

Регионален натпревар 1988

I година

1. Кога еден новинар прашал кои двојки ги освоиле првите три места на еден натпревар по танцување, ги добил следните одговори:

Светлана: „Секоја девојка е помлада од својот партнер за 3 години.“

Игор: „Сите заедно имале 115 години.“

Јулија: „Јас и Игор заедно имаме 36 години.“

Антон: „Јас и Јулија заедно имаме 40 години.“

Максим: „Најмлада меѓу нас е Ира.“

Кој со кого играл? Одговорот да се образложи.

Решение. Ако Игор има x , Антон y , а Максим z години, тогаш од условот на задачата го добиваме равенството $x + y + z + x - 3 + y - 3 + z - 3 = 115$, т.е. $x + y + z = 62$. Ако Јулија играла со Игор, тогаш од $x + x - 3 = 36$ следува дека $2x = 39$, што не е можно бидејќи 39 не е парен број. Слично, ако Јулија играла со Антон, тогаш од $y + y - 3 = 40$ следува дека $2y = 43$. Значи, Јулија играла со Максим. Според тоа, $z - 3 + x = 36$, т.е. $z + x = 39$ од што следува дека $y = 62 - 39 = 23$. Од $z - 3 + y = 40$ следува дека $z = 20$, па од $x + y + z = 115$, следува дека $x = 19$. Најмлад е игор и играл со Ира, Максим играл со Јулија, а Анон играл со Светлана.

2. Речен брод за 11 часа, без прекин поминал 168 km по течението, а 48 km спротивно од течението на реката. Друг пат, за истото време поминал 144 km по, а 60 km спротивно од течението на реката. Колкава е брзината на бродот, а колкава на реката?

Решение. Нека x е брзината на бродот а y брзината на реката. Од условите на задачата се добива следниот систем од две равенки со две непознати:

$$\begin{cases} \frac{168}{x+y} + \frac{48}{x-y} = 11 \\ \frac{144}{x+y} + \frac{60}{x-y} = 11 \end{cases}$$

Овој систем се трансформира во системот

$$\begin{cases} 168(x-y) + 48(x+y) = 11(x^2 - y^2) \\ 144(x-y) + 60(x+y) = 11(x^2 - y^2) \end{cases},$$

од каде што со одземање на втората равенка од првата се добива дека

$$24(x-y) - 12(x+y) = 0, \text{ т.е. } x = 3y.$$

Со замена во една од равенките, добиваме $\frac{168}{4y} + \frac{48}{2y} = 11$, од каде следува равенка имаме $y = 6$. Според тоа, брзината на бродот е 18 km/h, а на реката е 6 km/h.

3. Даден е просторен четириаголник $ABCD$, при што точките A, B, C, D не се компланарни. Докажи дека отсечките што ги сврзуваат средините на спротивните страни и отсечката што ги сврзува средините на дијагоналите од четириаголникот, минуваат низ една иста точка која што ги преполовува.

Решение. Нека P, Q, R, S се средини на AB, BC, CD, DA соодветно. Тогаш SP и QR се средни линии на триаголниците ABD и BCD соодветно, па: $SP \parallel DB \parallel QR$. Слично, PQ и SR се средни линии на триаголниците ABC и ACD , па: $PQ \parallel AC \parallel SR$. Значи, четириаголникот $PQRS$ е паралелограм, а паралелограм е рамнински четириаголник во кој дијагоналите (PR и QS) се сечат и преполовуваат. Истата дискусија применета на четириаголникот $ABCD$ покажува дека PR и EF се сечат и се преполовуваат, каде што E и F се средини на BD и CA соодветно. Со тоа, задачата е решена.

4. Точките A, B и E лежат на иста права, така што B е помеѓу A и E . Од иста страна на правата се конструирани квадрат $ABCD$ и рамностран триаголник BEF . Ако $\overline{BE} = 2\overline{AB}$, да се покаже дека плоштината на четириаголникот $CDEF$ е еднаква на плоштината на триаголникот BEF .

Решение. Нека CG висина на триаголникот BCF . Бидејќи

$$\angle ABC = 90^\circ \text{ и } \angle FBE = 60^\circ,$$

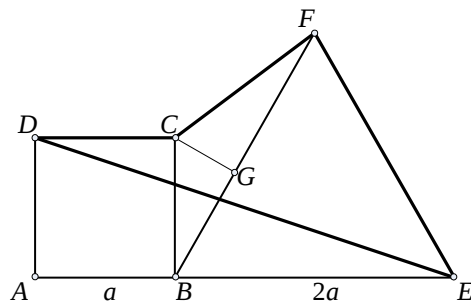
а

$$\angle ABC + \angle CBG + \angle FBE = 180^\circ,$$

наоѓаме дека $\angle CBG = 30^\circ$. Според тоа, во правоаголниот триаголник BCG катетата CG е еднаква на половината од хипотенузата BC , т.е.

$\overline{CG} = \frac{a}{2}$. Според тоа, плоштината P на четириаголникот $CDEF$ е:

$$\begin{aligned} P &= P_{ABCD} + P_{BEF} + P_{BCF} - P_{ADE} = a^2 + P_{BEF} + \frac{1}{2} 2a \frac{a}{2} - \frac{1}{2} 3a \cdot a \\ &= a^2 + P_{BEF} + \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{2} = P_{BEF} \end{aligned}$$



II година

1. Докажи го Лагранжовиот идентитет

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

за $a > 0, b > 0, a^2 > b$, и примени го во изразот

$$\sqrt{3a + 2a\sqrt{2}}, 3a \quad a > 0.$$

Решение. Да го означиме со D изразот $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$. Тогаш

$$D^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} + \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} \cdot \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} = a \pm 2\sqrt{\frac{a^2 - (\sqrt{a^2 - b})^2}{2}}$$

Бидејќи $a^2 > b$, $(\sqrt{a^2 - b})^2 = a^2 - b$. Според тоа, $D^2 = a \pm \sqrt{b}$. Бидејќи $a > 0$, $b > 0$ и $a^2 > b$, следува дека $a \geq \sqrt{b}$, па и $a \pm \sqrt{b} > 0$. Според тоа, $D = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, со што идентитетот е докажан.

За $a > 0$, дадениот израз $\sqrt{3a+2a\sqrt{2}}$, со лагранжовиот идентитет се трансформира во изразот $\sqrt{2a} + \sqrt{a}$, т.е. $\sqrt{3a+2a\sqrt{2}} = \sqrt{a}(1+\sqrt{2})$.

2. Да се реши равенката

$$\frac{x^3\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$$

Решение. Воведуваме смена $t = \sqrt[3]{x}$, со што равенката се трансформира во:

$$\frac{t^4-1}{t^2-1} - \frac{t^2-1}{t-1} = 4.$$

За $t \neq -1$ и $t \neq 1$, ова равенка е еквивалентна со равенката

$$t^2 + 1 - t + 1 = 4,$$

T.e.

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

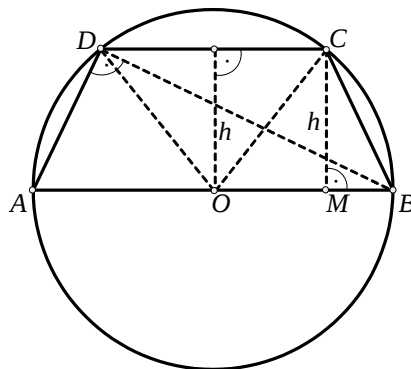
чийи решенија се: $t_1 = -1$ и $t_2 = 2$. Бидејќи $t \neq -1$, единствено решение на равенката е x за кое $\sqrt[3]{x} = 2$, т.е. $x = 8$.

3. Над трапез $ABCD$ опишана е кружница со центар на основата AB и радиус R . Да се изрази должината на кракот AD преку R , ако важи

$$\overline{AD}^2 + 3\overline{CD}^2 = 2R^2.$$

Решение. Бидејќи над трапезот е опишана кружница со центар во основата, следува дека трапезот е рамнокрак. Нека O е центарот на опишаната кружница, (види цртеж). Триаголникот COD е рамнокрак со крак R и основа CD . Нека h е висината на трапезот. Тогаш

$$(\frac{\overline{CD}}{2})^2 = R^2 - h^2.$$



Од сличноста на триаголниците CMB и BDA , следува дека $h = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BD}}{2}$. Според тоа, $\overline{CD}^2 = 4R^2 - \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{R^2}$, од што, заедно со даденото равенство $\overline{AD}^2 + 3\overline{CD}^2 = 2R^2$, следува дека

$$3\overline{CD}^2 = 12R^2 - \frac{3\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{R^2} = 2R^2 - \overline{AD}^2. \quad (1)$$

Бидејќи триаголникот ABD е правоаголен, $\overline{BD}^2 = 4R^2 - \overline{AD}^2$, од што со замена во (1) добиваме дека:

$$12R^4 - 12\overline{AD}^2 R^2 + 3\overline{AD}^4 = 2R^4 - \overline{AD}^2 R^2,$$

т.е.

$$10R^4 - 11\overline{AD}^2 R^2 + 3\overline{AD}^4 = 0.$$

Решавајќи ја горната равенка по $\overline{AD}^2$, добиваме: $\overline{AD}^2 = \frac{11R^2 \pm R^2}{6}$. Бидејќи $ABCD$ е трапез (а не е триаголник), добиваме дека $\overline{AD}^2 = \frac{5R^2}{3}$, т.е. $\overline{AD} = R \frac{\sqrt{15}}{3}$.

