Ристо Малчески
Скопје

СЕМЕЈНО РЕШАВАЊЕ НА ЕДНА "ЕДНОСТАВНА ЗАДАЧА"

Неделно попладне. Фросина и Самоил седат на работната маса, пишуваат и воздивнуваат. Вера, нивната помала сестра, влегува во собата и ги прашува:

- Што ви е, што сте се замислиле?

- Доста малецка. Кога ќе пораснеш, тато ќе ти зададе километарска равенка од четврти степен, и ти ќе бидеш замиссена. Всушност, -и возвраќа Самоил, па ти знаеш само линеарни равенки и што има да ти објаснувам.

Вера се насмевнува и излегува.

- Самоил, -нервозно му се обраќа Фросина, задачата гласи: најди четири последователни природни броеви чиј производ е еднаков на 1974024.

- Така е, -одговара Самоил, еве што направив досега. Ако со x го означиме најмалиот од природните броеви ја добиваме равенката:

$$x(x+1)(x+2(x+3)=1974024.$$

Помножив и добив:

$$x^4+6x^3+11x^2+6x=1974024.$$

И ти тоа доби?

- Да, -одговара Фросина. -Ех, кога слободниот член би бил помал, па да ја примениме теоремата за целобројни корени на полином со целобројни коефициенти! Чекај, чекај! А зошто најголемиот од бараните броеви да не го означиме со x.

Полни со надеж, Самоил и Фросина работа на новата идеја. Од

$$x(x-1)(x-2)(x-3)=1974024$$

добиваат

$$x^4-6x^3+11x^2-6x=1974024.$$

Нови воздишки. Пробуваат вториот број да го означат со x, па третиот и пак ништо. Самоил се замисли:

- Мора да постои и поедноставен начин. Кога не би биле овие непарни степени? Чекај! ... Аха, разлика на квадрати, па да! Зошто непознатата мора да биде еден од бараните броеви? Аритметичката средина на два

броја е еднакво “оддалечена” од двата броја. Да ја означиме аритметичката средина на бараните броеви со t. Според тоа, имаме $\frac{x+(x+1)+(x+2)+(x+3)}{4}=t$, од каде наоѓаме $x=t-\frac{3}{2}$. Сега ако замениме во равенката

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=1974024$$

добиваме

$$(t-\tfrac{3}{2})(t-\tfrac{1}{2})(t+\tfrac{1}{2})(t+\tfrac{3}{2})=1974024$$

од каде ја наоѓаме равенката

$$(t^2-\tfrac{9}{4})(t^2-\tfrac{1}{4})=1974024$$

која е еквивалентна на равенката

$$16t^4-40t^2-31584375=0.$$

Господи! Пак равенка од четврт степен.

- Да, Самоил, -се надоврзува Фросина. -Меѓутоа, сега имаме само парни степени и ако ставиме $t^2=z$ ја добиваме равенката

$$16z^2-40z-31584375=0.$$

Понатаму, ако ја искористиме формулата за бином на квадрат последователно наоѓаме

$$(4z)^2-2\bullet 4z\bullet 5+5^2-5^2-31584375=0,$$

$$(4z-5)^2=31584400.$$

Леле, колкав број! Вера, добро што дојде, ти деновиве учеше квадратни корени. Ајде биди добра, најди квадратен корен од 31584400.

Вера се лути, но сепак им го соопштува резултатот: 5620. Тогаш Фросина и Самоил продолжуваат:

$$(4z-5)^2-5620^2=0,$$

$$(4z-5-5620)(4z-5+5620)=0,$$

$$(4z-5625)(4z+5615)=0,$$

$$z=\frac{5625}{4}\ \text{или}\ z=-\frac{5615}{4}.$$

Понатаму, согледуваат дека треба z да е позитивен број и наоѓаат $z=\frac{5625}{4}$, односно $t^2=\frac{5625}{4}$, од каде последователно добиваат

$$t^2-(\tfrac{75}{2})^2=0$$

$$(t-\tfrac{75}{2})(t+\tfrac{75}{2})=0$$

$$t=\frac{75}{2} \text{ или } t=-\frac{75}{2}.$$

Фросина воодушевено извикува:

- Готово, бројот $-\frac{75}{2}$ отпаѓа, па значи бараните броеви се:

$$\frac{75}{2}-\frac{3}{2}, \frac{75}{2}-\frac{1}{2}, \frac{75}{2}+\frac{1}{2}, \frac{75}{2}+\frac{3}{2},$$

односно 36, 37, 38 и 39.

