Сојузен натпревар 1973

Седмо одделение

1. Определи го најмалиот природен број со кој треба да се помножи бројот 8316 за да се добие број кој е точен квадрат на природен број. На кој број?

   Решение. Бидејќи $8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$ најмалиот природен број со кој треба да се помножи за да се добие квадрат на природен број е производот $3 \cdot 7 \cdot 11$. Тогаш
   $$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 8316 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = (2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11)^2 = 1386^2.$$

2. По намалувањето на цената за 20%, за 240 денари може да се купи 1 метар платно повеќе отколку што пред намалувањето можело да се купи за 270 денари. Определи ја цената на платното пред намалувањето.

   Решение. Нека x е бројот на метрите кои биле купени по цена од y денари по метар за 270 денари. Тогаш од условот на задачата следува $xy = 270, (x+1)\frac{80y}{100} = 240$, од каде добиваме $x = 9$ и $y = 30$.

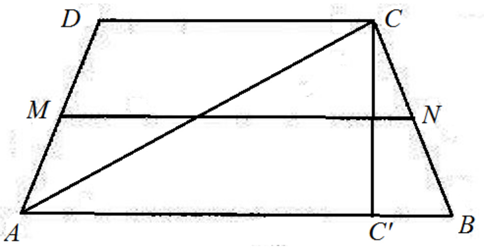
3. Од градовите A и B, кои се оддалечени $250\,km$, истовремено во пресрет еден кон друг тргнале два моторцикли. Брзината на едниот од нив е за $10\,km/h$ поголема од брзината на другиот. По два часа патување до средбата им преостанале уште $30\,km$. Определи ја брзината на секој моторциклист.

   Решение. Нека брзината на првиот мотоциклист $v\,km/h$. Тогаш вториот се движи со брзина $(v-10)\,km/h$. Сега имаме
   $$2v + 2(v-10) = 220\text{, т.е. } v = 60\,km/h.$$

4. Во рамнокрак трапез средната линија е s, а дијагоналата е двапати подолга од средната линија. Определи ја плоштината на овој трапез.

   Решение. Нека $ABCD$ е дадениот трапез и нека MN е неговата средна линија (види цртеж). Имаме $MN = s$ и $AC = 2s$. Сега, бидејќи $AC' = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = MN = s$, добиваме

$$CC' = \sqrt{AC^2 - AC'^2}$$
$$= \sqrt{4s^2 - s^2} = s\sqrt{3}.$$



Конечно,

$$P = \frac{AB+CD}{2} \cdot CC' = MN \cdot CC'$$
$$= s^2\sqrt{3}.$$

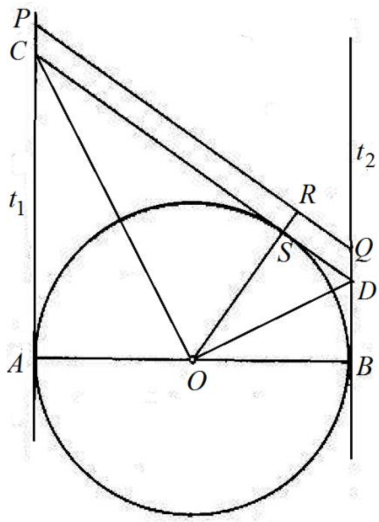
5. Дадена екружница s со центар O и дијаметар $AB = 4\,cm$.

а) Конструирај три тангенти на оваа кружница, од кои две се во точките A и B, а третата таква што отсечокот CD меѓу првите две тангенти е со должина $5\,cm$.

б) Определи го $\measuredangle COD$.

в) Определи ја плоштината на ликот ограничен со конструираните тангенти и дадената кружница.

Решение. а) Нека t_1 и t_2 се тангентите на дадената кружница конструирани во точките A и B (цртеж десно). Околу произволна точка P на тангентата t_1 опишуваме кружница со радиус $r = 5\,cm$ и во пресек со t_2 ја наоѓаме точката Q. Од точката O повлекуваме нормала OR на правата PQ и во пресекот на оваа нормала со дадената кружница ја наоѓаме точката S. Во точката S повлекуваме права паралелна со права та PQ и тоа е бараната трета тангента на кружницата.



б) Имаме:

$$\measuredangle COD = \measuredangle COS + \measuredangle SOD = \tfrac{1}{2}(\measuredangle AOS + \measuredangle SOB) = 90^\circ .$$

в) Бараната плоштина се добива кога од плоштината на трапезот $ABDC$ се одземе плоштината на половина круг со радиус $r = 2\,cm$. Имаме

$$P_1 = \frac{AC+BD}{2} \cdot AB = \frac{CS+DS}{2} \cdot AB = \frac{CD}{2} \cdot AB = 10\,cm^2 \text{ и } P_2 = \frac{4\pi}{2} = 2\pi\,cm \;,$$

па е $P = P_1 - P_2 = (10 - 2\pi)\,cm^2$.

Осмо одделение

1. Нека a и b се произволни природни броеви. Докажи дека барем еден од броевите $a+b, a-b$ и ab е делив со 3.

   Решение. Секој природен број може да се запише во еден од облиците $3k, 3k+1, 3k+2, k\in\mathbb{N}$. Можни се следниве случаи:

   - Ако барем еден од броевите a и b е од облик $3k$, тогаш нивниот производ е делив со 3.
   - Ако двата броја a и b се од облик $3k+1$ или $3k+2$, тогаш нивнта разлика е делива со 3.
   - Ако едниод од броевите a и b е од облик $3k+1$, а другиот е од облик $3k+2$, тогаш нивниот збир е делив со 3.

