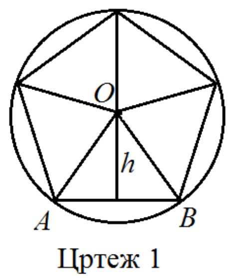
Алија Муминагиќ
Данска

ПЛОШТИНА НА ПРАВИЛЕН ПЕТАГОЛНИК

Познато ни е како се пресметува плоштина на триаголник и на некои видови четириаголници (паралелограм, трапез итн.). Во оваа статија ќе покажеме како се пресметува плоштина на правилен петаголник. Во натамошните разгледувања ќе користиме познати дефиниции и својства на многуаголниците, на кои накратко ќе се потсетиме.

1) За еден многуаголник велиме дека е правилен ако има еднакви страни и еднакви внатрешни агли.
2) Збирот на внатрешните агли на $n-$аголник е еднаков на $y(n)=(n-2)\cdot 180^0$, па така за $n=5$ добиваме дека збирот на внатрешните агли на петаголникот е $U(5)=(5-2)\cdot 180^0=540^0$. Сега од 1) следува дека секој внатрешен агол на правилниот петаголник е еднаков на $540^0:5=108^0$.
3) Околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница и во секој правилен многуаголник може да се впише кружница.
4) Аголот со теме во центарот на опишаната кружница на правилниот многуаголник и чии краци содржат две соседни темиња на многуаголникот го нарекуваме централен агол на правилниот многуаголник. Во случај на правилен петаголник централниот агол е еднаков на $\frac{360^0}{5}=72^0$.
5) Отсечката која ги поврзува центарот на опишаната кружница и средината на страната на правилниот многуаголник ја нарекуваме апотема.

Плоштината на правилниот петаголник ќе ја пресметаме така што ќе ја пресметаме плоштината на карактеристичниот триаголник, т.е. триаголникот чии темиња се центарот на опишаната кружница и две соседни темиња на правилниот петаголник (цртеж 1), а потоа истата ќе ја зголемиме петпати, со што добиваме



Цртеж 1

$$P = \frac{5ah}{2} = \frac{Oh}{2}\,, \tag{1}$$

каде $O = 5a$ е периметарот на петаголникот. Значи, за да ја пресметаме плоштината на правилниот петаголник потребно е да ги знаеме должините на страната a и апотемата h. Во натамошните разгледувања ќе покажеме како тоа може да се направи користејќи ги својствата 1) – 5).

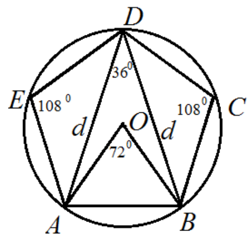
Според 4) важи $\measuredangle AOB = 72^0$ и од теоремата за централен и периферски агол следува

$$\measuredangle ADB = \tfrac{1}{2}\measuredangle AOB = 36^0.$$

Понатаму, од 2) имаме $\measuredangle AED = \measuredangle BCD = 108^0$ и како

$$\overline{DE} = \overline{DC},\ \overline{AE} = \overline{BC}\,,$$

добиваме дека $\Delta AED \cong \Delta BCD$, па затоа $\overline{AD} = \overline{BD} = d$, цртеж 2. Тоа значи дека ΔABD е рамнокрак, па затоа



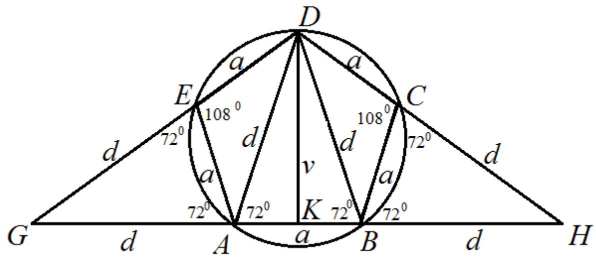
Цртеж 2

$$\measuredangle DAB = \measuredangle DBA = \frac{180^0 - 36^0}{2} = 72^0.$$

Нека

$$\overline{AD} = \overline{BD} = d \text{ и } \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = a\,.$$

Страната AB ја продолжуваме преку темињата A и B, а страните DC и DE преку темињата E и C и пресечните точки да ги означиме со G и H, цртеж 3. Имаме



Цртеж 3

$$\measuredangle AEG = 180^0 - 108^0 = 72^0,\ \measuredangle GAE = 180^0 - 108^0 = 72^0\,,$$

