ &= \ldots = a^{\mathrm{NZD}(k,l)} - 1. \end{aligned}$$

26. Определи ги сите подредени парови природни броеви (a,b) такви што
$$\begin{aligned} &\mathrm{NZS}(a,b) = \mathrm{NZD}(a,b) + 20, \\ &5a - 7b = 4. \end{aligned}$$

Решение. Нека $d = \mathrm{NZD}(a,b)$. Тогаш постојат заемно прости природни броеви u и v такви што $a = du$ и $b = dv$. Со замена во второто равнство добиваме $5du - 7dv = 4$, т.е. $d(5u - 7v) = 4$. Значи, $d \mid 4$, па е

$d=1$ или $d=2$ или $d=4$.

Ако $d=1$, тогаш $\text{NZS}(a,b)=1+20=21$. Од $1=\text{NZD}(a,b)$ следува дека броевите a и b се заемно прости, па затоа $\text{NZS}(a,b)=ab$. Значи, $ab=21$. Од равенството $5a-7b=4$ следува $a>b$, па затоа $ab=21$ следува $a=21, b=1$ или $a=7, b=3$. Со замена во $5a-7b=4$, заклучуваме дека ниту еден од паровите $(21,1)$ и $(7,3)$ не ја задоволува оваа равенка.

Ако $d=2$, тогаш $\text{NZS}(a,b)=22$, $a=2u, b=2v$ и $\text{NZS}(a,b)=2uv$. Според тоа, $2uv=22$, т.е. $uv=11$. Бидејќи $a>b$, добиваме $u>v$, па затоа $u=11, v=1$. Тогаш $a=22$ и $b=2$. Со непосредна проверка гледаме дека не е задоволена равенката $5a-7b=4$.

Ако $d=4$, тогаш $\text{NZS}(a,b)=24$, $a=4u, b=4v$ и $\text{NZS}(a,b)=4uv$. Според тоа, $4uv=24$, т.е. $uv=6$. Бидејќи $a>b$, добиваме $u>v$, па затоа $u=6, v=1$ или $u=3, v=2$. Значи, $a=24, b=4$ или $a=12, b=8$. Со непосредна проверка гледаме дека само парот $(12,8)$ ја задоволува равенката $5a-7b=4$.

Значи, решение е парот $(12,8)$.

6. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

1. Определи ги сите прости броеви p за кои важи $2 < \frac{p}{16} < 3$.

   Решение. Од $2 < \frac{p}{16} < 3$ следува дека p е прост број за кој важи $32 < p < 48$. Според тоа, бараните прости броеви се: 37, 41, 43 и 47.

2. Пресметај го збирот на сите прости броеви p за кои важи $\frac{1}{6} < \frac{p}{16} < \frac{1}{2}$ и определи колку пати тој збир е помал од вредноста на изразот
   $A = 20 \cdot 13 - 13 \cdot 18 + 18 \cdot 11 - 11 \cdot 16 + 16 \cdot 9 - 9 \cdot 14 + 14 \cdot 7 - 7 \cdot 12 + 12 \cdot 5 - 5 \cdot 10$

   Решение. Дадените неравенства се еквивалентни со неравенствата $\frac{8}{48} < \frac{3p}{48} < \frac{24}{48}$, т.е. со неравенствата $8 < 3p < 24$, од каде следува дека бараните прости броеви се 3, 5 и 7, па нивниот збир е $3 + 5 + 7 = 15$. За даденият израз имаме:

   $$\begin{aligned} A &= 20 \cdot 13 - 13 \cdot 18 + 18 \cdot 11 - 11 \cdot 16 + 16 \cdot 9 - 9 \cdot 14 + 14 \cdot 7 - 7 \cdot 12 + 12 \cdot 5 - 5 \cdot 10 \\ &= 13 \cdot (20 - 18) + 11 \cdot (18 - 16) + 9 \cdot (16 - 14) + 7 \cdot (14 - 12) + 5 \cdot (12 - 10) \\ &= 13 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \\ &= 2 \cdot (13 + 11 + 9 + 7 + 5) \\ &= 2 \cdot 45 = 90. \end{aligned}$$

   Сега, од $90 : 15 = 6$ добиваме дека збирот на трите прости броеви е 6 пати помал од вредноста на изразот A.

3. Темјана редоследно ги запишува броевите $1, -3, 5, -7, 9, -11, \ldots$ (наизменично ги менува знаците на броевите кои по апсолутна вредност ја формираат низата непарни природни броеви). Колку броеви Темјана може да запише така што збирот на сите запишани броеви ќе биде делител на бројот 2023?

   Решение. Бројот 2023 може да се запише како производ на прости множители на следниов начин: $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$, па затоа делители на бројот 2023 се 1, 7, 17, 119, 289 и 2023. Во дадената низа гледаме дека збирот на вториот и третиот член е 2, на четвртиот и петтиот член е 2, ..., т.е. збирот на секој парен член на низата и неговиот следбеник е еднаков на 2, па затоа збирот на непарен број членови на низата е ед-

наков на бројот на членовите на низата. Оттука следува дека Темјана може да запише броеви на шест начини, така што во низата ќе ги има 1, 7, 17, 119, 289 и 2023.

Забелешка. Негативните делители не може да се добијат, бидејќи за да се добие негативен број треба да собереме парен број членови на низата, при што збирот е парен број, а 2023 нема парни делители.

4. Определи шестцифрен број кој е запишан со цифрите 4, 5, 6, 7, 8 и 9 (секоја цифра е употребена по еднаш) и кој е делив со 2013.

Решение. Од $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ следува дека бараниот број $\overline{abcdef}$ треба да е делив со 11. Од признакот за деливост со 11 следува дека $a - b + c - d + e - f$ треба да е делив со 11. Но,

$$|a - b + c - d + e - f| \leq 9 + 8 + 7 - 6 - 5 - 4 = 9,$$

а меѓу -9 и 9 единствен број кој е делив со 11 е бројот 0. Значи, $a - b + c - d + e - f = 0$, т.е. $a + c + e = b + d + f$. Понатаму,

$$39 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = a + b + c + d + e + f = 2(a + c + e),$$

што е противречност, бидејќи левата страна е непарен, а десната страна е парен број. Од добиената противречност следува дека не постои број со саканите својства.

5. Со кој најмал природен број треба да се помножи бројот 63000 така што добиниот производ ќе биде точен квадрат?

Решение. Бројот 63000 го разложуваме на прости множители и добиваме

$$63000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7. \qquad (1)$$

Еден број е точен квадрат на природен број, ако секој број кој се јавува во разложувањето на бројот на прости множители се среќава парен број пати, т.е. степеновиот показател на секој различен прост множител е парен број. Бидејќи се бара најмалиот природен број со кој треба дадениот број да се помножи, истиот го наоѓаме како производ на најмалку множители потребни за да сите степенови показатели се парни броеви. Сега, ако се земе предвид десната страна на (1), добиваме дека треба да имаме по еден множител еднаков на 2, на 5 и на 7. Значи, бараниот број $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ и притоа добиваме

$$63000 \cdot 70 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7)^2 = 2100^2.$$

6. Дали постојат цифри a и b ($a \neq 0$) такви што дванаесетцифрениот

број $\overline{abbaabbaabba}$ е квадрат на природен број?

Решение. Важи $\overline{abbaabbaabba} = \overline{abba} \cdot 100010001$. Бројот 100010001 е делив со 3, 7, 13 и 37, но не е делив со $3^2, 7^2, 13^2$ и 37^2. Затоа, за да $\overline{abbaabbaabba}$ е квадрат на природен број, треба бројот $\overline{abba}$ да е делив со 3, 7, 13 и 37. Но, броевите 3, 7, 13 и 37 се прости, па затоа се по парови заемно прости, од каде следува дека бројот $\overline{abba}$ треба да е делив со $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = 10101$. Последното не е можно бидејќи четирицифрениот број $\overline{abba}$ не е делив со петцифрениот број 10101. Според тоа, не постојат цифри a и b ($a \neq 0$) такви што дванаесетцифрениот број $\overline{abbaabbaabba}$ е квадрат на природен број.

7. Определи го најмалиот природен број n за кој $n(n+1)(n+2)(n+3)$ е делив со 120000.

Решение. Имаме, $120000 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^4$.

Производот на секои три последователни броја е делив со 3, па затоа $n(n+1)(n+2)(n+3)$ секогаш е делив со 3. Освен тоа, меѓу четири последователни броја има точно два парни, при што едниот од нив не е делив со 4. Значи, меѓу четирите последователни броја има број кој е делив со $2^5 = 32$ и број кој од него се разликува најмногу за 3 кој е делив со $5^4 = 625$.

Најмалиот број кој е делив со 625 е бројот 625, а четирите парни броја чија разлика со 625 е помала од 4 се 622, 624, 626 и 628, но ниту еден од нив не е делив со 32. Следен број кој е делив со 625 е бројот 1250 и притоа важи $1248 = 32 \cdot 39$. Според тоа, најмалиот број n за кој $n(n+1)(n+2)(n+3)$ е делив со 120000 е $n = 1247$.

8. За да ја играм новата комјутерска игра, треба да внесам иницијален код. Во упатството пишува, дека кодот се состои од четири цифри чиј производ е 2520, запишани во опаѓачки редослед. Кој е иницијалниот код на комјутерската игра?

Решение. Имаме, $2520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, па како цифрите 5 и 7 не може да се помножат со некој од броевите 2 и 3 и да се добие цифра, заклучуваме дека две од четирите цифри се 5 и 7. Понатаму, е јасно дека бројот 2520 како производ на четири едноцифрени броја може да се запише на единствен начин и тоа $2520 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7$. Конечно, кодот

за новата комјутерска игра е 9875.

9. Определи ги сите природни броеви деливи со 8 чиј збир на цифри е помал од 10, а производот на цифрите им е 12.

Решение. Имаме $12 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. Според тоа, цифрите на бараните броеви може да бидат 1, 2, 3, 4 и 6.

Единствени двоцифрени броеви чиј производ на цифри е 12 се броевите 26, 34, 43 и 62, но ниту еден од нив не е делив со 8.

Ако бројот е трицифрен, тогаш неговиот двоцифрен завршеток мора да е делив со 4, па како производот на цифрите мора да е делител на 12, добиваме дека двоцифрените завршетоци се некои од броевите: 12, 16 и 32. Сега, трицифрени броеви со саканото својство се: 216 и 232.

Ако бројот има повеќе од три цифри, тогаш неговиот трицифрен завршеток мора да е делив со 8 и производот на цифрите мора да е делител на 12, па затоа тоа се некои од броевите: 112, 216, 232, 312. Понатаму, внимавајќи збирот на цифрите да е помал од 10, а производот на цифрите да е еднаков на 12, на овие броеви од лево ќе им ги допишуваме цифрите 1 или 2 или 3.

Производот на цифрите на бројот 112 е 2, па затоа од лево треба да му се допишат цифрите 2 и 3, при што имајќи го предвид претходно реченото ги добиваме броевите: 23112 и 32112.

Завршетокот 312 ги генерира броевите: 2312, 12312 и 21312.

Завршетокот 232 ги генерира броевите: 1232 и 11232.

Конечно, бараните броеви се: 216, 232, 23112, 32112, 2312, 12312, 21312, 1232 и 11232

10. Теодор последователно ги собирал природните броеви, се додека не добил збир кој е трицифрен број запишан со една иста цифра. Колку броеви собрал Теодор?

Решение. Нека Теодор ги собрал првите n природни броеви. Тој го добил збирот

$$1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + ... = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Тој добил збир кој е трицифрен број запишан со една иста цифра,т.е. добил збир $\overline{kkk} = 111k = 3 \cdot 37k$. Значи, $\frac{n(n+1)}{2} = 3 \cdot 37k$, односно

$$n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37k .$$

Бидејќи 37 е прост број, а k е цифра, производот $2 \cdot 3 \cdot 37k = 6 \cdot 37k$ е производ на два последователни природни броја ако и само ако $k = 6$.

Според тоа, $n(n+1)=36\cdot 37$, од каде следува $n=36$.

11. Бројот 2022 е запишан како производ на пет различни цели броеви. Определи го најмалиот можен збир на овие пет броеви.
Решение. Имаме $2022=2\cdot 3\cdot 337$ и броевите 2, 3 и 337 се прости. Според тоа, ако бројот 2022 е запишан како производ на пет различни цели броеви, тогаш два од нив по апсолутна вредност треба да се еднакви на 1, а преостанатите по апсолутна вредност треба да се еднакви на 2, 3 и 337. Бидејќи броевите треба да се различни, два броја се 1 и -1, па како се бара збирот да е најмал можен другите три броја се $-2,-3,-337$ и тогаш збирот е еднаков на -342.

12. Бројот 2090 е запишан како производ на шест различни цели броеви. Определи го најмалиот можен збир на овие шест броеви.
Решение. Имаме
$$2090=209\cdot 10=11\cdot 19\cdot 5\cdot 2.$$
Бидејќи бројот има четири прости множители и е запишан како производ на шест различни цели броеви, два од овие шест множители се броевите 1 и -1. Понатаму, бројот е позитивен, па затоа мора да има парен број негативни множители. Но, ја бараме најмалата вредност на збирот, па затоа ќе имаме максимално можен број негативни множители и тоа мора да се множителите со најголема апсолутна вредност. Значи,
$$2090=(-19)\cdot(-11)\cdot(-5)\cdot 2\cdot(-1)\cdot 1,$$
па бараната најмала можна вредност на збирот е
$$(-19)+(-11)+(-5)+2+(-1)+1=-33.$$

13. Ако бројот 19250 се подели со некој број се добива остаток 11, а ако бројот 20302 се подели со истиот тој број се добива остаток 3. Определи ги количниците од овие делења?
Решение. Имаме,
$$19250-11=3\cdot 11\cdot 11\cdot 53 \text{ и } 20302-3=20299=53\cdot 383,$$
од каде заклучуваме дека непознатиот делител е бројот 53, а количниците се $3\cdot 11\cdot 11=363$ и 383.

14. Илина поделила квадрат со страна $180\,cm$ на квадрати со страна $n\,cm$, каде n е природен број поголем од 1. Темјана поделила квадрат со

страна $204\,cm$ на квадрати со страна $n+5\,cm$. И во двата случаи не останале делови од големите квадрати. Колку квадрати исекле двете девојчиња?

Решение. Бројот n е делител на $180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$, а $n+5$ е делител на $204=2^2\cdot 3\cdot 17$.

