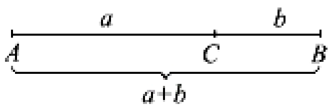
Jens Carstensen, Danska
Alija Muminagić, Danska

СУПЕРЗЛАТЕН ПРАВОАГОЛНИК

Во оваа статија ќе го разгледаме таканаречениот суперзлатен правоаголник и некои негови својства. На почетокот ќе се потсетиме за златниот пресек и златниот правоаголник.

Дефиниција 1. Ако отсечката AB е поделена со точката C (цртеж десно) така што $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$, тогаш ќе велиме дека точката C ја дели отсечката AB во *златен пресек*.



Со други зборови, ако некоја точка ја дели отсечката така што односот на должината на целата отсечка спрема поголемиот дел е еднаков на односот напоголемиот дел спрема помалиот дел, тогаш велиме дека точката ја дели отсечката во златен пресек.

Тврдење 1. Точката C ја дели отсечката AB во златен пресек ако и само ако $\frac{a}{b}=\phi$, каде $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Доказ. Според дефиниција 1 точката C ја дели отсечката AB во златен пресек ако и само ако $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$, т.е. ако и само ако $1+\frac{1}{\phi}=\phi$, односно $\phi^2-\phi-1=0$. Но, $\phi>0$, па значи дека C ја дели AB ако и само ако $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ■

Во натамошните разгледувања ќе претпоставиме дека на читателот му е позната конструкцијата на поделба на отсечка во златен пресек.

Дефиниција 2. Правоаголникот кај кого односот на должините на подолгата и пократката страна е еднаков на ϕ го нарекуваме *златен правоаголник*.

Задача. Да се конструира златен правоаголник, ако е позната должината на неговата поголема страна.

Решение. *Анализа.* Со d и k соодветно да ги означиме должините на поголемата и помалата страна на златниот правоаголник. Имаме

$$\frac{d}{k}=\phi \Leftrightarrow k=\frac{1}{\phi}d \Leftrightarrow k=(\phi-1)d \Leftrightarrow k=(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1)d \Leftrightarrow k=\frac{\sqrt{5}}{2}d-\frac{1}{2}d .$$

Конструкција. 1. Конструираме квадрат $ABFE$ со должина на страна еднаква на d.

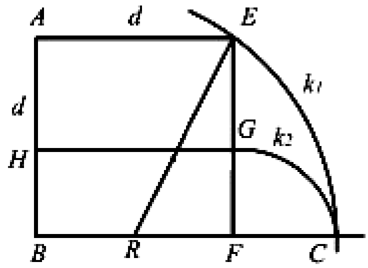
2. Ја определуваме средината R на страната BF (цртеж десно).

3. Конструираме кружен лак $k_1(R, \overline{RE})$ и пресечната точка на овој кружен лак со правата BF да ја означиме со C .

4. Конструираме кружен лак $k_2(F, \overline{FC})$ и нека $k_2 \cap FE = \{G\}$.

5. Во точката G повлекуваме права паралелна со правата BF и нека пресекот на таа права со страната AB е точката H .

6. Правоаголникот $BFGH$ е златен правоаголник со должина на поголемата страна еднаква на d .



Доказ. Од конструкцијата следува дека $\overline{RF} = \frac{1}{2}d$ и $\overline{FE} = d$. Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle RFE$ добиваме $\overline{RF} = \sqrt{(\frac{1}{2}d)^2 + d^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}d$. Понатаму, од $\overline{RC} = \overline{RE}$ и $\overline{FG} = \overline{FC} = \overline{RC} - \overline{RF} = \overline{RE} - \overline{RF} = \frac{\sqrt{5}}{2}d - \frac{1}{2}d$ и од анализата следува дека FG е помалата страна на златниот правоаголник чија поголема страна има должина d . ■

Конструкцијата на златниот правоаголник кога е позната

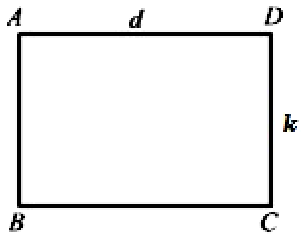
а) должината на помалата страна,

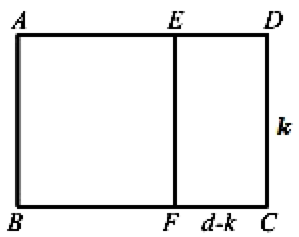
б) збирот на должините на поголемата и помалата страна,

му ја препуштаме на читателот за вежба,

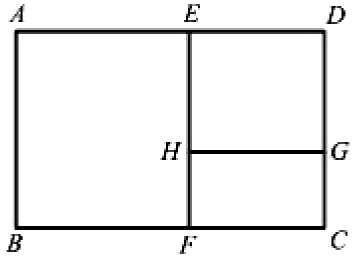
Тврдење 2. Ако од златен правоаголник отсечеме квадрат кој има заедничко теме со златниот правоаголник и има најголема можна плоштина, тогаш преостанатиот правоаголник е златен правоаголник.

Доказ. Нека $ABCD$ е златен правоаголник и нека $\overline{AB} = d$ и $\overline{CD} = k$ (цртеж десно). Лесно се гледа дека квадратот кој има заедничко теме со правоаголникот $ABCD$ и има најголема можна плоштина е квадрат со должина на страна еднаква на k . Нека овој квадрат со златниот правоаголник има заенички темиња A и B (цртеж десно). Треба да докажеме дека четириаголникот $EFCD$ е златен правоаголник, т.е. дека $\frac{k}{d-k} = \phi$. Од доказот на тврдењето 1 следува дека





$$\frac{d-k}{k}=\frac{d}{k}-1=\phi-1=\frac{1}{\phi}\text{ , т.е. }\frac{k}{d-k}=\phi\text{ . }\blacksquare$$

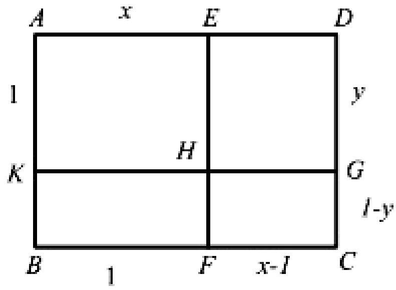


Да го разгледаме правоаголникот $ABCD$ во кој четириаголникот $ABFE$ е квадрат, а четириаголникот $EFCD$ со правата HG која е паралелна на страната BC е поделен на два правоаголници така што правоаголниците $ABCD, EDGH$ и $HFCG$ се слични. Правоаголникот $ABCD$ го нарекуваме *суперзлатен правоаголник*.

Да се потсетиме на принзакот за сличност на многуаголници.

Тврдење 3. Два многуаголника се слични ако и само ако соодветните агли им се еднакви и соодветните страни им се пропорционални.

Доказ. Види во [4]. ■



Нека $ABCD$ е суперзлатен правоаголник (цртеж десно). Нека означиме $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=x$ и $\overline{DG}=y$. Тогаш $\overline{FC}=x-1$ и $\overline{CG}=1-y$. Од $ABCD \sim HFCG$, заради тврдењето 3 следува

$$\frac{x}{1}=\frac{x-1}{1-y} \Leftrightarrow x-xy=x-1 \Leftrightarrow$$

$$xy=1. \qquad (1)$$

Нека продолжението на страната GH преку точката H ја сече страната AB во точката K . Важи $P_{BFHK}=1\cdot(1-y)$ и $P_{EDGH}=(x-1)y$, па затоа од (1) следува

$$P_{BFHK}=1-y=xy-y=(1-x)y=P_{EDGH}\,.$$

Сега од $ABCD \sim EDGH$ следува $\frac{x}{1}=\frac{y}{x-1}$, па затоа

$$y=x^2-x. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $x(x^2-x)=xy=1$, односно

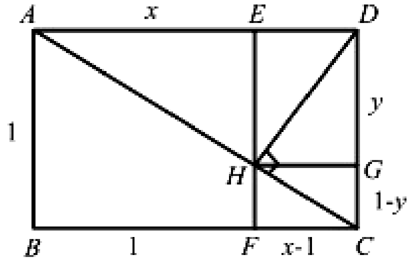
$$x^3-x^2-1=0. \qquad (3)$$

Сега, ќе докажеме дека при наведените ознаки за суперзлатниот правоаголник $ABCD$ точни се следниве тврдења:

1) Дијагоналата AC минува низ точката H .
2) $DH \perp AC$,

3) $\overline{GC} = y^3 = \overline{DG}^3$.

4) $\overline{AC} = x\sqrt{x},\ \overline{HC} = y\sqrt{y},\ \overline{AH} = \sqrt{x}$



Доказ. 1) Од (1) следува $x-1 = x - xy$ т.е. $\frac{1}{x} = \frac{1-y}{x-1}$ (цртеж десно). Затоа за правоаголните триаголници ABC и HFC важи $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{FC}}$, т.е. тие се слични. Сега од сличноста следува дека $\measuredangle BCA = \measuredangle BCH$, т.е. точката H лежи на дијагоналата AC.

2) Согласно Евклидовите теореми доволно е да се докаже дека $\overline{HG}^2 = \overline{DG} \cdot \overline{GC}$. Имаме

$$\begin{aligned}
\overline{HG}^2 = \overline{DG} \cdot \overline{GC} &\Leftrightarrow (x-1)^2 = y(1-y) \\
&\overset{(2)}{\Leftrightarrow} (x-1)^2 = (x^2 - x)[1-(x^2-x)] \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 = x(x-1)(1-x^2+x) \\
&\Leftrightarrow x-1 = x - x^3 + x^2 \\
&\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 1 = 0,
\end{aligned}$$

што е точно заради (3).

3) Од (1) следува $x = \frac{1}{y}, y = \frac{1}{x}$, па затоа од (2) следува дека

$$y = x^2 - x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y^3 = 1 - y \quad \Leftrightarrow \quad \overline{GC} = y^3 = \overline{DG}^3.$$

4) Од (3) следува $x^3 = x^2 + 1$. Сега, од Питагоровата теорема применета на триаголникот ABC добиваме $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 1 + x^2 = x^3$, па затоа важи $\overline{AC} = x\sqrt{x}$. Понатаму, од Питагоровата теорема применета на триаголникот HGC следува $\overline{HC}^2 = (x-1)^2 + (1-y)^2$. Од друга страна, бидејќи $HFGC \sim DEHF$ добиваме

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{1-y} = \frac{y}{x-1} &\Leftrightarrow (x-1)^2 = y(1-y) \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 + (1-y)^2 = y(1-y) + (1-y)^2 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 + (1-y)^2 = 1 - y = y^3 \\
&\Leftrightarrow \overline{HC} = y\sqrt{y}.
\end{aligned}$$

Важи $\overline{AH} = \overline{AC} - \overline{HC}$, па затоа $\overline{AH} = x\sqrt{x} - y\sqrt{y}$. Од друга страна, бидејќи $HFGC \sim DEHF$ добиваме

$$\frac{x-1}{1-y} = \frac{y}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = y(1-y)$$

$$\overset{xy=1}{\Leftrightarrow} \quad xy(x-1)^2 = y(1-y)$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x-1)^2 = 1-y$$

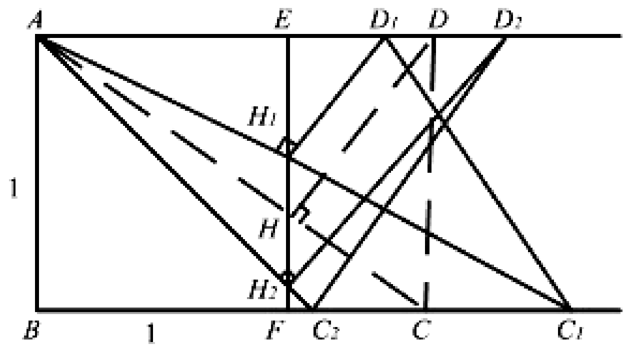
$$\overset{y^3=1-y}{\Leftrightarrow} \quad x(x-1)^2 = y^3$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)\sqrt{x} = y\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AH} = \sqrt{x}.$$

Во претходните разгледувања докажавме повеќе својства на суерзлатниот правоаголник. За крај, користејќи ги овие својства обидете се да покажете дека конструкцијата дадена на долниот цртеж не е изводлива.



Литература

1. Tony Crilly: A supergolden rectangle, Mathematical gazette, 1994, s. 32v
2. J. Carstensen, A. Muminagić: Et superqyldnet rektangel. Matematik Maqasinet, 2015, s. 327v
3. Jesper Frandsen: De(t) qyldne snit, Systime, 1999, Arhus C, Dannmark
4. Dominik Palman: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
5. Pavković-Veljan: Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