2. По намалувањето на цената за 20%, за 240 денари може да се купи 1 метар платно повеќе отколку што пред намалувањето можело да се купи за 270 денари. Определи ја цената на платното пред намалувањето.

   Решение. Види го решението на задачата 2 од *седмо одделение*.

3. Во рамнината на правоаголен координатен систем XOY коструирај правоаголник $ABCD$, ако се познати координатите на три негови темиња: $A(-3,-1), B(5,-1), C(5,3)$. Определи ги:

   а) координатите на четвртото теме,

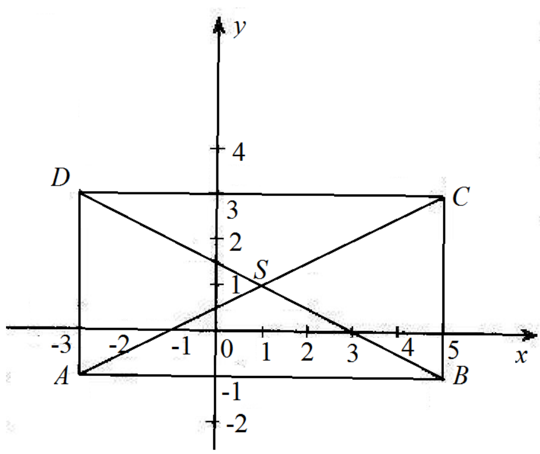
   б) координатите на пресекот на правите AC и BD.

   в) равенките на правите на кои припаѓаат страните и дијагоналите на овој правоаголник.

   Решение. а) Координатите на четвртото теме D се $(-3,4)$.

   б) Координатите на пресечната точка S на отсечките AC и BD се $x_S=\frac{-3+5}{2}=1, y_S=\frac{-1+3}{2}=1.$

   в) Равенките на правите на кои лежат страните на правоаголникот се



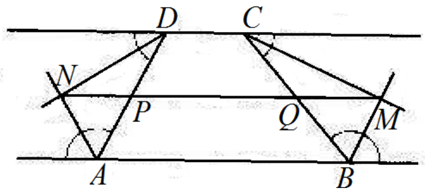
$x=-3, x=5, y=-1, y=3$.

Равенките на правите на кои лежат дијагоналите на правоаголникот се:

$y+1=\frac{3+1}{5+3}(x+3),\ y+1=\frac{3+1}{-3-5}(x-5)$, т.е. $x-2y+1=0, x+2y-3=0$.

4. Основите AB и CD на трапезот $ABCD$ се продолжени на двете страни. Симетралите на надворешните агли на трапезот во темињата A и D се сечат во точката M, а симетралите на надворешните агли во темињата B и C се сечат во точката N. Определи го периметарот на трапезот $ABCD$ ако $MN=2k$.

Решение. Бидејќи точката M лежи на симетралите на аглите во темињата B и C, таа е еднакво оддалечена од правата AB и од правата CD, што значи дека припаѓа на средната линија на трапезот $ABCD$. Аналогно, точката N припаѓа на средната линија на трапезот $ABCD$. Понатаму, триаголниците NAP и NDP се рамнокраки (Зошто?), па затоа $NP=AP=PD$. Слично, $MQ=BQ=CQ$. Конечно, за периметарот на трапезот добиваме:



$$\begin{aligned}AB+CD+AD+BC&=2\cdot\left(\frac{AB}{2}+\frac{CD}{2}+AP+BQ\right)\\&=2\cdot\left(\frac{AB+CD}{2}+NP+QM\right)\\&=2(PQ+NP+QM)\\&=2MN=4k.\end{aligned}$$

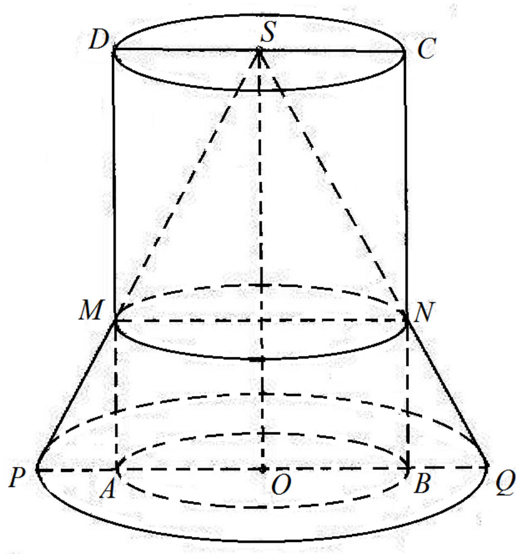
5. Врвот на прав конус е во центарот на едната основа на цилиндар. Другата основа на цилиндарот и основата на конусот лежат во иста рамнина и имаат заеднички центар. Волумените на конусот и цилиндарот се еднакви. Радиусот на основата на цилиндарот е r, а висината на цилиндарот е h.

а) Определи го радиусот на основата на конусот (изразен преку r).

б) Колкав е волуменот на делот од цилиндарот кој е во конусот (изразен со помош на r и h).

Решение. Нека радиусот на основата на конусот е R. Од $V_k=V_c$ следува

$$\frac{R^2h}{3}=r^2h, \text{ т.е. } R=r\sqrt{3}.$$



Сега, од сличноста на триагониците BQN и OQS добиваме

$$\frac{BN}{OS}=\frac{R-r}{R},$$

па затоа

$$BN=OS\frac{r\sqrt{3}-r}{r\sqrt{3}},$$

$$h_1=h\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}=h\frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

ЗАтоа волуменот на делот од цилиндарот кој се наоѓа во конусот е:

$$V=\pi r^2h\frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$