Ако $5\mid n$, тогаш $5\mid n+5$, т.е. $5\mid 204$, што не е можно. Според тоа, 5 не е делител на n, па затоа n е делител на $2^2\cdot 3^2$. Понатаму, бидејќи n е поголем од 1, можностите за n се 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 и 36, од каде добиваме дека $n+5$ е еднаков на 7, 8, 9, 11, 14, 17, 23 или 41. Од последните броеви само 17 е делител на 204, па затоа $n=12$.

Значи, Илина исекла $(180:12)^2=225$ квадрати, а Темјана исекла $(204:17)^2=144$ квадрати. Значи, двете девојчиња заедно исекле $225+144=369$ квадрати.

15. Определи ги сите трицифрени прости броеви $\overline{xyz}$ за кои важи $x\cdot y\cdot z=252$.

Решение. Бројот 252 го запишуваме како производ на прости броеви и добиваме $2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7=252$. Оттука добиваме дека цифрите на броевите мора да се 4, 7, 9 или 6, 6, 7. Единствени прости броеви кои се запишуваат со двете тројки цифри се 479 и 947.

16. Определи го збирот на цифрите на природниот број $\overline{abcde}$, ако бројот $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}+\overline{ea}$ е точен квадрат.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}+\overline{ea}&=10a+b+10b+c+10c+d+10d+e+10e+a\\&=11(a+b+c+d+e).\end{aligned}$$

Бидејќи 11 е прост број, производот $11(a+b+c+d+e)$ е точен квадрат ако и само ако $a+b+c+d+e=11k^2$, за некој природен број k. Но, $a+b+c+d+e\le 45$, па затоа $a+b+c+d+e=11$, (кога $k=1$) или $a+b+c+d+e=44$ (кога $k=2$).

17. Докажи дека при делење на прост број p со бројот 30 се добива остаток кој е прост број.

Решение. Нека $p=30k+r$, $0\le r<30$. Јасно, $r>0$, бидејќи во спро-

тивно $p = 30k$ ќе биде сложен број.

Понатаму, секој сложен број помал од 30 има прост делител барем еден од броевите 2, 3 и 5, кои се делители на бројот 30. Значи, ако r е сложен број, тогаш r и 30 имаат заеднички прост делител q, т.е. $30 = qa$ и $r = qb$, каде $a, b \in \mathbb{N}$. Но, тогаш

$$p = 30k + r = qak + qb = q(ka + b),$$

т.е. $q \mid p$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува r е прост број. Јасно, $r > 5$.

18. Ако p и $p^2 + 2$ се прости броеви, докажи дека и бројот $p^3 + 2$ е прост.

Решение. Ако $p = 2$, тогаш $p^2 + 2 = 6$ не е прост број. Ако $p = 3$, тогаш $p^2 + 2 = 11$ е прост број. Тогаш и $p^3 + 2 = 29$ е прост број.

Ако $p \geq 5$ е прост број, тогаш $p = 6k \pm 1$, за некој $k \in \mathbb{N}$, па затоа

$$p^2 + 2 = (6k \pm 1)^2 + 2 = 36k^2 \pm 12k + 3 = 3 \cdot (12k^2 \pm 4k + 1)$$

е сложен број.

Според тоа, само за простиот број $p = 3$ бројот $p^2 + 2$ е прост и тогаш и бројот $p^3 + 2$ е прост.

19. а) Дали постојат четири различни природни броја такви што збирот на секои три од нив е прост број?

б) Дали постојат пет различни природни броеја такви што збирот на секои три од нив е прост број?

Решение. а) Да. На пример, такви се четворките: (1, 3, 7, 9), (3, 7, 9, 31) итн.

б) Секој број при делење со 3 дава остаток 0, 1 или 2. Ако меѓу пет броеви има три кои при делење со 3 даваат остатоци 0, 1 и 2, тогаш нивниот збир е делив со 3, а ако нема, тогаш од принципот на Дирихле следува дека меѓу нив има три броја кои при делење со 3 даваат ист остаток, па затоа нивниот збир е делив со 3.

20. Определи сложен природен број s и прост природен број p, такви што $\frac{32^5 \cdot 16^4 \cdot 8^3}{64^2} = s^p$.

Решение. Имаме

$$\frac{32^5\cdot 16^4\cdot 8^3}{64^2}=\frac{2^{25}\cdot 2^{16}\cdot 2^9}{2^{12}}=2^{38}.$$

Бидејќи $38=2\cdot 19$, имаме две решенија $s=2^2$, $p=19$ и $s=2^{19}$, $p=2$.

21. Определи прост број p и различни цели броеви a и b такви што $p+|ab|=10$. Колку решенија има задачата (сметаме дека решението е исто ако броевите a и b ги заменат вредностите).

Решение. Простиот број p може да ги прима вредностите 2, 3, 5 и 7. Во зависност од вредноста на p ги имаме следниве решенија:

p	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
a	1	–1	1	–1	2	–2	2	–2	1	–1
b	8	8	–8	–8	4	4	–4	–4	7	7
p	3	3	5	5	5	5	7	7	7	7
a	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1
b	–7	–7	5	5	–5	–5	3	3	–3	–3

Значи, задачата има 20 решенија.

22. Определи ги сите непарни прости броеви p такви што збирот на сите нескратливи дропки со именител p кои се поголеми од 4 и се помали од 6 е еднаков на 100.

Решение. Разгледуваните дропки имаат именители $4p+1, 4p+2, \ldots,$ $5p-1$ и $5p+1, 5p+2, \ldots, 6p-1$. Навистина, бидејќи p е прост број, секоја од овие дропки е нескратлива. Збирот на броителите е

$$\begin{aligned}(4p+1)+(4p+2)+\ldots+(5p-1)+(5p+1)+(5p+1)+\ldots+(6p-1)=\\ =(4p+1+6p-1)+(4p+2+6p-2)+\ldots+(5p-1+5p+1)\\ =10p(p-1).\end{aligned}$$

Значи, за збирот на разгледуваните дропки добиваме $\frac{10p(p-1)}{p}=100$, од каде наоѓаме $p=11$.

23. Познато е дека трицифрените броеви $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ имаат заеднички прост делител p.

а) Докажи, дека p е делител на барем еден од броевите $a+b+c$, $a-b+c$ и $a-c$.

б) Определи ги сите можни вредности за p кога $a\neq c$.

Решение. а) Од условот на задача следува, дека p е делител на

$\overline{abc}-\overline{cba}=100a+10b+c-(100c+10b+a)=99(a-c)=3^2\cdot 11(a-c)$.

Ако p не е делител на $a-c$, тогаш $p=3$ или $p=11$.

Ако $p=3$, тогаш збирот на цифрите на $\overline{abc}$ е делив со 3, т.е. p е делител на $a+b+c$.

Ако $p=11$, тогаш бројот $\overline{abc}$ е делив со 11, па од признакот за деливост со 11 следува дека 11 е делител на $a-b+c$.

б) Од а) следува дека можни вредности за p се 3 и 11 и простите делители на $|a-c|$. Сега, бидејќи $0<|a-c|<8$, во последниот случај имаме $p=2,3,5$ или 7.

За $p=5$ не постојат трицифрени броеви $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ деливи со 5 и $a\neq c$.

Останатите случаи се реализираат и тоа:

- за $p=2$ тоа е бројот $\overline{abc}=204$,
- за $p=3$ тоа е бројот $\overline{abc}=123$,
- за $p=7$ тоа е бројот $\overline{abc}=168$,
- за $p=11$ тоа е бројот $\overline{abc}=132$.

Според тоа, решение се броевите 2, 3, 7 и 11.

24. Се формираат сите различни производи од по два различни множители од првите пет прости броеви. Пресметај го квадратниот корен од производот на квадратните корени на добиените производи.

Решение. Нека a,b,c,d,e се пет различни ненегативни броеви. Сите производи од по два различни множители на овие броеви се:

$$ab,ac,ad,ae,bc,bd,be,cd,ce,de.$$

Нивните квадратни корени се:

$$\sqrt{ab},\sqrt{ac},\sqrt{ad},\sqrt{ae},\sqrt{bc},\sqrt{bd},\sqrt{be},\sqrt{cd},\sqrt{ce},\sqrt{de},$$

а квадратниот корен од производот на добиените квадратни корени е:

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{ac}\sqrt{ad}\sqrt{ae}\sqrt{bc}\sqrt{bd}\sqrt{be}\sqrt{cd}\sqrt{ce}\sqrt{de}}\\&=\sqrt{\sqrt{(ab)(ac)(ad)(ae)(bc)(bd)(be)(cd)(ce)(de)}}\\&=\sqrt[4]{a^4b^4c^4d^4e^4}=\sqrt[4]{(abcde)^4}=abcde.\end{aligned}$$

Во случајов имаме $a=2,b=3,c=5,d=7,e=11$, па затоа

$$A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 .$$

25. Нека a и b се два различни природни броја, поголеми од 1 такви што $b^2 + a - 1$ е делител на $a^2 + b - 1$. Докажи дека бројот $b^2 + a - 1$ има најмалку два различни прости делители.

Решение. Јасно, $a > b$ и $b^2 + a - 1 | (b^2 + a - 1)(b^2 - 1 - a)$ односно $b^2 + a - 1 | (b^2 - 1)^2 - a^2$. Сега, бидејќи $b^2 + a - 1 | a^2 + b - 1$, добиваме дека $b^2 + a - 1 | (b^2 - 1)^2 + b - 1 = b(b-1)(b^2 + b - 1)$. Понатаму, бидејќи секој од множителите $b, b-1$ и $b^2 + b - 1$ е заемно прост со другите два множители и е помал од $a^2 + b - 1$, заклучуваме дека $b^2 + a - 1$ има најмалку два различни прости множители.

26. Определи ги сите прости броеви помали од 1000 чиј збир на цифри е еднаков на 4.

Решение. Бидејќи треба да ги определиме простите броеви цифрата на единиците мора да е непарна. Постојат два двоцифрени броеви со ова својство и тоа: 13 и 31. Од четирите трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4, а последната цифра е непарна: 103, 121, 211 и 301, два се сложени и тоа: $121 = 11 \cdot 11$ и $301 = 7 \cdot 43$, што значи дека само броевите 103 и 211 се прости.

Конечно, сите решенија на задачата се: 13, 31, 103 и 211.

27. Ако n е сложен број, докажи дека и $2^n - 1$ е сложен број.

Решение. Ако n е сложен број, тогаш постојат шриродни броеви p и q, $p, q \geq 2$ такви што $n = pq$. Според тоа,

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^2 - 1 = (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \ldots + 2^p + 1),$$

па како $2^p - 1 \geq 3$ и $2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \ldots + 2^p + 1 \geq 5$ заклучуваме дека $2^n - 1$ е сложен број.

28. Определи ги сите цели броеви n такви што бројот $n^3 - 2n^2 + 2n - 4$ е прост.

Решение. Имаме,

$$n^3 - 2n^2 + 2n - 4 = (n^2 + 2)(n - 2),$$

па затоа од $n-2<n^2+2$ следува дека n^3-2n^2+2n-4 е прост број ако $n-2=1$ и n^2+2 е прост број. Значи, $n=3$ и како $n^2+2=11$ следува дека $n=3$ е единствено решение на задачата.

29. Определи ги сите тројки прости броеви (a,b,c) за кои важи

$$abc<ab+bc+ca\,. \qquad (1)$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\le b\le c$. Ако $a\ge 3$, тогаш

$$ab+bc+ca\le 3bc\le abc\,,$$

што противречи на (1). Затоа $a=2$. Со замена во (1) добиваме

$$2bc<2b+bc+2c\,,$$

односно

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2}\,.$$

Сега, ако $b\ge 5$, тогаш

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{2}{5}<\frac{1}{2}\,,$$

па затоа $b=2$ или $b=3$.

Ако $b=2$, тогаш $4c<4+4c+2c$, што значи дека p е било кој прост број.

Ако $b=3$, тогаш $6c<6+5c$, т.е. $c<6$, што значи $c=3$ или $c=5$.

Добиените решенија ги најдовме при претпоставка $a\le b\le c$, па затоа сите решенија на задачата се:

$$(2,2,p),(2,p,2),(p,2,2),(2,3,3),(3,2,3),(3,3,2),$$
$$(2,3,5),(5,2,3),(3,5,2),(3,2,5),(5,3,2),(2,5,3),$$

каде p епроизволен прост број.

30. Определи го најмалиот природен број, кој истовремено е 2 пати поголем од квадрат на природен број и 5 пати поголем од петти степен на природен број.

Решение. Бидејќи го бараме најмалиот природен број со дадените својства, можеме да сметаме, дека простите делители на бројот се само 2 и 5. Бидејќи бројот е два пати поголем од точен квадрат, заклучуваме дека степенот на бројот 2 е непарен, а степенот на 5 е парен. Бидејќи бројот е пет пати поголем од петти степен на природен број, заклучуваме дека степенот на 2 треба да е делив со 5, а степенот со 5 треба да дава остаток 1 при делење со 5. Најмалиот број со

наведените својства е $2^5 \cdot 5^6 = 500000$.

31. За еден природен број ќе велиме дека и *надворешен*, ако сите степени во неговото канонично разложување се непарни. На пример, броевите 22, 23 и 24 формираат низа од три последователни надворешни броеви, бидејќи $22 = 2^1 \cdot 11^1, 23 = 23$, $24 = 2^3 \cdot 3^1$. Колкава е најголемата должина на низа последователни надворешни броеви?

Решение. Да забележиме дека $29 = 29^1$, $30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, $31 = 31^1$, $32 = 2^5$, $33 = 3^1 \cdot 11^1$, $34 = 2^1 \cdot 17^1$ и $35 = 5^1 \cdot 7^1$ се седум последователни надворешни броеви. Ќе докажеме дека не може да има повеќе од седум последователни надворешни броеви. Од секои осум последователни броеви точно еден е делив со 8. Овој број да го означиме со a. Тогаш еден од броевите $a-4$ и $a+4$ е меѓу избраните осум броеви и овој број е делив со 4, но не е делив со 8. Овој број во каноничното разложување има степен 2 на бројот 2, па затоа не е надворешен број.

32. За еден природен број n ќе велиме дека е *суперпрост* ако разликата на секои два негови последователни позитивни делители е прост број. Определи ги сите суперпрости броеви.

Решение. Јасно, бројот $n = 3$ се суперпрост, во што се убедуваме со непосредна проверка.

Ќе докажеме дека не постојат други суперпрости броеви. Нека $n \geq 2$ е суперпрост број. Нека d е најмалиот природен делител на n, различен од 1. Ако d не е прост број, тогаш $d = ab$, каде $1 < a < d$, па затоа a е делител на n кој е различен од 1, и е строго помал од d, што противречи на минималноста на d. Заклучуваме дека $d = p$ за некој прост број p.