Вера ги гледа и се смее:

- Зошто толку се мачевте со тие ваши равенки, а и мене ме измалтретиравте со оној голем број?! Можевте да пробате неколку пати да помножите четири последователни природни броеви и ќе го добиевте решението.

Фросина налутено и возвраќа.

- Да, но тоа твое “неколку пати” може да биде триесет или педесет пати.

Самоил се замисли:

- Чекај Фросина, малата сепак е во право. Сигурно не мора да се множи $4\bullet5\bullet6\bullet7$ или нешто слично. Производот очигледно е премногу мал. Но, не мораме да множиме ниту броеви поголеми од 100, бидејќи во тој случај производот е многу поголем од нашиот број.

- Точно Самоил, -го надополни Фросина, но можеме да најдеме уште подобри ограничувања. Имено, $30^4=810000$ е премал број, а $40^4=2560000$ е преголем, па значи бараните броеви се меѓу 30 и 40.

- Не брзај со заклучокот, -ја предупреди Самоил. Можеби ќе соодветствува, на пример, $38\bullet39\bullet40\bullet41$.

Вера врти со главата и ги “советува”.

- Нема да може, бидејќи во тој случај производот ќе завршува на нула, а вашиот број завршува на 4.

- Браво Вера, -ја пофали Фросина, се гледа дека си ни сестра. Значи, нашите броеви се меѓу 30 и 40.

- Тоа е нешто подобро, -се сложува Самоил, но ќе има уште работа. Бидејќи меѓу броевите не смее да има број чија цифра на единици е 5, треба да помножиме

$$31\bullet32\bullet33\bullet34=1113024$$

па ова не е решение, а

$$36\bullet37\bullet38\bullet39=1974024,$$

т.е. бараните броеви се 36, 37, 38 и 39.

Вера, задоволна од својот “аритметички” настап насмеано му се обраќа на татко и, кој во моментот влегува во собата.

- Тато, Самоил и Фросина ја решија задачата и тоа на два начини.

- Дајте да видам .... Не се два, туку се три начини само што немале трпение да ја применат теоремата за целобројни нули на полином со целобројни коефициенти. Аха, и третиот начин е добар, особено што е чисто аритметички. Но, кога сме кај аритметиката зошто да не размислуваме вака: да го разложиме дадениот број на множители

$$1974024 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 .$$

Бројот 37 е прост број, па или тој е еден од бараните броеви или е “вистински” делител на еден од бараните броеви. Очигледно, тој не е “вистински”делител на ниеден од бараните броеви, бидејќи во тој случај еден од четирите последователни природни броеви ќе биде поголем или еднаков на $2 \cdot 37 = 74$, па затоа производот ќе биде поголем или еднаков на

$$71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74 = 27615024 .$$

Значи, еден од множителите е 37. Но, $3 \cdot 13 = 39, 2 \cdot 18 = 38$ и $2^2 \cdot 3^2 = 36$, т.е. едно решение се броевите 36, 37, 38 и 39. Дали има друго решение?

- Не, -истовремено одговараат тројцата. Разложувањето на прости множители е единствено, со точност до размена на редоследот на множителите.

- Така е народе! -се сложува татко им. А сега, доволно работевте. Одиме на прошетка и се разбира ...

Жагор, а потоа сложно трио.

- На сок и сладолед, нели. Мамо, ајде тато чести во име на математиката.

Забелешка од редакцијата. Во почетниот дел од оваа статија беше спомената *теоремата за целобројни нули на полином со целобројни коефициенти*, која не се учи во основното образование. Во еден од следните броеви на нашето списание ќе можете да се запознаете со оваа важна теорема.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија