Билјана Крстеска

ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

Пресликувањето $f : U \to \mathbf{R}$ од подмножество реални броеви во множеството реални броеви се вика *функција*. Множеството $D_f = U$ се вика домен на функцијата f, додека множеството $E_f = f(D_f) = \{f(x) \mid x \in D_f\}$ се вика ранг на функцијата f.

Природно е да се постави прашањето дали постои функција g со домен $D_g = E_f$ и ранг $E_g = D_f$ таква во која g има обратно дејство, односно

$$g(y) = x \quad \text{ако и само ако} \quad f(x) = y, \quad \text{за секои } x \in D_f, \quad y \in E_f. \tag{1}$$

Ако постои функција g која ги задоволува горните услови, тогаш велиме дека g е *инверзна функција* (инверзија) на f.

Пример 1. Нека $U = \{0, 1, 2, 3, \}$ и нека функцијата $f : U \to \mathbf{R}$ е определена со $f(0) = 3$, $f(1) = 6$, $f(2) - 0$, $f(3) = \frac{1}{2}$. Тогаш $D_f = \{0, 1, 2, 3\}$ и $E_f = \{0, \frac{1}{2}, 3, 6\}$. Функцијата $g : E_f \to \mathbf{R}$ определена со $g(0) = 2$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $g(3) = 0$, $g(6) = 1$ има домен еднаков на рангот на f и ранг еднаков на доменот на f. Уште повеќе, таа го задоволува условот (1), односно има обратно дејство од функцијата f. Може да се провери дека за функцијата $f : U \to \mathbf{R}$, определена со $f(0) = 3$, $f(1) = 6$, $f(2) - 0$, $f(3) = \frac{1}{2}$, не постои функција g со бараните својства.

Наведениот пример покажува дека за дадена функција f не секогаш постои инверзна функција. Следната теорема ги дава точно оние услови при кои постои таквата функција.

Теорема 1. За дадена функција f постои инверзија g ако и само ако f ја задоволува импликацијата

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2, \tag{2}$$

за секои $x_1, x_z \in D_f$. Во тој случај инверзната функција g е еднозначно определена.

Доказ. Претпоставуваме дека g е инверзна функција на f и дека $x_1, x_2 \in D_f$ се такви при што $f(x_1) = f(x_2) = y$. Тогаш, од (1), $x_1 = g(y)$ и $x_2 = g(y)$, односно $x_1 = x_2$, што значи дека важи (2).

Обратно, претпоставуваме дека импликацијата (2) важи за секои $x_1, x_2 \in D_f$. Нека $y \in E_f$ е произволно одбрано. Тогаш постои $x \in D_f$ таков што $y = f(x)$, и според (2) x е еднозначно определен. Ставајќи $g(y) = x$, добиваме функција g со домен $D_g = E_f$ и ранг $E_g = D_f$, која што е инверзна

на f. Ако g_1, g_2 се две такви функции, тогаш за секој $y \in D_{g_1} = D_{g_2} = E_f$, од $g_1(y) = x_1$ и $g_2(y) = x_2$ следува дека $f(x_1) = f(x_2)$, од каде поради (2) добиваме дека $x_1 = x_2$. Значи $g_1 = g_2$. ■

Инверзната функција на f ќе ја означиме со f^{-1}.

Забелешка 1. Во практиката не е потребно да проверуваме дали е исполнет условот (2), односно дали различни елементи од доменот со функцијата f се пресликуваат во различни елементи, туку треба да провериме дали равенката $y = f(x)$ е еднозначно решлива по x за секое $y \in E_f$. Ако x е решение на таа равенка, односно ако $x = f^{-1}(y) = g(y)$, тогаш инверзната функција е определена со равенката $y = f^{-1}(x) = g(x)$.

Пример 2. Да ја разгледаме линеарната функција $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ со домен $D_f = \mathbf{R}$. Оваа функција го исполнува условот за егзистенција на инверзна функција. Со примена на постапката за наоѓање на инверзна функција содржана во претходната забелешка, добиваме дека $f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$, од каде што заклучуваме дека инверзната функција на линеарна функција е линеарна функција. Специјално функцијата $f(x) = x$ е инверзна самата на себе.

Пример 3. Инверзна функција на функцијата $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$, со домен $D_f = \mathbf{R}$ е функцијата $f^{-1}(x) = \log_a x$. Бидејќи $E_f = \mathbf{R}^+$, заклучуваме дека логаритамската функција е дефинирана само за позитивни реални вредности.