Тогаш 1 и p се последователни делители на n, па $p-1$ е некој прост број q. Ако $q \geq 3$, тогаш q е непарен број, па p е парен број поголем од 2, што значи дека не е прост број, а тоа е противречност. Според тоа, $q = 2$ и $p = 3$. Бидејќи p е најмалиот делител на n различен од 1, бројот $\frac{n}{3}$ е втор најголем делител на n, што значи дека $n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$ мора да е прост број, да го означиме со r. Според тоа, $2n = 3r$. Но, r е прост број, па мора да е $r = 2$ и $n = 3$.

33. Докажи дека постојат бесконечно многу прости броеви од вид $6k+5$.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат конечно многу прости броеви од дадениот вид и нека се тоа броевите $p_1, p_2, ..., p_n$. Тогаш бројот $6P-1=6p_1p_2...p_n-1$ има прост делител од видот $6l-1$, бидејќи во спротивно сите делители би биле од видот $6l+1$, а тогаш и самиот број $6P-1$ би бил од тој вид. Според тоа, постои прост број од видот $6l-1=6(l-1)+5$ различен од броевите $p_1, p_2, ..., p_n$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

34. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот $2p^2+p+9$ е точен квадрат.

Решение. Нека $2p^2+p+9=n^2$ за некој природен број n. Тогаш $p(2p+1)=(n-3)(n+3)$. Оттука следува дека $p \mid n-3$ или $p \mid n+3$. Ако $p \mid n-3$, тогаш $n-3=mp$ за некој природен број m и $n-3 \geq p$. Заклучуваме дека

$$2p+1 \geq n+3 = n-3+6 = mp+6.$$

Според тоа, $(2-m)p \geq 5$. Последното е можно само за $m=1$. Тогаш $n-3=p$ и $2p+1=n+3$, од каде добиваме $p=5$ и $n=8$.

Ако $p \mid n+3$, тогаш $n+3=mp$ за некој природен број m и $n+3 \geq p$. Заклучуваме дека

$$2p+1 \geq n-3 = n+3-6 = mp-6.$$

Според тоа, $(m-2)p \leq 7$. Последното е можно само за $m \leq 5$. Случаите $m=1, m=2, m=3, m=4$ и $m=5$ се отфрлаат со непосредна проверка.

Конечно, задачата има единствено решение $p=5$.

35. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот $37p^2-47p+4$ е точен квадрат.

Решение. Нека $37p^2-47p+4=n^2$, за некој природен број n. Тогаш $p(37p-47)=(n-2)(n+2)$. Ако $p \mid n-2$, тогаш $n-2=pm$ за некој природен број m. Затоа $n+2=mp+4$, од каде добиваме дека важи $(37-m^2)p=4m+47$. Значи, мора да е $37-m^2>0$, од каде следува

$m \le 6$. Со непосредна проверка на сите можности за m ги добиваме решенијата $p = 3$ за $m = 4$ и $p = 71$ за $m = 6$.

Ако $p \mid n+2$, тогаш $n+2 = pm$ за некој природен број m. Затоа $n-2 = mp-4$, од каде добиваме дека важи $(37-m^2)p = 47-4m$. Случаите $m \le 6$ се разгледуваат со непосредна проверка, при што добиваме дека само $p = 23$ за $m = 6$ е решение.

Ако $m > 6$, тогаш равенството $(m^2-37)p = 4m-47$ не е можно, бидејќи $m^2-37 > 4m-47$, што е еквивалентно со очигледното неравенство $(m-2)^2+6 > 0$.

36. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот p^2-p+1 е точен куб.

Решение. Нека $p^2-p+1 = n^3$ за некој природен број. Лесно се проверува дека $n \neq 1$ и $n \neq 2$. Тогаш

$$p(p-1) = (n-1)(n^2+n+1).$$

Јасно, ако $p \mid n-1$, тогаш $p \le n-1$ и затоа $n-2 \ge p-1 \ge n^2+n+1$, т.е. $n^2 \le -3$ што не е можно. Според тоа, $n^2+n+1 = mp$ за некој природен број m и тогаш $p-1 = m(n-1)$. Според тоа,

$$n^2+n+1 = m^2n+m-m^2. \qquad (1)$$

Бидејќи $m^2-m+1 = (m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} > 0$, добиваме $1 > m-m^2$, па од (1) следува $n^2+n < m^2n$, т.е. $n+1 < m^2$. Равенството (1) е еквивалентно со равенството

$$m^2(n-1)+m-2 = n^2+n-1. \qquad (2)$$

Лесно се проверува дека случаите $m = 1$ и $m = 2$ не се можни и затоа можеме да сметаме дека $m > 2$. Сега, од равенството (2) следува неравенството $m^2(n-1) < n^2+n-1$. Претходно видовме дека случаите $n = 1$ и $n = 2$ не се можни, т.е. $n > 2$, па затоа

$$m^2 \le \frac{n^2+n-1}{n-1} = n+2+\frac{1}{n-1} < n+3.$$

Добивме, дека $n+1 < m^2 < n+3$, од каде следува $m^2 = n+2$. Сега, ако замениме во (2) добиваме $m = 3$, па затоа $n = 3^2-2 = 7$ и $p = 19$. Ко-

нечно, единствено решение на задачата е $p=19$.

37. Определи ги сите прости броеви p и q, за кои важи

$$p^3+q^3+1=p^2q^2.$$

Решение. Непосредно се проверува, дека паровите $(p,q)=(2,3)$ и $(3,2)$ се решенија на задачата. Ако $p=q$ е решение, тогаш

$$2p^3=p^4-1=(p-1)(p+1)(p^2+1),$$

што не е можно бидејќи ниту еден од множителите на десната страна не е делив со p. Бидејќи, $q^3+1=(q+1)(q^2-q+1)$, од равенството $p^3+q^3+1=p^2q^2$ следува дека p^2 е делител на $(q+1)(q^2-q+1)$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $p>q>2$, т.е. $p>q+1$ (равенството $p=q+1$ не е можно, бидејќи p и q се прости броеви поголеми од 2). Според тоа, p не е делител на $1+q$, па затоа p^2 е делител на q^2-q+1. Но, ова не е можно, бидејќи

$$0<q^2-q+1<q^2<p^2.$$

Конечно, единствени решенија на задачата се паровите $(p,q)=(2,3)$ и $(3,2)$.

7. БРОЈ НА ДЕЛИТЕЛИ НА ПРИРОДЕН БРОЈ

1. Определи ги сите прости броеви p такви што бројот p^2+11 има точно шест различни делители.

   Решение. За $p=2$ имаме $p^2+11=15$ и овој број има 4 различни делители. За $p=3$ добиваме $p^2+11=20$ и овој број има точно 6 различни делители: 1, 2, 4, 5, 10 и 20.
   Нека $p>3$. Тогаш $p=6k\pm1$, за некој $k\in\mathbb{N}$, па затоа

   $$p^2+11=(6k\pm1)^2+11=36k^2\pm12k+12=12(3k^2\pm k+1).$$

   Понатаму, бројот 12 има точно 6 различни делители: 1, 2, 3, 4, 6 и 12, па како $3k^2\pm k+1>1$, добиваме дека за $p>3$ бројот p^2+11 има повеќе од 6 различни делители.
   Конечно, единствено решение на задачата е $p=3$.

2. Определи го најмалиот трицифрен број n запишан со различни цифри кој има точно три делители.

   Решение. Секој природен број, освен бројот 1, има најмалку два природни делители. Притоа, природен број има точно два природни делители ако и само ако е прост. Ако во разложувањето на прости множители на даден природен број има најмалку два различни прости делители, на пример, p и q, тогаш бројот има најмалку четири природни делители, бидејќи тој број ќе биде делив со $1, p, q$ и pq.
   Значи, за да природен број n има точно три делители тој мора да има само еден прост множител p кој треба да биде на степен 2 (ако степенот на p е 3 или поголем, тогаш сигурно делители на бројот n се $1, p, p^2, p^3$, т.е. тој има најмалку четири природни делители). Значи, природниот број n е квадрат на прост број. Сега, бидејќи цифрите на бројот $11^2=121$ не се различни, а бројот $13^2=169$ е запишан со различни цифри заклучуваме дека $n=169$ е бараниот број.

3. Определи го бројот на делителите на бројот 36270.

Решение. Ќе користиме: ако $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ е каноничното претставување на природниот број n,тогаш тој има

$$\tau(n) = (1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)$$

природни делители.

Имаме, $36270 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$, па затоа бројот

$$\tau(36270) = (1+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 48.$$

4. Определи ги сите броеви кои се помали од 100000 и кои имаат точно пет делители.

Решение. Со $\tau(n)$ да го означиме бројот на делителите на природниот број n. Нека $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ е каноничниот запис на број кој е помал од 100000 и за кој важи $\tau(n) = 5$. Тогаш, од

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_k + 1)$$

следува $(a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_k + 1) = 5$, па како 5 е прост број добиваме дека $k = 1$, што значи $a_1 + 1 = 5$, односно $a_1 = 4$. Според тоа, $n = p^4$, па затоа треба да ги определиме сите прости броеви p такви што $p^4 < 100000$. Сега, од $17^4 = 83521 < 100000$ и $19^4 = 130321 > 100000$ следува дека $p = 2,3,5,7,11,13$ и 17, што значи дека бараните броеви се $2^4, 3^4, 5^4, 7^4, 11^4, 13^4$ и 17^4.

5. Нека $\overline{abc}$ е трицифрен прост број. Колку делители има шестцифреniот број $\overline{abcabc}$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} \overline{abcabc} &= \overline{abc000} + \overline{abc} \\ &= 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc} \\ &= 1001 \cdot \overline{abc} \\ &= 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot \overline{abc}^1, \end{aligned}$$

од каде следува дека бројот на делителите на шестцифреniот број $\overline{abcabc}$ е еднаков на $(1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 16$.

6. Определи го простиот број p ако се знае дека бројот $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 p$ има

90 делители.

Решение. Ако $p>5$, тогаш бројот на делителите на $2^2\cdot 3^3\cdot 5^5 p$ е еднаков на $(2+1)(3+1)(5+1)(1+1)=144$. Ако $p=5$, тогаш бројот е $2^2\cdot 3^3\cdot 5^6$ и има $(2+1)(3+1)(6+1)=84<90$ делители. Ако $p=3$, тогаш бројот е $2^2\cdot 3^4\cdot 5^5$ и има $(2+1)(4+1)(5+1)=90$ делители. Ако $p=2$, тогаш бројот е $2^3\cdot 3^3\cdot 5^5$ и има $(3+1)(3+1)(5+1)=96>90$ делители. Значи, решение на задачата е $p=3$.

7. Нека n е најмалиот природен број кој е делив со 60 и кој се запишува само со цифрите 0 и 7. Колку делители има бројот n?

Решение. За да бројот е делив со 60 тој треба да е делив и со 3, и со 4, и со 5. Заради деливоста со 5 цифрата на едиците мора да е 0. Понатаму, заради деливоста со 4, бидејќи 70 не е делив со 4, неговиот двоцифрен завршеток мора да е 00. На крајот за да бројот е делив со 3, збирот на цифрите мора да е делив со 3. Најмал можен збир на цифри кој е делив со 3 е 21, па затоа бараниот најмал број е 77700. Сега, бидејќи $77700=2^2\cdot 3^1\cdot 5^2\cdot 7^1\cdot 37^1$, добиваме дека бројот на делителите на бараниот број е $(2+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=72$.

8. Бројот n ги има следниве својства.
   - бројот $2n$ е точен квадрат,
   - бројот $3n$ е точен куб,
   - бројот $6n$ има 308 делители од кои еден е 81.

   Колку делители има бројот n?

Решение. Бидејќи $2n$ е точен квдрат, во каноничното разложување на бројот n бројот 2 учествува на непарен степен, а сите останати прости множители се со парен степен. Освен тоа, $3n$ е точен куб, па затоа во разложувањето на n на прости множители бројот 3 учествува на степен од видот $3k+2$, а сите преостанати множители на степен делив со 3. Според тоа, во разложувањето на n бројот 2 е на степен од видот $6k+3$, 3 е на степен од видот $6l+2$ и ако има други прости множители, тие се на степен од видот $6s$.

Бидејќи бројот $6n$ има точно 308 делители и $308=2\cdot 2\cdot 7\cdot 11$ е производ на $6k+5, 6l+4$ и евентуално на множители од видот $6s+2$. Освен тоа $6n$ е делив со 81, па затоа $l>0$. Непарниот множител

$6k+5$ може да е еднаков на 11 или 77, па затоа $k=1$ или $k=12$. Ако $k=1$, тогаш множителот $6l+4$ и евентуалните множители од видот $6s+2$ се еднакви на 28, од каде следува дека $l=4$. Ако $k=12$, тогаш $6l+4=4$, т.е. $l=0$,што е противречност.

Според тоа, $n=2^9\cdot 3^{26}$ и има $(9+1)\cdot(26+1)=270$ делители.

9. Нека $n-1$ и $n+1$ се прости броеви и $n>18$, $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека бројот n има најмалку 8 природни делители.

Решение. Бидејќи $n+1$ е прост број поголем од 19, тој е непарен, што значи дека n е парен број. Понатаму, еден од трите последователни броеви $n-1,n,n+1$ е делив со 3, па како $n-1$ и $n+1$ се прости броеви поголеми од 3, заклучуваме дека $3\mid n$. Можни се два случаја:

1) Ако n има уште некој прост делител p различен од 2 и 3, тогаш некои од делителите на n се броевите: 1, 2, 3, 6, $p, 2p, 3p$ и $6p$, т.е. n има најмалку 8 делители.
2) Ако n нема друг делител освен 2 и 3, тогаш $n=2^a3^b$, каде a и b се природни броеви. Но, тогаш бројот на делителите на n е еднаков на $(a+1)(b+1)$. Последниот производ е помал од 8 само ако $(a,b)\in\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$. Но, во овие три случаи $n\le 18$, што противречи на условот на задачата. Конечно, од добиената противрелност следува дека n има најмалку 8 делители.

10. Колку делители има бројот 30^{30} кои завршуваат со точно 15 нули.

Решение. Делителите на бројот 30^{30} може да се запишат во обликот $2^a3^b5^c$, каде $a,b,c=0,1,2,...,30$. За да таков делител завршува на 15 нули, двата броја a и c мора да се еднакви на 15 или едниот треба да е еднаков на 15, а другиот мора да е поголем од 15.

Во случај кога двата броја се еднакви на 15, бројот b може да е еднаков на 0, 1, 2, ..., 30, па затоа во овој случај имаме 31 делител.

Во случај кога $a=15$ и $c>15$, имаме $31\cdot 15$ делители со саканото својство, а исто точки делители имаме и во случај кога $a>15$ и $c=15$. Конечно, бараниот број делители е

$$31\cdot(15+15+1)=31^2=961.$$

11. За еден природен број n со $S(n)$ го означуваме бројот на природните броеви m, за кои $m+n$ е делител на mn. Определи го најголемиот од броевите $S(2014), S(2015)$ и $S(2016)$.

Решение. Бидејќи $mn = m(m+n) - n^2$, добиваме дека $m+n$ е делител на mn ако и само ако $m+n$ е делител на n^2. Според тоа, $S(n)$ е еднаков на бројот на делителите на n^2 кои се поголеми од n. На секој делител $d > n$ на n^2 му соодветствува делител $\frac{n^2}{d} < n$ на n^2, и обратно, што значи дека бројот на делителите на n^2, поголеми од n е еднаков на бројот на делителите на n^2, помали од n. Според тоа, $2S(n)+1$ е еднаков на бројот на делителите на n^2. Бидејќи

$$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53,\ 2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31 \text{ и } 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7,$$

најмногу делители има бројот 2016. Според тоа, најголем е бројот $S(2016)$.

8. КОНГРУЕНЦИИ

1. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на природниот број n. Ако важи $S(n)=S(2n)$, докажи дека n е делив со 9.

   Решение. Од $S(n)\equiv n(\mathrm{mod}\,9)$ и $S(2n)\equiv 2n(\mathrm{mod}\,9)$, следува
   $$0=S(2n)-S(n)\equiv 2n-n=n(\mathrm{mod}\,9),$$
   што и требаше да се докаже.

2. Нека $S(x)$ е збирот на цифрите на природниот број x. Определи ги сите природни броеви x за кои важи
   $$x+S(x)+S(S(x))+S(S(S(x)))=2007.$$
   Решение. Бидејќи бројот 1999 има најголем збир на цифри од природните броеви од интервалот $[1,2007]$, добиваме дека $S(x)\le 28$. Слично, $S(S(x))\le 10$ и $S(S(S(x)))\le 9$. Оттука следува дека $x\ge 1959$. Понатаму,
   $$x\equiv S(x)\equiv S(S(x))\equiv S(S(S(x)))(\mathrm{mod}\,9),$$
   па затоа важи
   $$4x\equiv 2007\equiv 0(\mathrm{mod}\,9).$$
   Но, броевите 4 и 9 се заемно прости, па од последната конгруенција слеува дека $9\mid x$. Според тоа,
   $$x\in\{1962,1971,1980,1989,1998\}.$$
   Со непосредна проверка добиваме дека нема броеви кои го задоволуваат условот на здачата.

3. Нека m и n се природни броеви такви што бројот $mn+1$ е делив со 24. Докажи дека $m+n$ е делив со 24.

   Решение. Ќе докажеме дека $8\mid m+n$ и $3\mid m+n$. Бидејќи $24\mid mn+1$, броевите m и n се непарни. Понатаму, $8\mid m^2+mn+1-m^2$, а како квадрат на непарен број при делење со 8 дава остаток 1, односно $8\mid m^2-1$, добиваме дека $8\mid m^2+mn=m(m+n)$. Но, m е непарен број, па затоа $8\mid m+n$. Слично, броевите m и n не се деливи со 3, па затоа од $m\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\,3)$ добиваме $m^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$. Сега, од $3\mid m^2+mn+1-m^2$

следува $3 \mid m^2 + mn = m(m+n)$ и како 3 не е делител на m добиваме $3 \mid m+n$.

Конечно, $8 \mid m+n$ и $3 \mid m+n$, па бидејќи броевите 3 и 8 се заемно прости следува $24 \mid m+n$.

4. Нека $p = p_1 p_2 ... p_n$ е производот на првите n прости броеви. Докажи дека за $n > 1$ броевите $p+1$ и $p-1$ не се точни квадрати.

Решение. Бидејќи $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$, заклучуваме дека $p-1 = 6k-1$, за некој природен број k. Понатаму, квадрат на природен број при делење со 6 дава остатоци 0, 1, 3 и 4, па затоа бројот $p-1 = 6k-1$ не може да биде точен квадрат.

Имаме, $p_i \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, за $i \geq 2$, па затоа $p \equiv 2 \cdot (\pm 1) \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$. Според тоа, $p+1 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ и како квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1, заклучуваме дека $p+1$ не може да биде точен квадрат.

5. Определи ја цифрата на единиците на бројот $((((7^6)^5)^4)^3)^2$.

Решение. Имаме $((((7^6)^5)^4)^3)^2 = 7^{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 7^{720}$. Понатаму, од својствата на конгруенциите следува

$$7 \equiv 7 (\mathrm{mod} 10),$$
$$7^2 \equiv 7 \cdot 7 \equiv 9 (\mathrm{mod} 10),$$
$$7^3 \equiv 7 \cdot 9 \equiv 3 (\mathrm{mod} 10),$$
$$7^4 \equiv 7 \cdot 3 \equiv 1 (\mathrm{mod} 10),$$
$$7^{720} = (7^4)^{180} \equiv 1^{180} = 1 (\mathrm{mod} 10)$$

што значи дека цифрата на единиците на бројот $((((7^6)^5)^4)^3)^2$ е 1.

6. Нека a е цифрата на единиците на бројот 7^{456}, b е цифрата на единиците на бројот 8^{567} и c е цифрата на единиците на бројот 9^{678}. Определи го бројот $\overline{abc}$.

Решение. Имаме

$$7^{456} = (7^4)^{114} = 2401^{114} \equiv 1^{114} = 1 (\mathrm{mod} 10),$$

$8^{567} = (8^4)^{141} \cdot 8^3 = 4096^{141} \cdot 512 \equiv 6^{141} \cdot 512 \equiv 6 \cdot 2 \equiv 2 (\mathrm{mod} 10)$ и

$9^{678} = (9^2)^{339} = 81^{339} \equiv 1^{339} = 1 (\mathrm{mod} 10)$.

Според тоа, $a = 1, b = 2$ и $c = 1$, што значи $\overline{abc} = 121$.

7. Ако a, b, c се природни броеви, докажи дека

$$7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3).$$

Решение. *Прв начин*. Јасно, ако $7 \mid a$ или $7 \mid b$ или $7 \mid c$, тогаш важи $7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$. Затоа да претпоставиме дека $7 \nmid a$, $7 \nmid b$ и $7 \nmid c$. Тогаш броевите a, b, c се од видовите $7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5$ или $7k+6$, за некој $k \in \mathbb{N}_0$. Имаме

$$(7k+1)^3 \equiv 1^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7),$$
$$(7k+2)^3 \equiv 2^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7),$$
$$(7k+3)^3 \equiv 3^3 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7),$$
$$(7k+4)^3 \equiv 4^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7),$$
$$(7k+5)^3 \equiv 5^3 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7),$$
$$(7k+6)^3 \equiv 6^3 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7),$$

што значи дека трет степен на природен број при делење со 7 дава остаток 1 или 6. Од принципот на Дирихле следува дека два од броевите a^3, b^3, c^3 при делење со 7 даваат ист остаток, па затоа нивната разлика е делива со 7, т.е. $7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$.

Втор начин. Како и при првиот начин имаме дека од $7 \mid a$ или $7 \mid b$ или $7 \mid c$, следува $7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$. Затоа да претпоставиме дека $7 \nmid a$, $7 \nmid b$ и $7 \nmid c$. Тогаш броевите a, b, c се од видовите $7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5$ или $7k+6$, за некој $k \in \mathbb{N}_0$. Имаме

$$(7k+1)^3 = 7(7^2k^3 + 3 \cdot 7k^2 \cdot 1 + 3 \cdot k \cdot 1^2) + 1,$$
$$(7k+2)^3 = 7(7^2k^3 + 3 \cdot 7k^2 \cdot 2 + 3 \cdot k \cdot 2^2 + 1) + 1,$$
$$(7k+3)^3 = 7(7^2k^3 + 3 \cdot 7k^2 \cdot 3 + 3 \cdot k \cdot 3^2 + 3) + 6,$$
$$(7k+4)^3 = 7(7^2k^3 + 3 \cdot 7k^2 \cdot 4 + 3 \cdot k \cdot 4^2 + 9) + 1,$$
$$(7k+5)^3 = 7(7^2k^3 + 3 \cdot 7k^2 \cdot 5 + 3 \cdot k \cdot 5^2 + 17) + 6,$$

$$(7k+6)^3 = 7(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2\cdot 6 + 3\cdot k\cdot 6^2 + 30) + 6,$$

што значи дека трет степен на природен број при делење со 7 дава остаток 1 или 6. Од принципот на Дирихле следува дека два од броевите a^3, b^3, c^3 при делење со 7 даваат ист остаток, па затоа нивната разлика е делива со 7, т.е. $7 \mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$.

8. Определи ги сите природни брови n за кои бројот $2^n - 1$ е делив со 7. Докажи дека не постои природен број n за кој бројот $2^n + 1$ е делив со 7.

Решение. Од $2^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$ следува дека за секој природен број k важи $2^{3k} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 7)$, $2^{3k+1} \equiv 2(\mathrm{mod}\, 7)$ и $2^{3k+2} \equiv 4(\mathrm{mod}\, 7)$. Според тоа, за да $2^n - 1$ е делив со 7, потребно и доволно е $n = 3k$. Понатаму, од горните конгруенции следува дека за секој природен број n остатоците при делење на $2^n + 1$ со 7 се 2, 3 и 5, па затоа за ниту еден природен број n бројот $2^n + 1$ не е делив со 7.

9. Докажи дека збирот $2^{444} + 3^{666}$ е делив со бројот 5.

Решение. Имаме

$$2^{444} = (2^4)^{111} = 16^{111} \equiv 1^{111} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 5) \text{ и}$$

$$3^{666} = (3^4)^{166}\cdot 3^2 = 81^{166}\cdot 9 \equiv 1^{166}\cdot 9 = 9 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 5),$$

па затоа

$$2^{444} + 3^{666} \equiv 1 + 4 = 5 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 5),$$

што и требаше да се докаже.

10. Определи го остатокот од делењето на $2^{25}\cdot 5^{15}$ со 3.

Решение. Од $2 \equiv -1(\mathrm{mod}\, 3)$ следува $2^{25} \equiv (-1)^{25} = -1(\mathrm{mod}\, 3)$. Понатаму, од $5 \equiv -1(\mathrm{mod}\, 3)$ следува $5^{15} \equiv (-1)^{15} = -1(\mathrm{mod}\, 3)$. Конечно, од последните две конгруенции следува $2^{25}\cdot 5^{15} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$, т.е. бараниот остаток е 1.

11. Колку е остатокот при делење на бројот $7^{50} + 5^{70}$ со 12?

Решение. Имаме $7^2 = 49 \equiv 1 (\mathrm{mod} 12)$, па затоа $7^{50} = (7^2)^{25} \equiv 1 (\mathrm{mod} 12)$. Понатаму, $5^2 = 25 \equiv 1 (\mathrm{mod} 12)$, па затоа $5^{70} = (5^2)^{35} \equiv 1 (\mathrm{mod} 12)$. Според тоа, $7^{50} + 5^{70} \equiv 2 (\mathrm{mod} 12)$, т.е. бараниот остаток е 2.

12. Определи го остатокот при делењето на бројот $2^{223} + 2022^{2023}$ со бројот 7.

Решение. Од $2^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$ следува $(2^3)^{74} \equiv 1^{74} (\mathrm{mod}\, 7)$, што значи $2^{3 \cdot 74} \cdot 2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7)$, односно $2^{223} \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7)$.

Понатаму, $2022 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7)$, па затоа $2022^{2023} \equiv (-1)^{2023} (\mathrm{mod}\, 7)$, т.е. $2022^{2023} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7)$.

Конечно,

$$2^{223} + 2022^{2023} \equiv 2 + (-1) (\mathrm{mod}\, 7),$$

т.е.

$$2^{223} + 2022^{2023} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7).$$

13. Определи ги последните две цифри на бројот 99^{2010}.

Решение. Имаме $99 \equiv -1 (\mathrm{mod} 100)$, па затоа

$$99^{2010} \equiv (-1)^{2010} = 1 (\mathrm{mod} 100).$$

Според тоа, бројот 99^{2010} завршува на цифрите 01.

14. Докажи дека бројот $7^{2n} - 4^{2n}$ е делив со 33 за секој природен број n.

Решение. *Прв начин.* За секој природен број n важи

$$\begin{aligned} 7^{2n} - 4^{2n} &= (7^2)^n - (4^2)^n = 49^n - 16^n \\ &= (49 - 16)(49^{n-1} + 49^{n-2} \cdot 7 + \ldots + 49 \cdot 7^{n-2} + 7^{n-1}) \\ &= 33 \cdot (49^{n-1} + 49^{n-2} \cdot 7 + \ldots + 49 \cdot 7^{n-2} + 7^{n-1}), \end{aligned}$$

што значи дека $33 \mid 7^{2n} - 4^{2n}$, за секој природен број n.

Втор начин. Од $7^2 = 49 \equiv 16 (\mathrm{mod}\, 33)$, следува $7^{2n} \equiv 16^n (\mathrm{mod}\, 33)$, па затоа $7^{2n} - 4^{2n} \equiv 16^n - 16^n = 0 (\mathrm{mod}\, 33)$.

15. Докажи дека збирот $1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + 4^{2023} + 5^{2023}$ е делив со 5,

но не е делив со 10.

Решение. Имаме $1^{2023} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$. Понатаму,

$$2^5 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5),$$
$$2^9 = 2^5 \cdot 2^4 \equiv 2 \cdot 2^4 = 2^5 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5).$$

Затоа можеме да претпоставиме дека $2^{4n+1} \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5)$. Навистина, за $n = 1$ и $n = 2$ конгруенцијата важи. Нека претпоставиме дека конгруенцијата важи за $n = k$. Тогаш за $n = k + 1$ важи

$$2^{4(k+1)+1} = 2^{4k+1} \cdot 2^4 \equiv 2 \cdot 2^4 = 2^5 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5),$$

па од принципот на математичка индукција следува $2^{4n+1} \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5)$, за секој природен број n.

Според тоа,

$$2^{2023} = 2^{4 \cdot 505 + 1} \cdot 2^2 \equiv 2 \cdot 2^2 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 5).$$

Понатаму, $3^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$, па затоа $3^{2023} = (3^4)^{505} \cdot 3^3 \equiv 1 \cdot 3^3 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5)$.

Аналогно, од

$$4^3 \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 5),$$
$$4^5 = 4^3 \cdot 4^2 \equiv 4 \cdot 4^2 = 4^3 \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 5),$$

на потполно ист начин како за степените на бројот 2 се докажува дека $4^{2n+1} \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 5)$, па затоа $4^{2023} = 4^{2 \cdot 1011 + 1} \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 5)$.

На крајот, ако земеме предвид дека $5^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$, за секој природен број n, добиваме

$$1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + 4^{2023} + 5^{2023} \equiv 1 + 3 + 2 + 4 + 0 = 10 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5),$$

што и требаше да се докаже.

Од друга страна, збирот $1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + 4^{2023} + 5^{2023}$ содржи три непарни и два парни собирци, што значи дека е непарен број, т.е. не е делив со 2, па затоа не е делив и со 10.

16. Определи ја цифрата на единиците на збирот

$$18^1 + 18^2 + \ldots + 18^{19} + 18^{20}.$$

Решение. Имаме $18 \equiv 8 (\mathrm{mod}\, 10)$, па затоа $18^n \equiv 8^n (\mathrm{mod}\, 10)$ за секој природен број n. Понатаму,

$$8 \equiv 8 (\mathrm{mod}\, 10),\ 8^2 \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 10),\ 8^3 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 10),$$

$$8^4 \equiv 6(\mathrm{mod}10),\ 8^5 \equiv 8(\mathrm{mod}10),\ 8^6 \equiv 4(\mathrm{mod}10),\ ...$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} 18^1+18^2+18^3+18^4+18^5+...+18^{20} &\equiv 8^1+8^2+8^3+8^4+8^5+...+8^{20} \\ &\equiv (8+4+2+6)+...+(8+4+2+6) \\ &= 5\cdot 20 = 100 \equiv 0(\mathrm{mod}10), \end{aligned}$$

што значи дека цифрата на единиците на збирот е еднаква на 0.

17. Определи ја цифрата на единиците на збирот

$$1^{2022}+2^{2022}+3^{2022}+...+2021^{2022}.$$

Решение. Лесно се проверува дека

$$\begin{aligned} 1^{2022} &\equiv 1(\mathrm{mod}10), & 6^{2022} &\equiv 6(\mathrm{mod}10), \\ 2^{2022} &\equiv 4(\mathrm{mod}10), & 7^{2022} &\equiv 9(\mathrm{mod}10), \\ 3^{2022} &\equiv 9(\mathrm{mod}10), & 8^{2022} &\equiv 4(\mathrm{mod}10), \\ 4^{2022} &\equiv 6(\mathrm{mod}10), & 9^{2022} &\equiv 1(\mathrm{mod}10), \\ 5^{2022} &\equiv 5(\mathrm{mod}10), & 10^{2022} &\equiv 0(\mathrm{mod}10). \end{aligned}$$

Понатаму, последните цифри на степените периодично се повторуваат со периода 10, па како $1^{2022}+2^{2022}+3^{2022}+...+10^{2022} \equiv 5(\mathrm{mod}10)$, добиваме

$$\begin{aligned} 1^{2022}+2^{2022}+...+2021^{2022} &= (1^{2022}+2^{2022}+...+10^{2022}) \\ &\quad +(11^{2022}+12^{2022}+...+20^{2022}) \\ &\quad ..... \\ &\quad +(2011^{2022}+2012^{2022}+...+2020^{2022}) \\ &\quad +2021^{2022} \\ &\equiv 202\cdot 5+1 \equiv 1011 \equiv 1(\mathrm{mod}10). \end{aligned}$$

Значи, цифрата на единиците на дадениот збир е 1.

18. Нека $a_n = 2+3^{n-1}$. Да се определи најголемиот природен број k, за кој постои природен број m, таков што секој од броевите a_m, $a_{m+1},...,a_{m+k}$ е прост.

Решение. Ќе докажеме, дека од секои 4 елементи на a_n барем еден е делив со 5. Навистина, од $3 \equiv 3(\mathrm{mod}5)$, $3^2 \equiv 4(\mathrm{mod}5)$, $3^3 \equiv 2(\mathrm{mod}5)$ и

$3^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$ следува дека при делење со 5 на 4 последователни степени на 3 се добиваа 4 различни остатоци, еден од кои е 3, од каде следува тврдењето на задачата. Тоа значи, дека ако бројот 5 не е меѓу дадените елементи, тогаш бараниот максимален елемент нема да е поголем од 5. Но, за $m = 1$ добиваме 5 псоледователн членови на низата, кои се прости броеви: 3, 5, 11, 29 и 83. Според тоа, бараната вредност на k е 4.

9. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$15x + 25y = 14.$$
Решение. Бидејќи 15 и 25 се деливи со 5, левата страна на равенката е делива со 5. Но 5 не е делител на 14, па затоа дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

2. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$15x + 25y = 10.$$
Решение. Дадената равенка ја делиме со 5 и добиваме дека таа е еквивалентна со равенката $3x + 5y = 2$. Очигледно едно решение на дадената равенка е $x_0 = -1, y_0 = 1$. Според тоа, сите нејзини решенија се дадени со
$$x = x_0 + 5k = 5k - 1,\ y = y_0 - 3k = 1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

3. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$13p + 3q = 2022.$$
Решение. Бидејќи $3 \mid 2022$ и $3 \mid 3$, а $\text{NZD}(3,13) = 1$, добиваме $3 \mid p$, од каде следува $p = 3$. Заменуваме во равенка и добиваме $13 \cdot 3 + 3q = 2022$, од каде наоѓаме $q = 661$. Проверуваме дека бројот 661 не е делив со 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и 23, од каде следува дека 661 е прост број. Значи, $p = 3$ и $q = 661$ е единствено решение на дадената равенка.

4. Определи ги сите прости броеви a, b и c такви што
$$4a + 5b + 6c = 96.$$
Решение. Бидејќи броевите $4a, 6c$ и 96 се парни, мора да е и бројот $5b$ парен, па како b е парен прост број, добиваме $b = 2$. Сега, почетната равенка го добива видот
$$4a + 6c = 86, \text{ т.е. } 2a + 3c = 43.$$
Бидејќи $2a \geq 4$, добиваме дека $3c \leq 39$, па затоа $c \leq 13$. Значи $c \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Со непосредна проверка се добива дека решенија се $c = 3, a = 17$; $c = 7, a = 11$; $c = 11, a = 5$ и $c = 13, a = 2$.

5. Определи ги сите прости броеви p и q за кои важи

$$20p + 23q = 2023.$$

Решение. *Прв начин*. Цифрата на единиците на собирокот $20p$ е еднак ва на 0, па затоа цифрата на единиците на собирокот $23q$ е 3. Оттука следува дека цифрата на единиците на простиот број q е еднаква на 1. Бидејќи $20p \geq 40$, важи $23q \leq 1983$, од каде добиваме $q \leq 86$. Значи, q мора да е некој од броевите: 11, 31, 41, 61 или 71. Со проверка на можните случаи добиваме дека единствено за $q = 61$ се добива прост број $p = 31$.

Втор начин. Почетната равенка е еквивалентна со равенката

$$23q - 23 = 2000 - 20p,$$

т.е. со равенката

$$23(q-1) = 20(100-p).$$

Бидејќи $NZD(23,20) = 1$, заклучуваме дека $20 \mid q-1$ и $23 \mid 100-p$, при што $100 - p > 0$. Оттука следува дека $100 - p$ е некој од броевите 23, 46, 69 или 92, од каде добиваме $p = 77$, $p = 54$, $p = 31$ или $p = 8$. Но, p е прост број, па затоа $p = 31$, и притоа $q = 61$.

6. Дадена е равенката $8x + 3y = 2022$. Нека $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ се сите парови природни броеви кои ја задоволуваат дадената равенка. Пресметај го збирот $x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Решение. Од $3 \mid 3y$ и $3 \mid 2022$ следува дека $3 \mid 8x$. Но, $\text{NZD}(3,8) = 1$, па затоа важи $3 \mid x$, т.е. $x = 3k$, $k \in \mathbb{N}$. Заменуваме во равенката и добиваме $24k + 3y = 2022$, односно $8k + y = 674$, т.е. $y = 674 - 8k$, $k, y \in \mathbb{N}$. Од условот $674 - 8k > 0$ следува дека $1 \leq k \leq 84$, што значи дека постојат 84 парови природни броеви (x_k, y_k) кои ја задоволуваат дадената равенка. Притоа $x_k = 3k$, $k = 1, 2, ..., 84$, па затоа

$$x_1 + x_2 + ... + x_{84} = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 84) = \tfrac{3 \cdot 84 \cdot 85}{2} = 10710.$$

7. Цифрата на единиците на еден трицифрен број е 2. Ако цифрата на единиците ја преместиме на местото на стотките, тогаш бројот ќе се намали за 36. Определи го збирот на цифрите на почетниот број?

Решение. *Прв начин*. Нека a и b се цифрите на стотките и десетките

на дадениот број. Од условот на задачата следува

$$100a+10b+2-(200+10a+b)=36,$$

од каде добиваме $10a+b=26$. Но, a и b се цифри, па затоа последната Диофантова равенка има единствено решение $a=2, b=6$. Конечно, збирот на цифрите на почетниот број е $2+6+2=10$.

Втор начин. Нека дадениот број е $\overline{ab2}=10\overline{ab}+2$. По преместување на цифрата на единиците го добиваме бројот $\overline{2ab}=200+\overline{ab}$. Според тоа, $10\overline{ab}+2-(200+\overline{ab})=36$, од каде добиваме $9\overline{ab}=234$, односно $\overline{ab}=26$. Според тоа, почениот број е $\overline{ab2}=10\cdot 26+2=262$ и збирот на неговите цифри е $2+6+2=10$.

8. Илија за 30 птици платил 30 евра. За секои три сипки платил по 1 евро, за секои два папагали платил по 1 евро и за секој славеј платил по 2 евра. Колку славеја купил Илија?

Решение. Нека Илија купил $3x$ сипки со x евра, $2y$ папагаи со y евра и z славеја со $2z$ евра. Тогаш $3x+2y+z=30$ и $x+y+2z=30$. Значи, $3x+2y+z=x+y+2z$, од каде добиваме $2x+y=z$. Сега со замена во првата равенка наоѓаме $5x+3y=30$. Бидејќи 30 и $5x$ се деливи со 5, заклучуваме дека и $3y$ е делив со 5. Но, 3 и 5 се заемно прости, па затоа $5\mid y$. Понатаму, од условот на задачата следува дека Илија купил од секој вид птици, па затоа $0<3y<30$, односно $0<y<10$. Единствен природен број кој е помал од 10 и е делив со 5 е бројот 5, што значи $y=5$. Според тоа, $5x+15=30$, од каде добиваме $x=3$ и конечно $z=2\cdot 3+5=11$. Значи, Илија купил $3\cdot 3=9$ сипки, $2\cdot 5=10$ папагали 11 славеја.

9. На еден натпревар се зададени 13 прашања. За точен одговор се добиваат 7 поени, за непотполн одговор се добиваат 3 поени и за погрешен одговор се добиваат 0 поени. Илија освоил 53 поени. Колку погрешни одговори дал Илија?

Решение. Нека Илија точно одговорил на a прашања и дал непотполн одговор на b прашања. Тој освоил 53 поени, што значи дека $7a+3b=57$. Јасно, $a\le 7$ и со непосредна проверка добиваме дека во множеството природни броеви решенија на последната равенка се в $a=2, b=13$ и $a=5, b=6$. Првиот случај не е можен, бидејќи во тој

случај би имале $2+13=15$ прашања, а на натпреварот се зададени 13 прашања. Во вториот случај бројот на точно и непотполно одговорените прашања е $5+6=11$, што значи дека Илија погрешно одговорил на $13-11=2$ прашања.

10. Определи ги сите природни броеви k и n такви што

$$(k^2+1)(n^2+1)-2(k+2)(n+3)+20=0.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$k^2n^2+k^2+n^2-2kn-4n-6k+9=0,$$
$$k^2n^2-2kn+1+k^2-6k+9+n^2-4n+4=5,$$
$$(kn-1)^2+(k-3)^2+(n-2)^2=5.$$

Збирот на три квадрати е еднаков на 5, кога тие квадрати се 0, 1 и 4.
Ако $kn-1=0$, тогаш го добиваме решениео $k=n=1$.
Ако $k-3=0$, т.е. $k=3$, добиваме решение кога $n=1$.
Ако $n-2=0$, т.е. $n=2$, добиваме решение кога $k=1$.

11. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2-xy-2y^2-3x-3y=2014.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x+y)(x-2y-3)=2014.$$

Бидејќи $2014=2\cdot19\cdot53$ и $x+y>x-2y-3$, можни се следниве случаи

$$x+y=2014,\quad x-2y+3=1;$$
$$x+y=1007,\quad x-2y+3=2;$$
$$x+y=106,\quad x-2y+3=19;$$
$$x+y=53\quad x-2y+3=38,$$

Соодветните решенија се:
$x=1344, y=670$; $x=673, y=334$; $x=78, y=28$ и $x=49, y=4$.

12. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1).$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x+y)^3-2xy(x+y)=8((x+y)^2-xy+1).$$

Воведуваме смени $x+y=u$ и $xy=v$ и ја добиваме равенката

$$u^3-2uv=8(u^2-v+1).$$

Од последната равенка следува дека u е парен, па затоа можеме да ставиме $u=2t$, по што равенката го добива видот:

$$2t^3-tv=8t^2-2v+2.$$

Лесно се гледа дека $t\neq 2$, па затоа

$$v=2t^2-4t-8-\frac{18}{t-2}.$$

Сега, за да решенијата се целобројни потребно е $t-2\,|\,18$, од каде добиваме $t-2\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18\}$, па затоа

$$t\in\{-16,-7,-4,-1,0,1,3,4,5,8,11,20\}.$$

Но, t е природен број, па затоа

$$t\in\{1,3,4,5,8,11,20\}.$$

Сега, со замена на t во $u=2t$ и $v=2t^2-4t-8-\frac{18}{t-2}$ добиваме

t	1	3	4	5	8	11	20
u	2	6	8	10	16	22	40
v	8	−20	−1	16	85	188	711

Решенијата за x и y се од множеството природни броеви единствено за $(t,u,v)=(5,10,16)$ и тогаш $(x,y)=(2,8)$ и $(x,y)=(8,2)$.

13. Определи ги природните броеви x,y,z за кои важи $x<y<z$ и

$$x^3+x^2z+x^2y+xyz+x^2+xz+xy+yz=2013.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
&x^2(x+z)+xy(x+z)+x(x+z)+y(x+z)=2013,\\
&(x+z)(x^2+xy+x+y)=2013,\\
&(x+z)(x(x+y)+x+y)=2013,\\
&(x+1)(x+y)(x+z)=2013,\\
&(x+1)(x+y)(x+z)=3\cdot 11\cdot 61.
\end{aligned}$$

Бидејќи $1\le x<y<z$, важи $x+1<x+y<x+z$, што значи $x+1=3$, $x+y=11$ и $x+z=61$, т.е. $x=2$ и $y=9$ и $z=59$.

14. Збир на последователни природни броеви е еднаков на 2023. Колку собирци може да има овој збир.

Решение. Нека n е првиот и $n+m$ е последниот собирок на разгле-

дуваниот збир. Очигледно збирот има $m+1$ собирци. Имаме;

$$n+(n+1)+...(n+m)=2023,$$
$$n(m+1)+(1+2+...+m)=2023,$$
$$n(m+1)+\frac{m(m+1)}{2}=2023,$$
$$2n(m+1)+m(m+1)=4046,$$
$$(m+1)(2n+m)=4046,$$
$$(m+1)(2n+m)=2\cdot 7\cdot 17\cdot 17.$$

Броевите m и m се природни, па затоа важи $m+1>1, 2n+m>1$ и $2n+m>m+1$. Затоа од последната равенка ги добиваме следниве системи

$$\begin{cases} m+1=2 \\ 2n+m=2023 \end{cases} \quad \begin{cases} m+1=7, \\ 2n+m=578, \end{cases} \quad \begin{cases} m+1=17, \\ 2n+m=238, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+1=14, \\ 2n+m=289, \end{cases} \quad \begin{cases} m+1=34, \\ 2n+m=119, \end{cases}$$

чии решенија соодветно се:

$$m=1, n=1011;\ m=6, n=572;\ m=16, n=222;$$
$$m=13, n=276;\ m=33, n=88.$$

Значи, бараниот збир може да има 2, 7, 14, 17 и 34 собирци.

15. Бројот 2001 може да се запише како збир на два последователни броја: $1000+1001=2001$. На колку различни начини можеме бројот 2001 да го запишеме како збир на неколку последователни природни броеви.

Решение. За $k\geq 2$ се добива равенството

$$(n+1)+(n+2)+...+(n+k)=2001,$$

кое последователно е еквивалентно со равенствата

$$nk+(1+2+...+k)=2001,$$
$$nk+\frac{k(k+1)}{2}=2001,$$
$$\frac{k(2n+k+1)}{2}=2001,$$
$$k(2n+k+1)=2\cdot 3\cdot 23\cdot 29.$$

Јасно, $2n+k+1>k$, па затоа $k=2,3,6,23,29,46,58$, при што соодветно добиваме дека $2n+k+1=2001,1334,667,174,138,87,69$, од каде наоѓаме $n=1000,665,330,75,54,20,5$. Значи, вкупно имаме седум

претставување на бројот 2001 како збир на последователни природни броеви.

16. Определи ги сите парови природни броеви такви што нивниот производ е десет пати поголем од нивниот збир.

Решение. Нека за природните броеви m и n, $m \geq n$ е исполнето равенството $mn = 10(m+n)$. Оттука добиваме

$$mn - 10m - 10n + 100 = 100,$$
$$(m-10)(n-10) = 2^2 \cdot 5^2.$$

Сега, ако се земе предвид дека $m \geq n$, од последната равенка добиваме:

$$m-10 = 100,\ n-10 = 1,$$
$$m-10 = 50,\ n-10 = 2,$$
$$m-10 = 25,\ n-10 = 4,$$
$$m-10 = 20,\ n-10 = 5,$$
$$m-10 = 10,\ n-10 = 10,$$

од каде добиваме $(m,n) = (110,11), (60,12), (35,14), (30,15), (20,20)$.

17. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат прости броеви p и q такви што

$$n^2 = p^2 + pq + q^2.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$pq = (p+q-n)(p+q+n).$$

Бидејќи множителот $p+q+n$ е поголем и од p и од q, добиваме дека $p+q-n = 1$ и $p+q+n = pq$. Последните две равенства ги собираме и добиваме $2p+2q = 1+pq$, т.е. $(p-2)(q-2) = 3$, што значи дека $p = 3, q = 5$ или $p = 5, q = 3$, при што во двата случаја имаме $n = 7$.

18. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2004xyz.$$

Решение. Изразот $2004xyz$ е делив со 4, па како квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1, заклучуваме дека сите три броја x, y, z мора да се парни. Значи, $x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ z = 2z_1$. Ако за-

мениме во почетната равенка добиваме $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4008x_1y_1z_1$. Сега, аналогно добиваме дека x_1, y_1, z_1 се парни, што значи дека броевите x, y, z се деливи со 2^2. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека броевите x, y, z мора да се деливи со 2^n за секој природен број n, а тоа е можно ако и само ако $x = y = z = 0$ и тоа е единственото решение на дадената равенка.

19. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x! + 2y = 25.$$

Решение. Бидејќи $2y$ е парен, а 25 е непарен број, мора да е $x!$ непарен број. Последното значи дека $x = 1$ е единствено решение, бидејќи за $x > 1$ бројот $x!$ е парен. Значи, единствено решение на дадената равенка е $x = 1, y = 12$.

20. Определи ги сите природни броеви a, b, c, d, e такви што

$$a! + b! + c! + d! = e!.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a \le b \le c \le d < e$, при што последното неравенство следува од условот на задачата. Според тоа, $e \ge d + 1$, па затоа $e! \ge (d+1) \cdot d!$. Ако $d \ge 4$, тогаш $e! \ge 5d! > 4d! \ge a! + b! + c! + d!$, па во овој случај задачата нема решение. Ако $d \le 3$, тогаш $e! = a! + b! + c! + d! \le 4 \cdot d!$, што значи дека $e \le 4$. Лесно се гледа, дека единствено решение на задачата е $a = b = c = d = 3$ и $e = 4$.

21. Докажи дека равенката

$$x^2 - 3y = 17$$

нема решенија во множеството цели броеви.

Решение. Очигледно дека 3 не е делител на x. Според тоа, $x = 3k \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$ и ако замениме во дадената равенка, добиваме

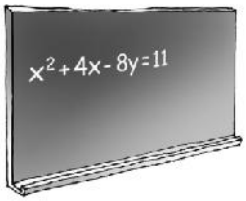
$$9k^2 \pm 6k + 1 - 3y = 17, \text{ т.е. } 3(3k^2 \pm 2k - y) = 16.$$

Последната равенка нема решение во множеството цели броеви, бидејќи левата страна е делива со 3, а десната страна не е делива со 3. Според тоа, дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

22. Докажи дека равенката

$$x^2 + 4x - 8y = 11$$

нема решенија во множество-то цели броеви.



Решение. Јасно, x непарен број, т.е. $x = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ и ако замениме во дадената равенка, добиваме

$$4k^2 + 4k + 1 + 8k + 4 - 8y = 11,$$

т.е.

$$2(k^2 + 3k - 2y) = 3.$$

Последната равенка нема решение во множеството цели броеви, бидејќи левата страна е делива со 2, а десната страна не е делива со 2. Според тоа, дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

23. Докажи дека равенката

$$3x^2 - 4y^2 = 13$$

нема решение во множеството цели броеви.

Решение. Јасно, x е непарен број, т.е. $x = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ и ако замениме во дадената равенка, добиваме

$$3(4k^2 + 4k + 1) - 4y^2 = 13, \text{ т.е. } 4(3k^2 + 3k - y^2) = 10.$$

Последната равенка нема решение во множеството цели броеви, бидејќи левата страна е делива со 4, а десната страна не е делива со 4. Според тоа, дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

24. Докажи дека равенката

$$2x^2 - 5y^2 = 7$$

нема решение во множеството цели броеви.

Решение. Јасно, y е непарен број, т.е. $y = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ и ако замениме во дадената равенка, добиваме

$$2x^2 - 5(4k^2 + 4k + 1) = 7, \text{ т.е. } x^2 - 10k(k+1) = 6.$$

Сега, од последната равенка следува дека x е парен број, т.е. $x = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$ и ако замениме, добиваме

$$4m^2 - 10k(k+1) = 6, \text{ т.е. } 2m^2 - 5k(k+1) = 3.$$

Бидејќи производ на два последователни цели броја е парен број, ле-

вата страна на последната равенка е парен број, а десната страна е непарен број, па затоа истата нема решение во множеството цели броеви. Според тоа, дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

25. Докажи дека равенката

$$3x^2 + 8 = y^2$$

нема решение во множеството цели броеви.

Решение. Јасно, бројот y не е делив со 3, т.е. $y = 3k \pm 1,\ k \in \mathbb{Z}$. Заменуваме во дадената равенка и добиваме

$$3x^2 + 8 = 9k^2 \pm 6k + 1, \text{ т.е. } 3(3k^2 \pm 2k - x^2) = 7.$$

Последната равенка нема решение во множеството цели броеви, бидејќи левата страна е делива со 3, а десната страна не е делива со 3. Според тоа, дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

26. Докажи дека равенката

$$2x^2 - 4x - 5y^2 - 10y = 10$$

нема решение во множеството цели броеви.

Решение. Забележуваме дека во дадената равенка сите собирци, освен $5y^2$ се парни броеви, па затоа мора y да е парен број, т.е. $y = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Заменуваме во равенката и добиваме

$$2x^2 - 4x - 20k^2 - 20k = 10, \text{ т.е. } (x-1)^2 - 10k(k+1) = 6.$$

Сега, од последната равенка следува дека $x-1$ е парен број, т.е. $x - 1 = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$ и ако замениме, ја добиваме равенката

$$4m^2 - 10k(k+1) = 6, \text{ т.е. } 2m^2 - 5k(k+1) = 3,$$

за која во задача 24 видовме дека нема решение во множеството цели броеви.

27. Определи го збирот на решенијата на равенката

$$x^2 + 5y = 1234567.$$

Решение. Цифрата на единиците на квадрат на природен број е 0, 1, 4, 5, 6 или 9, а цифрата на единиците на бројот $5y$ е 0 или 5. Според тоа, цифрата на единиците на збирот $x^2 + 5y$ е 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Но,

збирот x^2+5y треба да има цифра на единиците 7, па затоа равенката нема решенија.

28. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$2019x^4+2020y^4=2021^{2021}.$$

Решение. Цифрата на единиците на квадрат на природен број може да е еднаква на 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Според тоа, цифрата на единиците на четврт степен на природен број може да е 0, 1, 5 или 6. Значи, цифрата на единиците на бројот $2019x^4$ може да биде 0, 9, 5 или 4, а цифрата на единиците на бројот $2020y^4$ е 0. Според тоа, цифрата на единиците на бројот $2019x^4+2020y^4$ може да биде 0, 9, 5 или 4. Но, цифрата на единиците на бројот 2021^{2021} е 1, па затоа дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

29. а) Определи ги остатоците кои ги даваат при делењето со 11 броевите од видот $n^5, n\in\mathbb{N}$.

б) Докажи дека равенката $x^5+y^5+z^5=2022^{2022}$ нема решение во множеството природни броеви.

Решение. а) Можни остатоци на природен број n при делење со 11 и соодветните остатоци при делење на бројот n^5 со 11 се дадени во следната табела.

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
n^5	-1	-1	-1	1	-1	0	1	-1	1	1	1

б) Бидејќи остатоците при делење на петти степен на природен број со бројот 11 се $-1,0$ и 1, добиваме дека можни остатоци при делење на збирот $x^5+y^5+z^5$ со 11 се: $-3,-2,-1,0,1,2,3$. Од друга страна, важи $2022^{2022}\equiv 4(\mathrm{mod}11)$, па затоа дадената равенка нема решение во множеството природни броеви.

30. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$xy-y+2x=4.$$

Решение. Последователно дадената равенка е еквивалентна на равенките

$$xy - y + 2x - 2 = 2,$$
$$y(x-1) + 2(x-1) = 2,$$
$$(x-1)(y+2) = 2.$$

Бидејќи $2 = 1 \cdot 2 = (-1) \cdot (-2)$, можни се следниве четири случаи:

1) $x-1=1,\ y+2=2$, од каде добиваме $x=2,\ y=0$.

2) $x-1=2,\ y+2=1$, од каде добиваме $x=3,\ y=-1$.

3) $x-1=-1,\ y+2=-2$, од каде добиваме $x=0,\ y=-4$.

4) $x-1=-2,\ y+2=-1$, од каде добиваме $x=-1,\ y=-3$.

31. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$3(m^2+n^2) - 7(m+n) = -4. \qquad (1)$$

Решение. Ако двете страни на (1) ги помножиме со 12 добиваме

$$36(m^2+n^2) - 84(m+n) = -48,$$

што е еквивалентно со

$$(6m-7)^2 + (6n-7)^2 = 50.$$

Понатаму, бројот 50 како збир на два квадрати може да се запише на три начина $1+49,\ 25+25,\ 49+1$.

Во првиот случај добиваме $6m-7=\pm 1$ и $6n-7=\pm 7$, при што единствено целобројно решение е $(m,n)=(1,0)$.

Аналогно во третиот случај го добиваме решението $(m,n)=(0,1)$.

Во вториот случај добиваме $6m-7=\pm 5$ и $6n-7=\pm 5$, па овде единствено целобројно решение е $(m,n)=(2,2)$.

Значи, целобројните решенија на дадената равенка се $(m,n)=(1,0)$, $(0,1),\ (2,2)$.

32. Определи ги сите парови природни броеви чија разлика на квадрати е еднаква на 2023.

Решение. Нека a и b се природни броеви такви што $a^2-b^2=2023$. Јасно, $a>b$, што значи $a+b>a-b$. Сега, горната равенка е еквивалентна со равенката

$$(a+b)(a-b) = 7 \cdot 17 \cdot 17$$

па ако земеме предвид дека $a+b>a-b$ ги добиваме следниве три случаи

$$(a+b)(a-b) = 2023 \cdot 1,\ (a+b)(a-b) = 289 \cdot 7,\ (a+b)(a-b) = 119 \cdot 17,$$

од каде наоѓаме:

$$\begin{cases} a+b=2023 \\ a-b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=289 \\ a-b=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=119 \\ a-b=17 \end{cases}$$

односно $a=1012, b=1011$, $a=148, b=141$ и $a=68, b=51$.

33. Определи ги вредностите на a за кои $\sqrt{a-3}$ и $\sqrt{a+12}$ се цели броеви.

Решение. Нека $\sqrt{a-3}=m$ и $\sqrt{a+12}=n$ се цели броеви. Тогаш $a-3=m^2$ и $a+12=n^2$, па затоа $n^2-m^2=15$, односно

$$(n-m)(n+m)=15.$$

Од последното равенство следува:

1) $m+n=15, n-m=1$, па затоа $n=8, m=7$ и притоа $a=52$,
2) $m+n=5, n-m=3$, па затоа $n=4, m=1$ и притоа $a=4$.

34. Определи ги сите природни броеви кои кога ќе ги зголемиме за 5 добиваме точен квадрат и кога ќе ги намалиме за 11 повторно добиваме точен квадрат.

Решение. Нека бараниот број е n. Тогаш $n+5=x^2$ и $n-11=y^2$. Ако втората равенка ја одземеме од првата, добиваме

$$x^2-y^2=16, \text{ т.е. } (x-y)(x+y)=16.$$

Бидејќи $16=1\cdot 16=2\cdot 8=4\cdot 4$, можни се следниве случаи:

1) $x+y=16, x-y=1$, од каде добиваме $x=\frac{17}{2}, y=\frac{15}{2}$ и ова не се природни броеви.
2) $x+y=16, x-y=1$, од каде добиваме $x=\frac{17}{2}, y=-\frac{15}{2}$ и ова не се природни броеви.
3) $x+y=8, x-y=2$, од каде добиваме $x=5, y=3$ и $n=5^2-5=20=3^2+11$. Значи, $n=20$ е едно решение.
4) $x+y=2, x-y=8$, од каде добиваме $x=5, y=-3$, па повторно $n=20$.
5) $x+y=4, x-y=4$, од каде добиваме $x=4, y=0$ и $n=4^2-5=11=0^2+11$. Значи, $n=11$ е друго решение.

35. Определи ги должините на страните на правоаголен триаголник ако

мерните броеви изразени во сантиметри им се цели броеви, а едната катета има должина $37\,cm$.

Решение. Нека x е должината на хипотенузата, а y е должината на катетата. Тогаш од Питагоровата теорема следува

$$x^2 - y^2 = 37^2, \text{ т.е. } (x-y)(x+y) = 37^2.$$

Од $x > y$, следува $x - y > 0$ и $x + y > x - y$, па затоа од последната равнка следува $x - y = 1,\ x + y = 37^2$. Решението на последниот систем е $x = 685,\ y = 684$.

36. Природните броеви a, b и c се такви што

$$\frac{a}{5} + \frac{b}{13} - \frac{c}{31} = \frac{1}{2015}.$$

Определи ја најмалата можна вредност на c ,.

Решение. Ако помножиме со $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, добиваме

$$31(13a + 5b) = 65c + 1. \qquad (1)$$

Левата страна на (1) е делива со 31, па затоа од $65c + 1 = 62c + 3c + 1$ следува $31 \mid 3c + 1$. Значи, $3c + 1 = 31k$, $k \in \mathbb{N}$. Сега, од $3c = 30k + k - 1$ следува дека $3 \mid k - 1$, односно $k = 3t + 1$, каде t е ненегативен цел број. Заменуваме и добиваме $3c + 1 = 31(3k + 1)$, па затоа $c = 31t + 10$.

За $t = 0$, т.е. $c = 10$, од (1) ја добиваме равенката $13a + 5b = 21$, која нема решенија во множеството природни броеви.

За $t = 1$, т.е. $c = 41$, од (1) ја добиваме равенката $13a + 5b = 86$, која има решение $a = 2, b = 12$.

Според тоа, најмалата можна вредност на c е 41.

37. Определи правилна нескратлива дропка $\frac{a}{b}\,(a, b > 0)$ таква, што

$$\frac{a+3}{b+3} = \frac{5a}{4b}. \qquad (1)$$

Решение. Од (1) следува

$$4ab + 12b = 5ab + 15a,$$

односно

$$ab + 15a = 12b.$$

Бидејќи 15 и 12 се деливи со 3, заклучуваме дека или a или b е делив со 3. За $a = 3$ добиваме дека $b = 5$, па $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$. За $b = 3$ добиваме $a = 2$, па $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.

38. Определи ги сите нескратливи дропки $\frac{a}{b}, a,b \in \mathbb{N}$, такви што

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=2\frac{71}{80}.$$

Решение. Од условот на здачата следува $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$, од каде добиваме $a^2>b^2$ и како $a,b\in\mathbb{N}$, важи $a>b$. Понатаму, бидејќи дропката $\frac{a}{b}$ е нескратлива имаме $\text{NZD}(a,b)=1$. Сега, од $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=2\frac{71}{80}$ последователно следува

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{231}{80}.$$
$$80(a^2-b^2)=231ab.$$

Но, $\text{NZD}(80,231)=1$, па од последното равенство следува дека a и b се делители на 80. Делители на 80 се: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 и 80 и со непосредна проверка добиваме дека единствено решение на последната равенка е $a=16, b=5$. Според тоа, единствена нескратлива дропка која го задоволува условот на задачата е $\frac{a}{b}=\frac{16}{5}$.

39. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{13}.$$

Решение. Од дадената равенка последователно добиваме

$$13x+13y=xy,$$
$$xy-13y=13x,$$
$$y(x-13)=13x,$$
$$y=\frac{13x}{13-x},$$
$$y=13+\frac{169}{x-13}.$$

Од последниот израз следува дека y е природен број ако и само ако $x_1=14, x_2=26, x_3=182$ и притоа важи $y_1=182, y_2=26, y_3=14$.

Конечно, во множеството природни броеви единствени решенија на дадената равенка се $(14,182),(26,26),(182,14)$.

40. Определи двоцифрен број кој е еднаков на удвоениот производ на своите цифри.

Решение. Нека бараниот двоцифрен број е $\overline{xy}=10x+y$. Од условот на задачата следува $10x+y=2xy$. Од тука добиваме

$$y=\frac{10x}{2x-1},$$
$$y=5+\frac{5}{2x-1}.$$

Дропката на десната страна е природен број само за $x=1$ и $x=3$. За $x=1$ имаме $y=5+5=10$, што не е можно бидејќи треба y да е цифра. За $x=3$, добиваме $y=6$, што значи дека $\overline{xy}=36$ е единственото решение на задачата.

41. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{5}.$$

Решение. *Прв начин*. Јасно, $a\neq 0, b\neq 0$ и дадената равенка е последователно е еквивалентна на равенките:

$$5b-5a=ab,$$
$$a(b+5)=5b,$$
$$a=\frac{5b}{b+5},$$
$$a=5-\frac{25}{b+5}.$$

Бидејќи a и b се цели броеви, именителот $b+5$ мора да е делив на 25, па затоа $b+5\in\{-1,1,-5,5,-25,25\}$, т.е. $b\in\{-6,-4,-10,0,-30,20\}$. Но, $b\neq 0$, па затоа $b\in\{-6,-4,-10,-30,20\}$. Оттука лесно следува дека решенија на задачата се:

$$(a,b)=(30,-6),(-20,-4),(10,-10),(6,-30),(4,20).$$

Втор начин. Јасно, $a\neq 0, b\neq 0$ и дадената равенка е последователно е еквивалентна на равенките:

$$5b-5a=ab,$$
$$5b-5a-ab+25=25,$$
$$5(b-5)-a(b-5)=25,$$
$$(b-5)(5-a)=25.$$

Од последното равенство следуваат системите равенки:

$$\begin{cases} b+5=-1,\\ a-5=-25, \end{cases}\qquad \begin{cases} b+5=1,\\ a-5=25, \end{cases}\qquad \begin{cases} b+5=-5,\\ a-5=-5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+5=5, \\ a-5=5, \end{cases} \qquad \begin{cases} b+5=-25, \\ a-5=-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} b+5=25, \\ a-5=1. \end{cases}$$

Бидејќи $a \neq 0, b \neq 0$ решението на четвртиот систем го отфрламе и ги добиваме следниве решенија:

$$(a,b) = (30,-6), (-20,-4), (10,-10), (6,-30), (4,20)\,.$$

42. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$xy + 5y = x^2 + 10x + 30\,.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$y(x+5) = (x+5)^2 + 5\,.$$

За $x = -5$ последната равенка го добива видот $0 \cdot y = 5$ и оваа равенка нема решение. Значи, $x = -5$ не е решение. Нека $x \neq -5$. Тогаш

$$y = x + 5 + \frac{5}{x+5}\,.$$

Бидејќи равенката ја решаваме во множеството цели броеви од последната равенка следува $x+5 \mid 5$, од каде добиваме $x+5 \in \{\pm 1, \pm 5\}$, односно $x \in \{-10,-6,-4,0\}$. Оттука едноставно ги добиваме решенијата $(x,y) \in \{(-10,-6), (-6,-6), (-4,6), (0,6)\}$.

43. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 - xy + 2x - 3y = 6\,.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$x^2 + 2x - 6 = xy + 3y,$$

$$y(x+3) = x^2 + 2x - 6.$$

Непосредно се проверува дека $x = -3$ не е решение на равенката, па имаме

$$y = \frac{x^2+2x-6}{x+3},$$

$$y = x - 1 - \frac{3}{x+3}.$$

Бидејќи $x, y \in \mathbb{Z}$, од последната равенка следува $(x+3) \mid 3$, па затоа $x+3 \in \{-3,-1,1,3\}$, односно $x \in \{-6,-4,-2,0\}$. Според тоа,

$$(x,y) \in \{(-6,-6), (-4,-2), (-2,-6), (0,-2)\}\,.$$

44. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$y^4 + x = xy + 8 .$$

Решение. Јасно $y \neq 1$. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $x(y-1) = y^4 - 8$, т.е. со равенката

$$x = \frac{y^4-8}{y-1} = \frac{y^4-1}{y-1} - \frac{7}{y-1} = y^3 + y^2 + y + 1 - \frac{7}{y-1} .$$

Сега, бидејќи $x \in \mathbb{Z}$ добиваме $(y-1) \mid 7$, па затоа $y-1 \in \{-7,-1,1,7\}$. Конечно, решенијата на почетната равенка се

$$(x, y) = (-184,-6), (8,0), (8,2), (584,8) .$$

45. Определи ги сите природни броеви x, y, z такви што

$$x > y+1,\ y > z+1 \text{ и } \frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} + \frac{3}{z+3} = 1.$$

Решение. Имаме $x+1 > y+2 > z+3$, па затоа

$$1 = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} + \frac{3}{z+3} < \frac{1}{z+3} + \frac{2}{z+3} + \frac{3}{z+3} = \frac{6}{z+3} .$$

Оттука следува $z+3 < 6$, т.е. $z < 3$. Ако $z = 2$, тогаш даденото равенство го добива видот $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} = \frac{2}{5}$. Аналогно како претходно добиваме $\frac{3}{y+2} > \frac{2}{5}$, па затоа $y+2 < \frac{15}{2} = 7{,}5$. Но, $y+2 > z+3 = 5$, па затоа $6 \leq y+2 \leq 7$, односно $y = 4$ или $y = 5$. Сега лесно се добива дека за $y = 4$ важи $x = 14$, а за $y = 5$ немаме целобројно решение за x. Значи, едно решение е $x = 14, y = 4, z = 2$. На потполно ист начин за $z = 1$ ги добиваме решенијата $x = 30, y = 7, z = 1$ и $x = 19, y = 8, z = 1$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

46. Определи четирицифрен број кај кој првите две цифри се еднакви, последните две цифри се еднакви и кој е квадрат на природен број.

Решение. Бараниот број е од видот

$$1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y .$$

Според условот на задачата имаме $1100x + 11y = z^2$, т.е.

$$11 \cdot (100x + y) = z^2 ,$$

каде z е природен број. Левата страна на последната равенка е делива со 11, што значи дека треба z^2 да е делив со 11. Но, 11 е прост број, па затоа z треба да е делив со 11. Значи, $z = 11t$, што значи дека ра-

венката го добива обликот

$$100x + y = 11t^2 .$$

Оттука добиваме

$$t^2 = \frac{100x+y}{11} = 9x + \frac{x+y}{11} .$$

Сега, бидејќи x и y се цифри, мора да важи $x + y = 11$. Но, x е прва цифра, па затоа $x \neq 0$. Понатаму, $x > 1$, бидејќи за $x = 1$, добиваме $y = 10$, што не е можно. Сега, бидејќи квадратите на природните броеви завршуваат на 1, 4, 5, 6 и 9, заклучуваме дека од сите решенија на равенката $x + y = 11$ можни се само решенијата: $(7,4), (6,5), (5,6)$ и $(2,9)$. Според тоа, можни решенија се 7744, 6655, 5566 и 2299. Од овие броеви точен квадрат е само бројот $7744 = 88^2$ и тоа е единствено решение.

47. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот

$$2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n$$

е точен квадрат.

Решение. Нека

$$2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n = m^2 .$$

Тогаш

$$3^n = m^2 - (2^4 \cdot 3^2 + 5^2) \cdot 3^{14} = m^2 - (13 \cdot 3^7)^2 = (m - 13 \cdot 3^7)(m + 13 \cdot 3^7) .$$

Значи,

$$m - 13 \cdot 3^7 = 3^x \text{ и } m + 13 \cdot 3^7 = 3^y ,$$

каде $x, y \in \mathbb{N}_0$ и $x + y = n$. Од последните две равенки следува

$$3^y - 3^x = 2 \cdot 13 \cdot 3^7 ,$$

односно

$$3^x (3^{y-x} - 1) = 2 \cdot 13 \cdot 3^7 .$$

Од последното равенство следува $x = 7$ и $3^{y-x} - 1 = 2 \cdot 13$, од каде добиваме $y - x = 3$, односно $y = 10$. Конечно, $n = x + y = 17$.

48. Определи ги сите четворки природни броеви (m, n, p, q) такви, што

$$3^m + 3^n + 3^p + 3^q = 3672 .$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека

$m \le n \le p \le q$. Бидејќи $3672 = 3^3 \cdot 136$ и 136 не е делив со 3, заклучуваме дека $m = 3$ (во спротивно левата страна на равенката ќе биде делива со 3^4, а десната – не). Заменуваме $m = 3$ и добиваме

$$3^{n-3} + 3^{p-3} + 3^{q-3} = 135 = 3^3 \cdot 5.$$

На ист начин заклучуваме, дека $n - 3 = 3$, т.е. $n = 6$ и

$$3^{p-6} + 3^{q-6} = 4..$$

Бидејќи 4 не е делив со 3, добиваме $p - 6 = 0$, т.е. $p = 6$ и останува $q - 6 = 1$, т.е. $q = 7$. Значи, бараните четворки се сите пермутации на четворката $(3,6,6,7)$.

49. Да се определи најмалиот природен број k, за кој равенката

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = x + y + k$$

има решение во множеството природни броеви. За најденото k да се реши равенката.

Решение. Дадената равенка можеме да ја запишеме во видот

$$(x + y)(x - y)^2 = kxy, \qquad (1)$$

и нека $d = \text{NZD}(x, y)$, $x = dx'$, $y = dy'$, каде x' и y' се заемно прости броеви. Од (1) добиваме

$$d(x' + y')(x' - y')^2 = kx'y'.$$

Сега, од $\text{NZD}(x', y') = 1$ следува $\text{NZD}(x', x' + y') = \text{NZD}(x', x' - y') = 1$, па затоа $x' \mid d$. Аналогно добиваме дека $y' \mid d$, па како $\text{NZD}(x', y') = 1$ добиваме дека $x'y' \mid d$. Според тоа,

$$k = \frac{d}{x'y'}(x' + y')(x' - y')^2 \ge 3,$$

бидејќи случајот $x' = y' = 1$ не е можен. Јасно, знак за равенство важи ако $d = x'y'$ и $x' = 2, y' = 1$ (или $x' = 1, y' = 2$). Оттука добиваме $k = 3$ и решенија $x = 2, y = 4$ и $x = 4, y = 2$.

50. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$2^x + 1 = y^2.$$

Решение. Имаме

$$2^x = (y - 1)(y + 1),$$

па затоа имаме две можности:

1) $y+1=2^a, y-1=2^b, (a>b)$, од каде добиваме $2=2^b(2^{a-b}-1)$. Оттука следува $2^b=2$ и $2^{a-b}-1=1$, т.е. $b=1$ и $a=2$. Значи, $y+1=2^2$, па е $y=3$ и $2^x+1=3^2$, односно $x=3$.

2) $y+1=-2^a, y-1=-2^b, (b>a)$, од каде добиваме $2=2^a(2^{b-a}-1)$. Оттука следува $2^a=2$ и $2^{b-a}-1=1$, т.е. $a=1$ и $b=2$. Значи, $y+1=-2$, па е $y=-3$ и $2^x+1=(-3)^2$, односно $x=3$.

Значи, решенија на задачата се $x=3, y=3$ и $x=3, y=-3$.

51. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{x}{2^x}+\frac{y}{2^y}=\frac{z}{2^z}. \tag{1}$$

Решение. Од $\frac{n}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{n-1}{2^{n+1}}>0$, кога $n>1$, лесно следува дека за $2\le p<q$ важи $\frac{q}{2^q}<\frac{p}{2^p}$.

Нека $z\ge 5$. Тогаш имаме

$$\frac{z}{2^z}-\left(\frac{z+1}{2^{z+1}}+\frac{z+2}{2^{z+2}}\right)=\frac{z-4}{2^{z+2}}>0, \tag{2}$$

$$\frac{z}{2^z}-\left(\frac{z+1}{2^{z+1}}+\frac{z+1}{2^{z+1}}\right)=\frac{-1}{2^z}<0. \tag{3}$$

Бидејќи очигледно треба да важи $x>z$ и $y>z$, од неравенствата (2) и (3) следува дека во овој случај задачата нема решение.

За $z=4$, за да имаме равенство во (2), единствена можност е броевите x и y да се 5 и 6. Оттука добиваме две решенија на (1) и тоа $x=5, y=6, z=4$ и $x=6, y=5, z=4$.

Ако $z\le 3$, тогаш $\frac{z}{2^z}\ge\frac{3}{8}$. Ако $x\ge y$ (аналогно се разгледува кога важи $y\ge x$), од $\frac{x}{2^x}\le\frac{y}{2^y}$ следува $\frac{y}{2^y}\ge\frac{3}{16}$. Тоа е можно само ако $y\le 4$. Ако ги разгледаме сите можности за y и z, добиваме уште две решенија на равенката $x=4, y=4, z=1$ и $x=4, y=4, z=2$.

52. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$p^2-x!=2,$$

каде p е прост број.

Решение. Ако $x=1$, тогаш $p^2=3$, што не е можно. Ако $x=2$, тогаш

$p^2 = 4$, од каде добиваме $p = 2$. Понатаму, ако $x > 2$, тогаш $p^2 > 4$, па затоа $p > 2$, што не е можно бидејќи во тој случај левата страна ќе биде непарен број, а десната е парен број. Значи, единствено решение е $x = p = 2$.

53. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p^2 + q = 101.$$

Решение. Јасно, броевите p и q се со различна парност. Бидејќи единствен парен прост број е 2, можни се следниве два случаја.
Ако $p = 2$, тогаш $q = 101 - 4 = 97$ и тоа е прост број.

Ако $q = 2$, тогаш $p^2 = 101 - 2 = 99$ и оваа равенка нема решение во множеството природни броеви, што значи дека нема решение и во множеството прости броеви.
Значи, единствено решение е $p = 2, q = 97$.

54. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p^3 - q^7 = p - q.$$

Решение. Ако p и q се решенија, тогаш

$$p^3 - 1 > p^3 - p = q^7 - q = q(q^6 - 1) > q^6 - 1,$$

па затоа $p > q^2$. Дадената равенка е еквивалентна на равеката

$$p(p-1)(p+1) = q(q-1)(q+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1). \qquad (1)$$

Од горната оценка следува дека p може да е делител единствено на $q^2 + q + 1$. Ако $p \neq q^2 + q + 1$, тогаш $q^2 < p \leq \frac{q^2+q+1}{2}$, бидејќи важи $q^2 > q + 1$, односно $q^2 > \frac{q^2+q+1}{2}$. Значи $p = q^2 + q + 1$, па затоа важи $p - 1 = q^2 + q$ и $p + 1 = q^2 + q + 2$. Заменуваме во (1) и ја добиваме равенката

$$(q^2+q)(q^2+q+2) = q(q-1)(q+1)(q^2-q+1),$$

која е еквивалентна со равенката $q^3 - 3q^2 + q - 3 = 0$, т.е. со равенката $(q-3)(q^2+1) = 0$. Решение на последната равебка е $q = 3$, од каде следува $p = 13$.

55. Определи ги сите прости броеви p и природни броеви n, за кои

$$p(p-1)=2(n^3+1).$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$p(p-1)=2(n+1)(n^2-n+1). \qquad (1)$$

Јасно, $p=2$ не е решени, т.е. $p>2$. Тогаш p е делител на $n+1$ или на n^2-n+1. Ако $p\mid n+1$, тогаш $p\le n+1$. Според тоа,

$$n\ge p-1\ge 2(n^2-n+1)\ge 2n,$$

што не е можно. Нека $n^2-n+1=mp$ за некој природен број m. Сега, заменуваме во (1) и по средувањето, добиваме $p=1+2m(n+1)$. Имаме

$$m(1+2m(n+1))=n^2-n+1. \qquad (2)$$

За $m=1$ и $m=2$ не се добиваат целобројни вредности за n. Ако $m=3$, добиваме

$$n^2-19n+20=0, \text{ т.е. } (n+1)(n-20)=0.$$

Оттука $n=20$ и $p=127$, што е решение, бидејќи 127 е прост број.

Нека $m>3$. Имаме, $n^2-n+1=(n-2)(n+1)+3$ и од равенството (2) следува дека $m\equiv 3(\mathrm{mod}\, n+1)$, т.е. $m=k(n+1)+3$, каде k е природен број. Тогаш $m\ge n+4$ и

$$p-1=2m(n+1)\ge 2(n+1)(n+4)=2n^2+10n+8>n^2-n+1\ge p,$$

што е противречност. Според тоа, задачата има единствено решение $p=127$, $n=20$.

56. Определи ги сите прости броеви p и q, такви што

$$p^2-pq-q^3=1.$$

Решение. Непосредно се проверува, дека не е можно да е $p=2$. Понатаму, $p^2>q^3>q^2$, па затоа $p>q$ и следствено $p\ge 2+q$. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $p(p-q)=(q+1)(q^2-q+1)$, па како $p\ge 2+q$, добиваме $p\mid q^2-q+1$ и затоа $q^2-q+1=mp$ за некој природен број m. Ако дадената равенка ја запишеме во обликот $p^2-1=q(q^2+p)$, заклучуваме дека q е делител на $p+1$ или $p-1$, од каде што следува дека q е делител на $mp+m$ или $mp-m$, т.е. q е

делител на $q^2-q+1+m$ или $q^2-q+1-m$. Според тоа, q е делител на $m+1$ или $m-1$. Понатаму, имаме

$$m=\frac{q^2-q+1}{p}<\frac{q^2-q+1}{q}<q.$$

Последното значи дека $m\pm1<q\pm1$. Нека $m+1=kq$. Тогаш $kq<q+1$, т.е. $(k-1)q<1$, од каде добиваме $k=0$ и $m+1=0$, што не е можно. Аналогно, ако $m-1=kq$, тогаш $kq<q-1$, т.е. $(k-1)q<-1$, од каде добиваме $k=0$ и $m-1=0$, т.е. $m=1$ и затоа $p=q^2-q+1$. Заменуваме во $p(p-q)=(q+1)(q^2-q+1)$ и добиваме $p=1+2q$. Сега, од равенството $p=q^2-q+1$ добиваме $q^2-3q=0$, па затоа $q=3$ и $p=1+2q=7$.

Значи, единствено решение е $(p,q)=(3,7)$.

57. Реши ја равенката $(p-1)!+1=p^m$, каде p е прост број, а m е природен број.

Решение. За првите три прости броја ги добиваме решенијата: $(p,m)=(2,1),(3,1),(5,2)$. Ќе докажеме дека равенката нема решение за $p>5$. Последователно дадената равенка е еквивалентна со равенките

$$(p-1)!=p^m-1,$$
$$(p-1)\cdot(p-2)!=(p-1)(p^{m-1}+p^{m-2}+\ldots+1).$$

Бидејќи p е прост број и $p>5$, добиваме дека $p-1$ е сложен број, па може да го претставиме во видот $p-1=d_1d_2\ldots d_k$. Секој од множителите $d_i, i=1,2,\ldots,k$ е помал од $p-1$, па мора барем еднаш да е во производот $(p-2)!$, од каде следува дека

$$p-1\,|\,(p-2)!=p^{m-1}+p^{m-2}+\ldots+1.$$

Бидејќи остатокот од делењето на p^i со $p-1$ е еднаков на 1, добиваме дека $p-1\,|\,\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m}=m$. Затоа $m\geq p-1$. Оттука добиваме дека $p^m\geq p^{p-1}>(p-1)!+1$, за $p>5$, па затоа равенката во овој случај нема решение.

Забелешка. Неравенството $n^{n-1}>(n-1)!+1$, за $n\geq3$ се докажува со математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

58. Определи ги сите правоаголни триаголници чии должини на страни се природни броеви и за кои важи дека производот на неговите катети е три пати поголем од неговиот периметар.

Решение. Нека a и b се должините на катетите на триаголникот, а c е должината на неговата хипотенуза. Имаме $ab = 3(a+b+c)$, па затоа $3 \mid ab$, од каде следува дека барем еден од броевите a и b е делив со 3. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека a е делив со 3, т.е. $a = 3m$, каде $m \in \mathbb{N}$. Според тоа, $mb = 3m + b + c$, односно $mb - 3m - b = c$. Последното равенство го квадрираме и ако ја искористиме Питагоровата теорема последователно добиваме

$$m^2b^2 + 9m^2 + b^2 - 6m^2b - 2b^2m + 6mb = c^2,$$
$$m^2b^2 + 9m^2 + b^2 - 6m^2b - 2b^2m + 6mb = (3m)^2 + b^2,$$
$$m^2b^2 + 9m^2 + b^2 - 6m^2b - 2b^2m + 6mb = 9m^2 + b^2,$$
$$m^2b^2 - 6m^2b - 2b^2m + 6mb = 0,$$
$$mb(mb - 6m - 2b + 6) = 0.$$

Но, $m, b \in \mathbb{N}$, па од последното равенство следува равенството

$$mb - 6m - 2b + 6 = 0,$$

кое е еквивалентно со равенството

$$(m-2)(b-6) = 6.$$

Бидејќи $m - 2 \geq -1$ и $b - 6 \geq -5$, броевите $m-2$ и $b-6$ не може да се негативни (во спротивно нивниот производ би бил помал или еднаков на 5). Значи, двата броја се позитивни, па затоа можни се следниве случаи:

1) $m-2 = 1, b-6 = 6$, т.е. $m = 3$ и $b = 12$. Тогаш $a = 3m = 9$, па затоа $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.
2) $m-2 = 2, b-6 = 3$, т.е. $m = 4$ и $b = 9$. Тогаш $a = 3m = 12$, па затоа $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.
3) $m-2 = 3, b-6 = 2$, т.е. $m = 5$ и $b = 8$. Тогаш $a = 3m = 15$, па затоа $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$.
4) $m-2 = 6, b-6 = 1$, т.е. $m = 8$ и $b = 7$. Тогаш $a = 3m = 24$, па затоа $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Zubović, Š. Arslanagić: O diofantskim jednadžbama, Matka 31/122, Zagreb
2. R . Tošić, V . Vukoslavčević: Elementi teorije brojeva, Alef, Novi sad, 1995
3. Š. Arslanagić: O djelivosti celih brojeva, Matka 21/84, Zagreb
4. Д. Раковска: Най – най – най, Математика+, София
5. И. Шаркова: Да поговорим за $n!$, Математика+, София
6. К. Аневска, Р. Малчески: Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје, 2012
7. Н. Сафаеи: Алгебричен подход към диофантови уравнения, Математика+, София
8. Н. Сафаеи: Факторизация и елементарни тъждества за решаване на олимпийски задачи, Математика+, София
9. Р. Малчески, А. Малчески, К. Аневска: Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје, 2020
10. Р. Малчески, К. Аневска: Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје, 2012
11. Р. Малчески, К. Аневска:. Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје, 2016
12. Р. Малчески: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
13. Р. Малчески: Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје, 2012
14. Р. Малчески: Решавање на некои нелинеарни Диофантови равенки, Математички талент, Скопје, 2020
15. С. Малчески, В. Зенга-Малческа: Подготвителни задачи за математички олимпијади – Теорија на броеви, Математички талент, Скопје, 2022
16. С. Малчески: Збирка задачи по теорија на броеви, Скопје, 2021
17. С. Малчески: Одбрани задачи од теорија на броеви, Математички талент, Скопје, 2022

18. С. Малчески: Признаци за деливост, Математички талент, Скопје, 2022
19. С. Малчески: Прости и сложени броеви, Математички талент, Скопје, 2022
20. С. Малчески: Совршени броеви, Математички талент, Скопје, 2022