па затоа $\Delta AEG \cong \Delta ABD$. Аналогно $\Delta CBH \cong \Delta ABD$ и од овие складности следува дека

$$\overline{GE} = \overline{GA} = \overline{HB} = \overline{HC} = d\,.$$

Нека K е подножјето на висината спуштена од темето D на страната AB и нека $\overline{DK}=v$. Триаголникот ABD е рамнокрак, па затоа

$$\overline{AK}=\overline{BK}=\tfrac{a}{2}.$$

Сега, да ги разгледаме правоаголните триаголници DKG и DKA. За ΔDKG имаме

$$\overline{GK}=\overline{GA}+\overline{AK}=d+\tfrac{a}{2},\ \overline{DK}=v$$

и

$$\overline{GD}=\overline{GE}+\overline{ED}=d+a,$$

а за ΔDKA имаме

$$\overline{DK}=v,\ \overline{AK}=\tfrac{a}{2}\ \text{и}\ \overline{DA}=d.$$

Од Питагоровата теорема следува

$$v^2+(d+\tfrac{a}{2})^2=(d+a)^2, \tag{2}$$

$$v^2+(\tfrac{a}{2})^2=d^2. \tag{3}$$

Од (2) и (3) добиваме

$$(d+a)^2-(d+\tfrac{a}{2})^2=d^2-(\tfrac{a}{2})^2,$$

а од овде после средувањето наоѓаме

$$d^2-ad-a^2=0. \tag{4}$$

Равенката (4) е квадратна по непозната d и за да истата ја решиме дополнуваме до полн квадрат, при што истата ја трансформираме о еквивалентни равенки:

$$\begin{aligned}
&d^2-ad+\tfrac{a^2}{4}-\tfrac{a^2}{4}-a^2=0 && \Leftrightarrow\\
&(d-\tfrac{a}{2})^2-\tfrac{5a^2}{4}=0 && \Leftrightarrow\\
&(d-\tfrac{a}{2})^2=(\tfrac{a\sqrt{5}}{2})^2 && \Leftrightarrow\\
&d-\tfrac{a}{2}=\tfrac{a\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

$$d=\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}. \tag{5}$$

Понатаму, од (4) имаме

$$d^2=a^2+ad$$

и ако замениме во (3) добиваме

$$v^2+(\tfrac{a}{2})^2=a^2+ad,$$

па затоа од со замена за d од (5) наоѓаме

$$v^2 = \frac{3}{4}a^2 + ad = \frac{3}{4}a^2 + \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}a^2 = a^2\,\frac{5+2\sqrt{5}}{4},$$

од каде следува дека

$$v = a\,\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}. \qquad (6)$$

Понатаму, $\Delta AEG \cong \Delta ABD \cong \Delta CBH$, па затоа овие триаголници имаат еднакви плоштини, т.е. $P_{\Delta AEG} = P_{\Delta ABD} = P_{\Delta CBH}$. Ако ја означиме плоштината на правилниот петаголник $ABCDE$ со T, тогаш од цртеж 3 и од (5) и (6) последователно добиваме

$$\begin{aligned} T &= P_{\Delta DGH} - P_{\Delta EGA} - P_{\Delta CBH} \\ &= P_{\Delta DGH} - 2P_{\Delta DAB} \\ &= \frac{\overline{DK}\cdot\overline{GH}}{2} - 2\,\frac{\overline{DK}\cdot\overline{AB}}{2} \\ &= \frac{v(2d+a)}{2} - 2\,\frac{va}{2} \\ &= \frac{v(2d-a)}{2} \\ &= a\,\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}\left(2\,\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2} - a\right) \\ &= a^2\sqrt{5}\,\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4} \\ &= \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

што и требаше да се пресмета.

Забелешка 1. а) Ако ја искористиме формулата (1), тогаш за апотемата h добиваме

$$h = \frac{2T}{5a} = \frac{2\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5a} = a\,\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}.$$

Овде уште ќе забележиме дека апотемата h истовремено е и радиус на впишаната кружница во правилниот петаголник $ABCDE$.

б) Формулата за плоштина на правилен петаголник

$$T = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \qquad (7)$$

може да се наде и со помош на таканаречениот златен пресек.

в) Може да се пресмета дека $\sqrt{25+10\sqrt{5}} \approx 6,8819096$, па оттука со замена во (7) за плоштината на правилен петаголник ја добиваме приближната формула

$$T \approx 1,7204774a^2.$$