4. Плоштините на двете основи на пресечена пирамида се Q и G и висината е H . Да се определи волуменот на целата пирамида и волуменот на отсечената пирамида.

Решение. Нека висината на отсечената пирамида е h . Тогаш висината на целата пирамида е $H + h$. Според теоремата за паралелни пресеци кај пирамиди, важи:

$$\frac{Q}{G} = \frac{(H+h)^2}{h^2},$$

од каде што добиваме дека $h = H \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{Q}-\sqrt{G}}$. Според тоа, волуменот на целата пирамида е

$$V_c = \frac{1}{3} Q(H+h) = \frac{1}{3} \frac{QH\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{G}},$$

а на отсечената пирамида е

$$V_o = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} G \cdot H \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{Q}-\sqrt{G}},$$

т.е.

$$V_c = \frac{HQ(Q+\sqrt{QG})}{3(Q-G)} \text{ и } V_o = \frac{HG(G+\sqrt{QG})}{3(Q-G)}.$$

III година

1. Да се реши неравенката

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2 - 5)) > 0.$$

Решение. Бидејќи

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \log_3 x^{-1} = -\log_3 x$$

добиваме

$$-\log_3(\log_4(x^2 - 5)) > 0,$$

од каде што следува дека $0 < \log_4(x^2 - 5) < 1$. Според тоа, $1 < x^2 - 5 < 4$, т.е. $6 < x^2 < 9$. Решението на неравенката е $(-3, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$.

2. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2} \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Решение. Со собирање на двете равенки и одземање на првата од втората равенка, добиваме

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ \sin(y - x) = 1 \end{cases}.$$

Тогаш: $x + y = n\pi$, $y - x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, од каде што следува дека:

$$x = \pi(\frac{n}{2} - k - \frac{1}{4}), \quad y = \pi(\frac{n}{2} + k + \frac{1}{4}), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

3. Нека p, q, r се природни броеви помали од 100 за кои $p^2 + q^2 = r^2$. Со допишување на една иста цифра ($\neq 0$) од левата страна на p, q, r се добиени броевите a, b, c соодветно. Да се најдат p, q, r ако $a^2 + b^2 = c^2$.

Решение. Ако броевите p, q, r се едноцифрени, тогаш $a = 10k + p$, $b = 10k + q$, $c = 10k + r$, каде што $1 \leq k \leq 9$. Од $a^2 + b^2 = c^2$ и $p^2 + q^2 = r^2$, следува дека $5k + p + q = r$. Со квадрирање на ова равенка добиваме

$$25k^2 + p^2 + q^2 + 10kp + 10kq + 2pq = r^2,$$

т.е.

$$25k^2 + 10kp + 10kq + 2pq = 0,$$

што не е можно. Значи, p, q, r не можат да бидат едноцифрени. До иста контрадикција доаѓаме и ако претпоставиме дека p, q, r се двоцифрени.

Ако p и q се едноцифрени а r е двоцифрен, тогаш $a = 10k + p$, $b = 10k + q$, $c = 100k + r$, за $1 \leq k \leq 9$. Од $a^2 + b^2 = c^2$ и $p^2 + q^2 = r^2$, следува

$$9800k^2 + 200rk = 20pk + 20qk,$$

т.е.

$$4900k + 100r = p + q,$$

што не е можно, бидејќи p и q се едноцифрени броеви.

Ако p е едноцифрен а q и r се двоцифрени, тогаш $a = 10k + p$, $b = 100k + q$, $c = 100k + r$. Од $a^2 + b^2 = c^2$ и $p^2 + q^2 = r^2$, следува дека $5k + p + 10q = 10r$. Значи p мора да е делив со 5, т.е. $p = 5$, бидејќи p е едноцифрен. Според тоа $p^2 = 25 = r^2 - q^2 = (r - q)(r + q)$. Бидејќи $q, r \geq 10$, не може $q + r = 5$ или $q + r = 1$, што значи $q + r = 25$ и $r - q = 1$, т.е. $r = 13, q = 12$.

Ако q е едноцифрен, а p и r двоцифрени, тогаш, исто како погоре, се добива дека $q = 5, r = 13, p = 12$. Значи бараните броеви се: $p = 5, q = 12, r = 13$ или $p = 12, q = 5, r = 13$.

4. Нека S и P се плоштините на две страни на еден тетраедар, нека a е должината на нивниот заеднички раб, и нека α е аголот меѓу тие две страни. Да се докаже дека волуменот на тетраедарот е

$$V = \frac{2 \cdot S \cdot P \cdot \sin \alpha}{3a}.$$

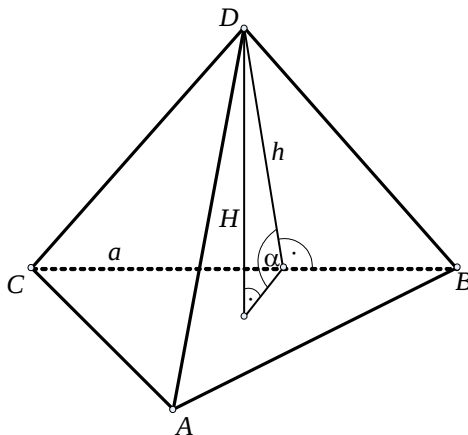
Решение. Нека A, B, C, D се темиња на тетраедарот, а S и P плоштините на страните ABC и BCD соодветно (види цртеж). Нека H е висината на тетраедарот спуштена од темето D , а h е висината на триаголникот BCD спуштена од темето D .

Тогаш,

$$h = \frac{2P}{a}, \text{ а } H = h \sin \alpha = \frac{2P \sin \alpha}{3a}.$$

Според тоа,

$$V = S \frac{H}{3} = \frac{2SP \sin \alpha}{3a}.$$



IV година

1. Да се пресмета збирот $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ каде $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ се последователни членови на една аритметичка прогресија.

Решение. Ставајќи

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{n+1} - a_n = d,$$

и множејќи го даденото равенство со d , имаме

$$Sd = \frac{d}{a_1 a_2} + \frac{d}{a_2 a_3} + \dots + \frac{d}{a_n a_{n+1}},$$

т.е.

$$\begin{aligned} Sd &= \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} + \dots + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 a_{n+1}} = \frac{nd}{a_1 a_{n+1}}. \end{aligned}$$

2. Да се упрости изразот

$$\frac{\sin 53^\circ - 2 \cos 40^\circ \sin 13^\circ}{\cos 63^\circ}$$

Решение. Користејќи го тригонометрискиот идентитет

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta),$$

имаме

$$\begin{aligned} \frac{\sin 53^\circ - 2 \cos 40^\circ \sin 13^\circ}{\cos 63^\circ} &= \frac{\sin 53^\circ - [\sin(13^\circ + 40^\circ) + \sin(13^\circ - 40^\circ)]}{\cos 63^\circ} \\ &= -\frac{\sin(-27^\circ)}{\sin 63^\circ} = \frac{\sin 27^\circ}{\sin 27^\circ} = 1 \end{aligned}$$

3. На елипсата $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y = 11$ да се најде точка A најблиска до правата $x + y = 8$ и точка B најоддалечена од истата права.

Решение. Бараните точки се точки во кои елипсата допира прави p и q кои се паралелни со правата $x + y = 8$. Нека s е права паралелна со правата $x + y = 8$, т.е. $s: y = n - x$, за некој $n \in \mathbb{R}$. Заменувајќи во $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y = 11$, добиваме:

$$9x^2 + 4(n - x)^2 - 18x - 16(n - x) = 11,$$

т.е.

$$13x^2 - x(8n + 2) + 4n^2 - 16n - 11 = 0. \quad (1)$$

Точките A и B се единствени, па затоа решението на (1) по x е двоен корен, што значи дека дискриминантата на (1) е нула, т.е.

$$D = (8n + 2)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (4n^2 - 16n - 11) = 0.$$

Со средување, се добива дека $D = -144(n^2 - 6n - 4)$, па од $n^2 - 6n - 4 = 0$, добиваме $n = 3 \pm \sqrt{13}$. За $n = 3 + \sqrt{13}$ ја добиваме најблиската точка $A(1 + \frac{4\sqrt{13}}{13}, 2 + \frac{9\sqrt{13}}{13})$, а за $n = 3 - \sqrt{13}$ ја добиваме најоддалечената точка $B(1 - \frac{4\sqrt{13}}{13}, 2 - \frac{9\sqrt{13}}{13})$.

4. На колку различни начини може да бидат наредени n книги на една полица, така што однапред нумерирани k од тие книги се во растечки или опаѓачки редослед.

Решение. Секој избор на местата на кои се наоѓаат нумерираните книги е комбинација на n елементи од класа k без повторување. Бројот на такви комбинации е

$$A = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Во секој од A -те избори на местата за нумерираните книги, преостанатите $n-k$ книги се разместуваат произволно, со што се добиваат $(n-k)!$ начини на редување на книгите. Нумерираните книги можат да бидат наредени само на два начини, т.е. во опаѓачки или растечки редослед.

Според тоа, бараниот број на начини на редување на книгите е:

$$2 \cdot A \cdot (n-k)! = 2 \frac{n!}{k!}.$$