Даниел Велинов
Скопје

ГЕНЕРИРАЧКИ ФУНКЦИИ

Со помош на генерирачките функции ќе покажеме како може да се решаваат рекурентни релации и како генерирачките функции можат да се користат за решавање на комбинаторни проблеми. Слободно кажано проблемите на низи ги трансформираат во проблеми на функции. Начинот на кој што ќе придружуваме генерирачка функција на дадена низа $(a_n)_{n\in N}$ е следниов: За низата $(a_n)_{n\in N}$ со елементи $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ го придружуваме формалниот степенски ред

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_k a^k + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \ .$$

Овде конвергенцијата на редот не е предмет на разгледување во повеќето случаи, овде x го сметаме како ознака на позиција, наместо како број. Овој формален степенски ред ќе го нарекуваме генерирачка функција која одговара на низата $(a_n)_{n\in N}$. Бројот на генерирачки функции е многу поголем, од овде дефинираните генерирачки функции, но во нашиот случај е доволен за да може да ни користи за решавање на рекурентни релации и комбинаторни проблеми. Јасно, генерирачките функции за конечни низи ќе бидат од облик

$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$,

бидејќи во тој случај членовите на низата може да се запишат како

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, 0, 0, \ldots.$$

Сумирањето на членовите на степенскиот ред ќе го правиме со помош на формулата за збир на членови од геометриска прогресија. Пример редот кој најчесто се користи $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$, за $|x|<1$, е бескраен геометриски ред со почетен член $a_1 = 1$ и количник $q = x$. Во продолжение ќе бидат дадени некои операции со генерирачки функции. Множењето на генерирачка функција со константа го множи секој елемент од низата која одговара на генерирачката функција со таа константа или ако $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ е низа која одговара на генерирачката функција $G(x)$ тогаш $ca_0, ca_1, ca_2, ca_3, \ldots$ е низа која одговара на генерирачката функција $cG(x)$. Собирањето или одземањето на генерирачки функции одговара на собирање или одземање на соодветните членови од низите кои одговараат на генерирачките функции или ако $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ се низи на кои одговараат соодветно генерирачките функции $G(x)$ и $H(x)$ тогаш

$$a_0 \pm b_0, a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3, \ldots$$

е низа која одговара на генерирачката функција $G(x) \pm H(x)$. Множење на генерирачката функција со x^k одговара на поместување на десно со воведување на k нули на почетокот или ако $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ е низа која одговара на генерирачката функција $G(x)$, тогаш

$$\underbrace{0,0,0,\ldots,0}_{k},a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$$

е низа која одговара на генерирачката функција $x^kG(x)$. Диференцирањето на генерирачка функција е дадено со: ако $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$ е низа која одговара на генерирачката функција $G(x)$ тогаш низата $a_0,2a_1,3a_2,4a_3,\ldots$ одговара на генерирачката функција $G'(x)$. Со комбинирање на овие операции можеме да ја најдеме генерирачката функција на низа со помош на низи на кои ни се познати генерирачките функции.

Генерирачките функции можат да се користат и во проблеми од комбинаторика. Во овие случаи обично коефициентот на x^n во генерирачката функција е бројот на начини на кој можат да се изберат n елементи. На пример, во генерирачката функција за биномните кеофициенти, која следува од Биномната теорема, бројот на начини на кој може да се изберат k елементи од n елементи е коефициентот пред x^k, односно $\binom{n}{k}$.

Теорема 1. Нека $G(x)$ е генерирачката функција за избор на елементи од множеството A и нека $H(x)$ е генерирачката функција за избор на елементи од множеството B и притоа множествата A и B се дисјунктни, тогаш генерирачката функција за избор на елементи од унијата на A и B е производот $G(x)H(x)$.

Пример 1. Со помош на генерирачки функции за рекурентната релација $a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}$, $n\geq 2$, $a_0=1$, $a_1=2$, да се најде експлицитен облик на низата.

Решение. Нека $G(x)$ е генерирачката функција која одговара на низата која е зададена со рекурентната релација. Нека $G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$. Тогаш

$$-5xG(x)=-5a_0x-5a_1x^2-5a_2x^3-5a_3x^4-\ldots,$$
$$4x^2G(x)=4a_0x^2+4a_1x^3+4a_2x^4+4a_3x^5+\ldots.$$

Ако ги собереме овие три равенки се добива

$$\begin{aligned}G(x)-5xG(x)+4x^2G(x)&=a_0+a_1x-5a_0x+(a_2-5a_1+4a_0)x^2+\\&\quad+(a_3-5a_2+4a_1)x^3+(a_4-5a_3+4a_2)x^4+\ldots\\&=a_0+a_1x-5a_0x+\sum_{k=0}^{\infty}(a_{k+2}-5a_{k+1}+4a_k)x^{k+2}\\&=a_0x+a_1x-5a_0x\\&=1+2x-5x=1-3x\end{aligned}$$

Добиваме, $(1-5x+4x^2)G(x)=1-3x$, односно генерирачката функција

$$G(x)=\tfrac{1-3x}{1-5x+4x^2}=\tfrac{1-3x}{(1-x)(1-4x)}\ .$$

Со помош на методот на неопределени коефициенти генерирачката функција можеме да ја запишеме како

$$G(x)=\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{1-x}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{1-4x}=\tfrac{2}{3}(1+x+x^2+x^3+\ldots)+\tfrac{1}{3}(1+4x+(4x)^2+(4x)^3+\ldots)\ .$$

Коефициентот пред x^n е $\frac{2}{3}+\frac{4^n}{3}$. Па, оттука $a_n=\frac{2}{3}+\frac{4^n}{3}$.

Пример 2. Најди ја генерирачката функција која одговара на низата на Фибоначи, а потоа запиши ја во експлицитен облик низата на Фибоначи.

Решение. Нека бараната генерирачка функција која одговара на низата на Фибоначи ја означиме со $G(x)$. Фибоначиевата низа е зададена со рекурентната релација $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $a_0=0$, $a_1=1$, $n\geq 2$. Низата на Фибоначи ќе ја претсавиме како збир на три низи за кои ги знаеме генерирачките функции, а потоа ќе го примениме правилото на збир. Трите низи се:

$$0,1,0,0,0,0,0,\dots$$
$$0,a_0,a_1,a_2,\dots$$
$$0,0,a_0,a_1,a_2,...$$

Генерирачките функции кои се придружени на горните низи соодветно се x, $xG(x)$, $x^2G(x)$. Оттука имаме дека $G(x)=x+xG(x)+x^2G(x)$, па генерирачката функција која одговара на низата на Фибоначи е $G(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$. Сега со помош на методот на неопределени коефициенти функцијата $G(x)=\frac{x}{(1-x_1x)(1-x_2x)}$, каде $x_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $x_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, можеме да ја запишеме како

$$\frac{x}{(1-x_1x)(1-x_2x)}=\frac{A}{1-x_1x}+\frac{B}{1-x_2x}.$$

Заменувајќи конкретни вредности за x добиваме систем чие решение е $A=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $B=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. Значи, $G(x)=\frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1}{1-x_1x}-\frac{1}{1-x_2x})$. Но,

$$\frac{1}{1-x_1x}=1+x_1x+(x_1x)^2+(x_1x)^3+\dots$$
$$\frac{1}{1-x_2x}=1+x_2x+(x_2x)^2+(x_2x)^3+\dots,$$

од каде со замена се добива редот на генерирачката функција.

Коефициентот пред x^n е $\frac{\sqrt{5}}{5}(x_1{}^n-x_2{}^n)$, па екплицитниот облик на низата на Фибоначи е $a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$, $n\in N$.

Пример 3. На колку начини може да се натовари камион со n предмети: кревети, шпорети, телевизори и клима уреди ако треба да важи: бројот на телевизори треба да биде парен, бројот на клима уреди треба да биде делив со 5, да има најмногу 4 шпорети и најмногу еден кревет?

Решение. Нека $G(x)$ е генерирачката функција за изборот на телевизори, $H(x)$ е генерирачката функција за изборот на клима уреди, $I(x)$ е генерирачката функција за изборот на шпорети и нека $J(x)$ е генерирачката функција за изборот на кревети. Тогаш

$$G(x)=1+x^2+x^4+x^6+\dots=\frac{1}{1-x^2}$$

$$H(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots = \frac{1}{1-x^5}$$

$$I(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$$

$$J(x) = 1 + x$$

Користејќи ја Теорема 1, генерирачката функција за изборот на n предмети врз основа на условот на задачата е

$$G(x)H(x)I(x)J(x) = \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1-x^5}{1-x}(1+x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots .$$

За да најдеме на колку вкупно начини може да се изберат n предмети со дадените ограничувања, доволно е да го најдеме коефициентот пред x^n од добиената генерирачка функција, кој јасно од обликот на генерирачката функција е $n+1$. Значи, изборот може да се направи на вкупно $n+1$ начини.

Задачи за самостојна работа

1. Со помош на генерирачки функции за рекурентната релација $a_n = 3a_{n-1} + 1$, $n \geq 1$, $a_0 = 2$, да се најде експлицитен облик на низата.
2. Со помош на генерирачки функции за рекурентната релација
$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2},\ n \geq 2,\ a_0 = 1,\ a_1 = 2$$
да се најде експлицитен облик на низата.
3. Со помош на генерирачки функции за рекурентната релација
$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},\ n \geq 2,\ a_0 = 2,\ a_1 = 9$$
да се најде експлицитен облик на низата.
4. Нека се запишани сите броеви со n цифри, кои се составени од $1, 2, 3, 4$, при што во записот на броевите не е појавува иста цифри една до друга. Колку такви броеви има вкупно?
5. На колку начини може да се изберат n топки ако: бројот на црвени топки е најмногу 2, бројот на сини топки е делив со 3, произволно многу бели топки и парен број на жолти топки?

Користена литература

1. Bjorner A., Stanley R.P., A combinatorial miscellany, 1996.
2. Graham R.L., Groetschel M., Lovasz L., Handbook of Combinatorics, Volumes 1 and 2, Elsevier (North-Holland), Amsterdam and MIT Press, Cambridge, Mass., 1996.
3. Wilf H.S., Generating functionology, academic Pres Boston, 1994.
4. Riordan J., An introduction to Combinatorial Analysis, Wiley and Sons, New York, 1958
5. **Малчески, Р.,** Малческа, В. (2020): Математика 5 – дискретна математика (второ издание), Армаганка, Скопје