Имајќи го предвид условот (1), односно $f^{-1}(y) = x$ ако и само ако $f(x) = y$, е точна следната теорема:

Теорема 2. Ако f^{-1}, односно $(f^{-1})^{-1} = f$. ■

Да видиме каква е врската меѓу графиците на функциите кои се инверзни една на друга. Ако двојката $(x, f(x))$ е од графикот на функцијата f, тогаш двојката ($f(x), x$) е од графикот на нејзината инверзна функција f^{-1}. Од друга страна, ако ($x, f^{-1}(x)$) е од графикот на инверзната функција на f, тогаш ($f^{-1}(x), x$) е од графикот на инверзната функција на функцијата f^{-1}, односно од претходната теорема, од графикот на функцијата f. Со тоа ја докажавме следната теорема:

Теорема 3. Графикот на функцијата f^{-1} е симетричен на графикот на f во однос на правата $y = x$. ■

Нека $f : U \to \mathbf{R}$ е функција и нека $V \subseteq U$. Функцијата $g : V \to \mathbf{R}$, определена со $g(x) = f(x)$, за секое $x \in V$ се вика рестрикција на функцијата f на множеството V и се означува со f_V.

Пример 4. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=x^2$ со домен $D_f=\{-2,-1,1,2\}$. Оваа функција нема инверзна бидејќи $f(-2)=4=f(2)$, односно не е исполнет условот (2). Но, ако ставиме $S=\{-1,0,2\}$, тогаш рестрикцијата $f_s(x)=x^2$ од f на S има инверзна функција f_s^{-1} со домен еднаков на рангот на $f_s^{-1}(0)=0$, $f_s^{-1}(1)=-1$, $f_s^{-1}(4)=2$.

Пример 5. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=x^2$ со домен $D_f=\mathbf{R}$ и ранг $E_f=\mathbf{R}^+$. Таа нема инверзна функција бидејќи $f(-2)=4=f(2)$, односно не е исполнет условот (2). Но, ако ставиме $S=[0,\infty)$, тогаш рестрикцијата $f_s(x)=x^2$ од f на S има инверзија $f_{s(x)}^{-1}=\sqrt{x}$, при што доменот на f_s^{-1} е еднаков на рангот на f, односно $S=[0,\infty)$. Исто така рестрикцијата $f_T(x)=x^2$ на f на $T=(-\infty,0]$ има инверзија $f_T^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ со домен еднаков на рангот на f. Ако $V=\{-3\}\cup[0,3)\cup(3,\infty)$ тогаш рестрикцијата $f_V(x)=x^2$ на f на V има инверзна функција $f_V^{-1}(x)=\sqrt{x}$, за $x\in[0,9)\cup(9,\infty)$ и $f_V^{-1}(9)=-3$.

За функцијата g велиме дека е *обопштена инверзија* на f ако и само ако $D_g=E_f$, $E_g-S\subseteq D_f$, односно ако и само ако доменот на g е еднаков на рангот на f, во услови кога рангот S на g е подмножество на доменот од f и $g=f_S^{-1}$ како инверзија на рестрикцијата f_S од f на S.

Да претпоставиме дека f има инверзија f^{-1} и обопштена инверзија g. според тоа $g=f_S^{-1}$ за некое $S\subseteq D_f$. Навистина, ако $a\in D_f\setminus S$, тогаш $f(a)=b\in E_f=D_g$, па значи постои $c\in S$ така што $b=f_S(c)=f(c)$, што не е можно според (2). Според тоа точна е следнава теорема:

Теорема 4. Ако f има инверзија f^{-1}, тогаш f^{-1} е единствена обопштена инверзија на f. ■

Теорема 5. Секоја функција f има обопштена инверзија. Ако f нема инверзија тогаш постојат барем две различни обопштени инверзии на f.

Доказ: Нека $b\in E_f$ е елемент од рангот на f. Постои барем еден $a\in D_f$, таков што $f(a)=b$. Избирајќи за секој $b\in E_f$ точно по еден $a\in D_f$ со горното својство и означувајќи го со S подмножеството на D_f што ги содржи сите така избрани елементи, добиваме дека f_S има инверзија f_S^{-1} и дека $g=f_S^{-1}$ е обопштена инверзија на f.

Да претпоставиме дека f нема инверзна функција, односно дека не е исполнет условот (2). Според тоа постојат елементи a_1, $a_2\in D_f$ такви што $f(a_1)=f(a_2)=b$, но $a_1\neq a_2$. Да одбереме за секој $d\in E_f, d\neq b$ точно еден

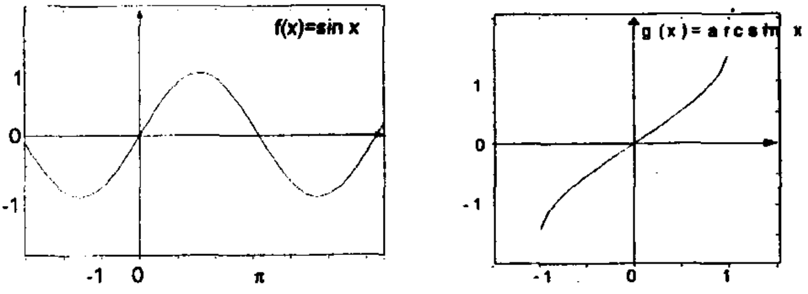
$c \in D_f$, таков што $f(c)=d$, а множеството од сите така одбрани елементи заедно со a_1 да го означиме со S_1 а S_2 нека биде подмножество од D_f добиено како и S_1 со тоа што наместо a_1, го земеме a_2. Тогаш f_{S_1} и f_{S_2} се различни функции, бидејќи $a_1 \neq a_2$, а $g_1 = f_{S_1}^{-1}$ и $g_2 = f_{S_1}^{-1}$ се различни обопштени инверзии на f. ■

Заклучуваме дека, ако функцијата f не го исполнува условот (1) тогаш f има повеќе обопштени функции.

Пример 6. Да се вратиме на функцијата $f(x)=x^2$. Таа има бесконечно многу обопштени инверзии, од кои само две се непрекинати (нивниот график може да се нацрта без да се крене моливот од хартијата).

Обопштената инверзија $g(x)=\sqrt{x}$ (≥ 0), $x \geq 0$, ќе ја викаме главна обопштена инверзија на $f(x)=x^2$. Ќе ја искористиме оваа можност за да укажеме на грешките кои се прават при решавање на ирационалните равенки. При нивно решавање работиме со главната обопштена инверзија $f(x)=\sqrt{x}$. Така, равенката $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-2}$ нема решение бидејќи левата страна е негативна, додека десната страна е позитивна. Понатаму, равенката $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{1/((1-x)(1+x))}$ нема решение бидејќи домените на функциите $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$, $f_2(x)=\sqrt{x^2-1}$ и $f_3(x)=\sqrt{1/((1-x)(1+x))}$ се дисјунктни.

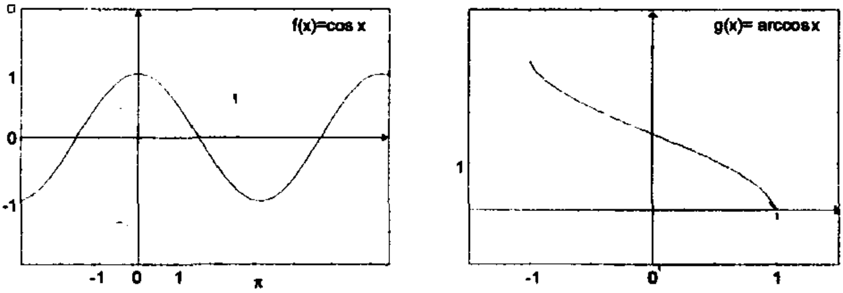
Пример 7. да ја разгледаме функцијата $f(x)=\sin x$ со домен $D_f=\mathbf{R}$. Оваа функција нема инверзна функција но има бесконечно многу обопштени инверзии. Една нејзина обопштена инверзија е инверзната функција на рестрикцијата на функцијата на сегментот $[-\pi/2, \pi/2]$, која ќе ја означуваме со $g(x)=\arcsin x$ (се чита „аркус синус од икс“) и ќе ја викаме главна обопштена инверзија на функцијата $f(x)=\sin x$ (сл. 1).



Сл. 1

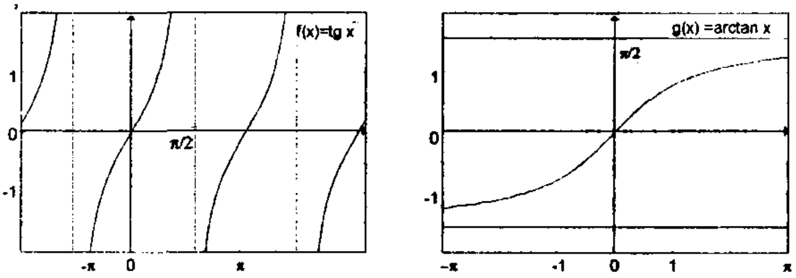
Аналогно на претходната функција $f(x)=\cos x$ со домен $D_f=\mathbf{R}$ има инверзија, но има бесконечно многу обопштени инверзии. Една нејзина обопштена инверзија е инверзната функција на рестрикцијата на сегментот

$[0, \pi]$, која ќе ја означуваме со $g(x) = \arccos x$ и ќе ја викаме главна обопштена инверзија на функцијата $f(x) - \cos x$ (сл. 2).



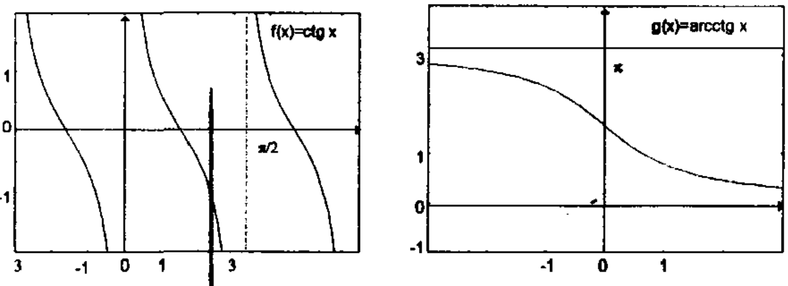
Сл. 2

Функцијата $f(x) = tgx$ со домен $D_f = \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2 | k \in \mathbf{Z}\}$ нема инверзна функција но има бесконечно многу инверзии. Една нејзина обопштена инверзија е инверзната функција на рестрикцијата на интервалот $(-\pi/2, \pi/2)$, која ќе ја означиме со $g(x) = \mathrm{arctg}x$ (се чита аркус тангенс од икс) и ќе ја наречеме главна обопштена инверзија на функцијата $f(x) = \mathrm{tg}x$.



Сл. 3

Функцијата $f(x) = \mathrm{ctg}x$ со домен $D_f = \mathbf{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$ нема инверзна, но има бесконечно многу обопштени инверзии. Една нејзина обопштена инверзија е инверзната функција на рестрикцијата на интервалот $(0, \pi)$, која ќе ја означиме со $g(x) = \mathrm{arcctg}x$ (се чита аркус котангенс од икс) и ќе ја наречеме главна обопштена инверзија на функцијата $f(x) = \mathrm{ctg}x$.



Сл. 4

Прашања и задачи за самостојна работа

1. Да се провери дали функцијата f со домен $D_f = \mathbf{R}$ има инверзна функција и во потврден случај да се определи f^{-1} ако:

а) $f(x) = 2x - 4$, б) $f(x) = c \cdot 10^{kx}$.

2. Да се смени доменот $D_f = \mathbf{R}$ на функцијата $f(x) = x^2 + 8x$ така што добиената функција да има инверзна функција. Да се најдат нејзините непрекинати обопштени инверзии.

3. Ако функцијата $f : U \to \mathbf{R}$ има инверзна функција, дали рестрикцијата f_V на произволно $V \subseteq U$ има инверзна функција?

4. Дали постојат други функции освен функцијата $f(x) = x$, кои се инверзни самите на себе. Ако постојат, наведи неколку од нив. Што може да се каже за графикот на овие функции?

Упатство: Графикот на инверзната функција е симетричен на графикот на функцијата во однос на правата $y = x$.

5. Да се определи врската помеѓу реалните константи a, b, c и d така што функцијата $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$ да биде инверзна самата на себеси.

6. Композицијата на функциите f и g постои во случај кога рангот на f се содржи во доменот на g и се дефинира на следниот начин:

$$g \cdot f(x) = g(f(x), \qquad \text{за секое} \qquad x \in D_f$$

Да се покаже дека ако f и g имаат инверзии, тогаш $g \cdot f$ има инверзија и дека $(g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$.

7. Нека функцијата со домен $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ е определена со $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 0$, $f(4) = 1$, $f(5) = 0$, $f(6) = 3$, $f(7) = 6$, $f(8) = 6$, $f(9) = 5$. Да се определат сите обопштени инверзии на f.

8. Да се определи функцијата $g(x)$ што е обопштена инверзија на функцијата $f(x) = x^2$, ако се знае дека:

а) $g(x)$ е растечка во $[0, \infty)$;

б) $g(x)$ е опаѓачка во $[0, \infty)$;

в) $g(x)$ е растечка во $[0, 1)$ и опаѓачка во $[0, \infty)$;

Дали постои непрекината функција што го исполнува условот во в)?

9. Да се определат сите реални решенија на равенката

$$\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x$$

каде што p е реален параметар.

Користена литература

1. Б. Трпеноски, Н. Целакоски, Ѓ Чупона: *Виша математика*, Скопје, 1991.
2. Н. Шолстер: *Алгебра и елементарние функции*, Москва, 1964.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија