LII олимпијада

1. За множеството $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ кое е составено од четири различни природни броеви со s_A да го означиме збирот $a_1+a_2+a_3+a_4$. Нека n_A е бројот на паровите $(i,j), 1\le i<j\le 4$ за кои a_i+a_j е делител на s_A. Определи ги сите такви множества A за кои n_A ја достигнува најголемата можна вредност.

Решение. *Прв начин*. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a_1<a_2<a_3<a_4$. Бидејќи $a_3+a_4\nmid s_A$ (во спротивно важи $a_3+a_4\mid a_1+a_2<a_3+a_4$) и слично $a_2+a_4\nmid s_A$, заклучуваме дека $n_A\le 4$.

Нека претпоставиме дека $n_A=4$. Тогаш $a_1+a_4, a_2+a_3\mid s_A$, па затоа важи $a_1+a_4\mid a_2+a_3\mid a_1+a_4$, од каде што следува $a_1+a_4=a_2+a_3=\frac{s_A}{2}$. Понатаму,

$$\frac{s_A}{2}>a_1+a_3>\frac{a_2+a_3}{2}=\frac{s_A}{4},$$

па мора да е $a_1+a_3=\frac{s_A}{3}$. Сега добиваме

$$a_3=\frac{s_A}{3}-a_1,\;\; a_4=\frac{s_A}{2}-a_1 \text{ и } a_2=\frac{s_A}{6}+a_1,$$

од каде

$$\frac{s_A}{6}<a_1+a_2<a_1+a_3=\frac{s_A}{3},$$

па затоа $a_1+a_2=\frac{s_A}{6}+2a_1\in\{\frac{s_A}{4},\frac{s_A}{5}\}$.

Ако $a_1+a_2=\frac{s_A}{4}$, добиваме $a_1=\frac{s_A}{24}$ и $a_1:a_2:a_3:a_4=1:5:7:11$, а ако $a_1+a_2=\frac{s_A}{5}$ добиваме $a_1=\frac{s_A}{60}$ и $a_1:a_2:a_3:a_4=1:11:19:29$. Според тоа, максималната вредност $n_A=4$ се достигнува за множества од видовите $\{t,5t,7t,11t\}$ и $\{t,11t,19t,29t\}$, $t\in\mathbb{N}$.

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека важи $a_1<a_2<a_3<a_4$. Бидејќи $a_3+a_4\nmid s_A$ (во спротивно важи $a_3+a_4\mid a_1+a_2<a_3+a_4$) и слично $a_2+a_4\nmid s_A$, заклучуваме дека $n_A\le 4$ и можните поарови кои се делители на s_A се $a_1+a_2, a_1+a_3, a_1+a_4$ и a_2+a_3. Имаме

$$\begin{cases}(a_1+a_2)p=a_3+a_4,\\(a_1+a_3)q=a_2+a_4,\\(a_1+a_4)r=a_2+a_3,\\(a_2+a_3)s=a_1+a_4,\end{cases}$$

каде p,q,r,s се прриродни роеви. Ако $r\ge 2$ или $s\ge 2$, со собирање на третата и четвртата равенка добиваме

$$(a_1+a_4)(r-1)+(a_2+a_3)(s-1)=0,$$

што е противречност. Според тоа, $r=s=1$ и системот го добива видот

$$\begin{cases}(a_1+a_2)p=a_3+a_4,\\(a_1+a_3)q=a_2+a_4,\\a_1+a_4=a_2+a_3,\end{cases}$$

при што очигледно важи $p\ge 2$ и $q\ge 2$. Ако ги собереме втората и третата равенка добиваме $(a_1+a_3)q=2a_2+a_3-a_1$. Ако $q\ge 3$, тогаш

$$(a_1+a_3)q\ge 3(a_1+a_3)>3a_3>2a_2+a_3>2a_2+a_3-a_1,$$

што е противречност. Според тоа, $q=2$. Сега од равенствата

$$a_1+a_4=a_2+a_3 \text{ и } 2(a_1+a_3)=a_2+a_4,$$

лесно наоѓаме $a_3=2a_2-3a_1$ и $a_3=3a_2-4a_1$. Заменуваме во првата равенка и добиваме

$$(a_1+a_2)p=5a_2-7a_1.$$

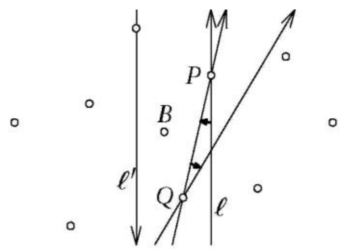
Ако $p\ge 5$, тогаш $(a_1+a_2)p\ge 5(a_1+a_2)>5a_2-7a_1$, што е противречност. За $p=2$ системот нема решение, а за $p=3$ и $p=4$ соодветно наоѓаме

$$\{t,5t,7t,11t\} \text{ и } \{t,11t,19t,29t\},\ t\in\mathbb{N}.$$

2. Нека $\mathbf{S}$ е конечно множество точки во рамнината кое содржи најмалку две точки. Множеството $\mathbf{S}$ не содржи три колинеарни точки. Ветерница се нарекува следнава постапка. На почетокот се избира права l која содржи точно една точка $P\in\mathbf{S}$. Правата l се ротира во насока на движењето на стрелките на часовникот околу центарот P до моментот во кој по прв пат содржи некоја друга точка Q од $\mathbf{S}$. Од тој момент таа точка Q станува нов центар, а правата продолжува да се ротира околу Q во насока на движењето на стрелките на часовникот до првиот момент во кој повторно содржи некоја друга точка од множеството $\mathbf{S}$. Оваа постапка бесконечно се повторува.

Докажи дека може да се избере некоја точка P од $\mathbf{S}$ и некоја права l која ја содржи P така што во добиената ветерница секоја точка на множеството $\mathbf{S}$ станува центар бесконечно многу пати.

Решение. *Прв начин*. Правата l во почетната позиција ја ориентираме произволно. Тогаш l во секој момент ја дели рамнината на лева и десна полурамнина. Во текот на работата на ветерницата, при премин на центарот од точката P во точката Q , точката P преминува од l во левата полурамнина, додека Q преминува од левата полурамнина на l. На овој начин броевите n_1 и n_2 на точките соодветно лево и десно од правата l остануваат исти во текот на целиот процес (со исклучок кога l содржи две точки).



Да земеме произволна точка $A \in \mathbb{S}$ и права l низ A таква што $|n_1 - n_2| \leq 1$ и да ја пуштиме ветерницата во погон. Нека претпоставиме дека постои точка B која ќе се најде на l само конечен број пати. Тоа значи дека почнувајќи од некој момент, B никогаш нема да биде на l, т.е. секогаш ќе се наоѓа од иста страна, да кажеме левата страна од правата l. Кога l ќе се заврти за 180°, ќе се најде во положба на некоја права l' паралелна со l, но со спротивна ориентација. Точката B е меѓу правите l и l', што значи дека лево од l се наоѓаат сите точки кои се десно од l, плус точката B и една точка која во тој момент лежи на l. Затоа $n_1 - n_2 \geq 2$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека ветерницата минува низ секоја точка бесконечно многу пати.

Втор начин. Правата l ја дели рамнината на две полурамнини. Едната од нив да ја наречеме сина, а другата црвена. Да забележиме дека при промена на центарот на вртење новиот и стариот центар преминуваат од една полурамнина во друга. Според тоа, во секој момент (освен кога правата минува низ две точки) бројот на точките во синиот дел е непроменет и бројот на точките во црвениот дел е непроменет.

Нека $|\mathbb{S}| = 2n+1$. Ќе го користиме добро познатиот факт, дека низ секоја точка на $\mathbb{S}$ постои права која ја дели рамнината на две полурамнини со еднаков број точки. Да избереме точка P и права низ P, која ги разделува точките од $\mathbb{S}$ на два еднакви дела. Ќе докажеме дека при ротација за 180° правата минува низ секоја точка од $\mathbb{S}$.

Да разгледаме произволна точка Q од $\mathbb{S}$ и права l која ги разделува точките од $\mathbb{S}$. Точката Q е единствена точка од $\mathbb{S}$, за која права паралелна со l ги разделува точките на еднакви делови. Тоа значи дека кога правата на мелницата стане паралелна со l, таа всушност е правата l и затоа мелницата минува низ Q.

Нека $|\mathbb{S}| = 2n$. Повторно ќе го искористиме познатиот факт дека за секоја точка постои права која минува низ таа точка и за која има $n-1$ точка во синиот дел и n точки во црвениот дел.

Да избереме една таква права за почетна состојба на мелницата. Ќе докажеме дека при завртување за 360° правата минува низ секоја точка од $\mathbb{S}$.

Да разгледаме произволна точка Q од $\mathbb{S}$ и права l за која имаме $n-1$ точка во синиот дел и n точки во црвениот дел од рамнината. Кога правата на мелницата стане паралелна со l со истите сина и црвена полурамнина, таа мора да биде точно правата l и затоа мелницата минува низ точката Q. Конечно, од претходните разгледувања следува тврдењето на задачата.

3. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција за која важи

$$f(x+y)\le yf(x)+f(f(x)) \qquad (1)$$

за секои реални броеви x и y. Докажи дека $f(x)=0$ за секој $x\le 0$.

Решение. *Прв начин*. Нека претпоставиме дека $f(a)>0$ за некој a. Бидејќи десната страна на неравенството

$$f(y+a)\le yf(a)+f(f(a))$$

е линеарна по y, постои b таков што $f(x)<0$ за секој $x<b$, а исто така постои и c таков што $f(x)<b$ (и $f(f(x))<0$) за $x<c$. Но, за $x<\min\{a,b,c\}$ важи

$$f(a)\le(a-x)f(x)+f(f(x))<0,$$

што е противречност. Според тоа, $f(x)\le 0$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

За $d=f(0)$ имаме $f(y)\le dy+f(d)$, а оттука

$$f(d)\le(d-x)f(x)+f(f(x))\le(d-x)f(x)+df(x)+f(d),$$

т.е. $0\le(2d-x)f(x)$. За $x<2d$ ова значи $f(x)\ge 0$, односно $f(x)=0$.

Да избереме e таков што $f(e)=0$. Од (1), за $(x,y)=(e,0)$ добиваме

$$0=f(e)\le f(f(e))=f(0),$$

па затоа $f(0)=0$. Сега,

$$0=f(x-x)\le -xf(x)+f(f(x)),\text{ т.е. } xf(x)\le f(f(x))\le 0.$$

Од последното неравенство следува дека за $x<0$ важи, $f(x)\ge 0$, што повлекува $f(x)=0$, со што доказот е завршен.

Втор начин. Ако во (1) замениме $(x,y)=(a,f(b)-a)$, добиваме

$$f(f(b))-f(f(a))\le f(a)f(b)-af(a).$$

Со собирање на аналогната релација при замена $(x,y)=(b,f(a)-b)$ добиваме:

$$af(a)+bf(b)\le 2f(a)f(b),\text{ за секои } a,b\in\mathbb{R}.$$

Сега, од последното неравенство за $b=2f(a)$ добиваме $af(a)\le 0$, па затоа $f(a)\ge 0$ за $a<0$.

Ако $f(c)>0$ за некој c, тогаш $f(y+c)\le yf(c)+f(f(c))<0$ за $y<\frac{f(f(c))}{f(c)}$, што не е можно. Според тоа, $f(x)\le 0$ за секој x. Сега, ако земеме предвид дека $f(x)\ge 0$ за $x<0$, добиваме дека $f(x)=0$ за $x<0$. Конечно, од (1) следува дека за $x<y=0$ важи $0=f(x)\le f(f(x))=f(0)\le 0$, т.е. $f(x)=0$.

Трет начин. Да означиме $f(0)=a$ и $f(a)=f(f(0))=b$. Ќе докажеме дека $a=b=0$. Ако во (1) ставиме $x=0$ добиваме

$$f(y)\le ay+b \text{, за секој } y\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Ако во (2) ставиме $y=f(x)$, добиваме $f(f(x))\le af(x)+b$, па затоа од (1) следува $f(x+y)\le yf(x)+f(f(x))\le yf(x)+af(x)+b$, т.е.

$$f(x+y)\le (y+a)f(x)+b \text{, за секои } x,y\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Во (3) ставаме $y=-a$ и добиваме $f(t)\le b$, за секој $t\in\mathbb{R}$. За $y=0$ и $x=a$ од (3) следува $ab\ge 0$. Сега, ако во (3) ставиме $y=-x$ добиваме

$$a\le (a-x)f(x)+b \text{, за секој } x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Од (4) за $x<a$ имаме $a\le (a-x)b+b$ и затоа $b\ge 0$ (во спротивно добиваме противречност кога $x\to-\infty$). Повторно од (4) и од (2) за $x<a$ добиваме $a\le (a-x)(ax+b)+b$, па затоа $a\le 0$ (во спротивно добивамепротивречност кога $x\to-\infty$).

Сега од $ab\ge 0$, $b\ge 0$ и $a\le 0$ следува дека барем еден од броевите a и b е еднаков на 0. Нека $b=0$. Тогаш за $x=a$ и $y=0$ од (1) следува

$$0=f(a)\le f(f(a))=f(0)=a,$$

па како $a\le 0$ добиваме $a=0$. Ако $a=0$, тогаш $b=f(a)=f(0)=0$.

Сега, бидејќи $a=b=0$, од (2) следува $f(x)\le 0$ за секој $x\in\mathbb{R}$, а од (3) за $y=-x$ добиваме $0=f(0)\le -xf(x)$, од каде што следува дека $f(x)\ge 0$ за $x\le 0$. Конечно, $f(x)=0$ за $x\le 0$.

4. Нека n е природен број. Дадена е вага и n тегови со маси $2^0,2^1,...,2^{n-1}$. Сите n тегови се ставаат еден по друг на тасовите на вагата, односно во секој од $n-$те чекори се избира еден од теговите, кој не се наоѓа на тасовите, и се става или на левиот или на десниот тас. Притоа теговите се ставаат така што во ниту еден момент десниот тас не е потежок од левиот. Определи го бројот на начините на кои оваа постапка може да се реализира.

Решение. *Прв начин*. Нека f_n е бројот на начините на поставувањата на n тегови со опишаната постапка. Овие поставувања ќе ги наречеме *добри*. Секое вакво поставување му соодветствува на изразот $x_1+x_2+...+x_n$ во кој $\{|x_1|,|x_2|,...,|x_n|\}=\{2^0,2^1,...,2^{n-1}\}$ и кој задоволува $x_1+x_2+...+x_k\ge 0$, за $k=1,2,...,n$.

За распоредот на елементите и знакот на собирокот ± 1 има $2n$ можности, при што за $x_1=-1$ нема добри поставувања. Во секој друг случај, вредноста на изразот $x_1+x_2+...+x_i$ е различна од нула за секои i, па затоа со изоставување на собирокот ± 1 и делење со 2 се добива добро поставување за $n-1$ тегови, а такви има f_{n-1}. Според тоа, $f_n = (2n-1) f_{n-1}$, што заедно со почетниот услов $f_1 = 1$ дава $f_n = (2n-1)!!$.

Втор начин. Бројот на добрите поставувања на n тегови да го означиме со a_n. Нека во првиот чекор се поставува тегот 2^i. Теговите полесни од него потоа може да се постават на било кој тас (бидејќи $2^0 + ... + 2^{i-1} < 2^i$). Чекорите во кои овие тегови може да се постават може да ги избереме на $\binom{n-1}{i}$ начини, нивниот редослед на $i!$ начини, а тасовите на 2^i начини. Од друга страна, во преостанатите потези потешките тегови може да се постават на a_{n-i-1} начини, бидејќи полесните тегови не влијаат на исправноста на нивното поставување. Според тоа,

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i i! \binom{n-1}{i} a_{n-i-1}, \quad a_0 = 1. \tag{1}$$

Ако означиме $b_n = \frac{a_n}{2^n n!}$, рекурентната релација го добива обликот

$$2nb_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i ,$$

па имаме

$$2nb_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i = b_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i = b_{n-1} + 2(n-1)b_{n-1} = (2n-1)b_{n-1},$$

т.е. $b_n = \frac{2n-1}{2n} b_{n-1}$, со почетен услов $b_0 = 1$. Според тоа, $b_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, па затоа

$$a_n = 2^n n! b_n = 2^n n! \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2n) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = (2n)! \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = (2n-1)!!.$$

Забелешка. Наоѓањето на a_n од (1) може да се направи и на следниов начин. Од $(k+1) \cdot \binom{n}{k+1} = n\binom{n-1}{k}$ со замена во (1) добиваме

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} 2^i i! \binom{n}{i} a_{n-i} = a_n + \sum_{i=1}^{n} 2^i i! \binom{n}{i} a_{n-i} \\ &= a_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} (k+1)! \binom{n}{k+1} a_{n-k-1} \\ &= a_n + 2n \sum_{k=0}^{n-1} 2^k k! \binom{n-1}{k} a_{n-k-1} \\ &= a_n + 2na_n = (2n+1)a_n. \end{aligned}$$

Сега, ако се земе предвид почетниот услов $a_0 = 1$ добиваме

$$a_n = (2n-1)a_{n-1} = (2n-1)(2n-3)a_{n-2} = ... = (2n-1)!!.$$

Трет начин. Нека f_n е бројот на начините на поставувањата на n тегови со опишаната постапка. Овие поставувања ќе ги наречеме *добри*.

Да разгледаме добро поставување на теговите $2^0, 2^1, ..., 2^{n-1}$. Да ја разгледаме истата низа на чекори без чекорот во кој ја поставуваме тежината 1. Бидејќи

$$2^k = 2^{k-1} + 2^{k-2} + ... + 2^1 + 2 > 2^{k-1} + 2^{k-2} + ... + 2^1 + 1$$

оваа низа од чекори е добра за теговите $2^1, 2^2, ..., 2^{n-1}$. Бидејќи бројот на добрите низи за $2^1, 2^2, ..., 2^{n-1}$ е еднаков на бројот на добрите низи за $2^0, 2^1, ...,$ 2^{n-2}, тој број е еднаков на f_{n-1}.

Сега да ги разгледаме можните поставувања на тегот 1. Ако тој е поставен во првиот чекор,тој треба да се постави на левиот тас. Ако е поставен во некој од следните чекори, тој може да се постави на кој било тас (разликата меѓу било кои два тега е најмалку 2). Според тоа,

$$f(n) = (2n-1) f_{n-1},$$

и бидејќи $f(1) = 1$ имаме

$$f_n = (2n-1) f_{n-1} = (2n-1)(2n-3) f_{n-2} = ... = (2n-1)!!.$$

5. Функцијата $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ е таква што за секои цели броеви m и n разликата $f(m) - f(n)$ е делива со $f(m-n)$. Докажи дека за секои цели броеви m и n такви што $f(m) \le f(n)$, бројот $f(n)$ е делив со бројот $f(m)$.

Решение. *Прв начин*. Нека $x, y \in \mathbb{Z}$ се такви што $f(x) < f(y)$. Од

$$f(x-y) \mid f(y) - f(x) > 0$$

следува дека $f(x-y) < f(y)$. Од друга страна, $f(y)$ е делител на

$$| f(x) - f(x-y) | < f(y),$$

па мора да важи $f(x) = f(x-y)$. Оттука добиваме

$$f(x) = f(x-y) \mid f(y) - f(x),$$

па затоа $f(x) \mid f(y)$.

Втор начин. Нека вредностите на функцијата се $a_1 < a_2 < ...$ и нека $a_1 | ... | a_k$, $f(x) = a_k$, $f(y) = a_{k+1}$. Со замена на $(m,n) = (x,y)$ во условот на задачата добиваме $f(x-y) \mid f(y) - f(x) > 0$, па затоа

$$a_{k+1} = f(y) > f(x-y) = a_j$$

за некој $j \le k$. Со замена $(m,n) = (x, x-y)$ во условот на задачата добиваме

$$a_{k+1} = f(y) \mid f(x) - f(x-y) = a_k - a_j,$$

па како $0 \le a_k - a_j < a_{k+1}$, следува $a_k = a_j$. Според тоа,

$$a_k = f(x) = f(x-y) \mid f(x) - f(y) = a_k - a_{k+1},$$

што значи $a_k \mid a_{k+1}$, од што следува тврдењето на задачата.

Трет начин. Со замена на $(m,n)=((m+1)n,mn)$ во условот на задачата добиваме дека $f(n)\mid f((m+1)n)-f(mn)$, па како $f(n)\mid f(1\cdot n)$ со индукција следува $f(n)\mid f(mn)$ за $m,n\in\mathbb{Z}$. За $a,b\in\mathbb{Z}$, ако $c=\mathrm{NZD}(a,b)$, тогаш за некои $x,y\in\mathbb{Z}$ важи $c=ax+by$. Без ограничување на општоста, нека $f(by)\le f(ax)$. Тогаш $c\mid by$, па затоа $0\le f(by)-f(c)<f(ax)$. Меѓутоа, со замена $(m,n)=(c,by)$ во условот на задачата добиваме $f(ax)\mid f(c)-f(by)$, па затоа $f(by)=f(c)$, од што следува $f(by)=f(c)\mid f(b)\mid f(by)$ (бидејќи $c\mid b\mid by$), па затоа $f(b)=f(c)$ и $f(b)=f(c)\mid f(a)$ (бидејќи $c\mid a$).

Четврт начин. Ќе ги опишеме сите функции со саканото својство. Како и во третиот начин на решавање заклучуваме дека $f(n)\mid f(mn)$ за $m,n\in\mathbb{Z}$. Според тоа, $f(n)\mid f(-n)\mid f(n)$, па затоа $f(n)=f(-n)$. Понатаму, функцијата f е ограничена, бидејќи $f(n)\mid f(0)$ за секој $n\in\mathbb{Z}$. Нека $b_1=\max\limits_{x\in\mathbb{N}} f(x)$ и $a_1=\min\{x\in\mathbb{N}\mid f(x)=b_1\}$. За $m\in\mathbb{N}$ важи $f(a_1)\mid f(ma_1)\le f(a_1)$, што значи $f(ma_1)=b_1$, а исто така $f(a_1)\mid |f(x+a_1)-f(x)|<b_1$, па затоа f е периодична на $\mathbb{N}$ со периода a_1.

Понатаму, нека $b_2=\max\limits_{a_1\nmid x} f(x)$ и $a_2=\min\{x\in\mathbb{N}\mid f(x)=b_2\}$. За $m\in\mathbb{N}$ важи $b_2\mid f(ma_2)$ и уште повеќе $f(ma_2)=b_2$ ако $a_1\nmid ma_2$. Ако $a_2\nmid a_1$, тогаш $a_1<ra_2-q$ за некои $q,r\in\mathbb{N}$, $q<a_2$, па затоа $b_2\le f(ra_2)=f(q)$, што противречи на изборот на a_2. Според тоа, $a_2\mid a_1$ и оттука $b_2\mid b_1$. Како и погоре заклучуваме дека f е периодична на $\mathbb{N}\setminus a_2\mathbb{N}$ со период a_2.

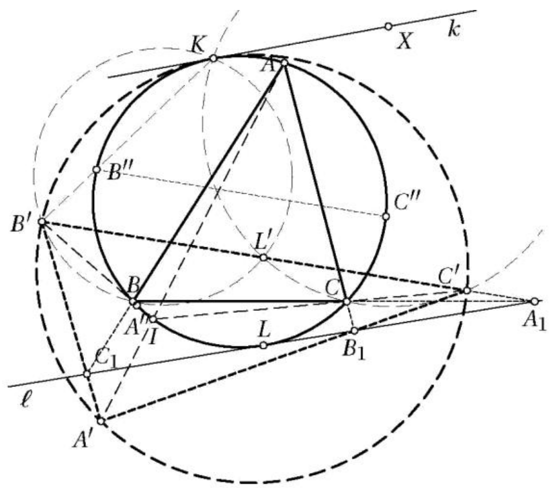
Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека за некои две строго опаѓачки низи природни броеви $\{a_i\}_{i=1}^k$ и $\{b_i\}_{i=1}^k$, такви што $a_k\mid a_{k-1}\mid\ldots\mid a_2\mid a_1$ и $b_k\mid b_{k-1}\mid\ldots\mid b_2\mid b_1$ важи

$$f(x)=b_{i(x)} \text{ каде } i(x) \text{ е најмалиот } i \text{ за кој важи } a_i\mid x,$$

за $x\neq 0$ и $a_1\mid f(0)$.

6. Нека ABC е остроаголен триаголник и Γ е неговата опишана кружница. Нека l е произволна тангента на Γ, а правите l_a,l_b,l_c се симетрични со l во однос на правите BC,CA,AB, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот определен со правите l_a,l_b,l_c ја допира кружницата Γ.

Решение. *Прв начин*. Нека $A'=l_b\cap l_c$, $B'=l_a\cap l_c$ и $C'=l_a\cap l_b$ и нека l ја допира Γ во L и ги сече BC, CA, AB во A_1, B_1, C_1 (ако е на пример $l\parallel BC$, ќе сметаме дека A е бесконечна точка). Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека L е на лакот BC кој не ја содржи точката A, тогаш B_1 и C_1 се на отсечките AC и AB.



Бидејќи AB и AC се надворешни симетрали соодветно на аглите $\measuredangle A'C_1B_1$ и $\measuredangle A'B_1C_1$, заклучуваме дека A е центар на припишаната кружница на $\triangle A'B_1C_1$ наспроти A', па затоа $A'A$ е симетрала на $\measuredangle B'A'C'$. Слично, $B'B$ и $C'C$ се симетрали на $\measuredangle A'B'C'$ и $\measuredangle A'C'B'$, па затоа AA', BB' и CC' се сечат во центарот I на впишаната кружница во $\triangle A'B'C'$. Притоа

$$\measuredangle BIC=\measuredangle B'IC'=90^\circ+\tfrac{1}{2}\measuredangle B'A'C' \text{ и } \measuredangle CAB=\measuredangle B_1AC_1=90^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle B_1A'C_1.$$

Значи, $\measuredangle BIC+\measuredangle CAB=180^\circ$, т.е. I припаѓа на Γ.

Точката L' симетрична на L во однос на BC лежи на правата $B'C'$. Нека кружниците $B'BL'$ и $C'CL'$ се сечат во точката $K\neq L'$. Бидејќи

$$\measuredangle BKC=\measuredangle BKL'+\measuredangle L'KC=\measuredangle BB'L'+\measuredangle L'C'C=180^\circ-\measuredangle CIB,$$

заклучуваме дека точката K е на Γ. Понатаму,

$$\begin{aligned}\measuredangle B'KC'&=\measuredangle B'KL'+\measuredangle L'KC'=\measuredangle IBL'+\measuredangle L'CI=360^\circ-\measuredangle BL'C-\measuredangle CIB\\&=360^\circ-2\measuredangle C'IB'=180^\circ-\measuredangle C'A'B',\end{aligned}$$

што значи дека K припаѓа на $\Gamma'\equiv(A'B'C')$.

Да ги разгледаме тангентата k на Γ во точката K и точка X на k од иста страна на правата KC на која е A. Имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle XKC'&=\measuredangle XKC-\measuredangle C'KC=\measuredangle KBC-\measuredangle C'L'C=\measuredangle KBL'+\measuredangle L'BC-\measuredangle A_1L'C\\&=\measuredangle KB'C'+\measuredangle CBL-\measuredangle CLA_1=\measuredangle KB'C',\end{aligned}$$

што значи дека k ја допира кружницата L', од каде што следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Точките A', B', C', L, L', I ги определуваме како погоре и на ист начин добиваме $AA'\cap BB'\cap CC'=I$. Нека A'', B'', C'' се точки на Γ такви што $LA=AA'', LB=BB'', LC=CC''$. Тогаш (во ориентирани агли)

$$\measuredangle(l, B''C'')=2\measuredangle(l, BC)=\measuredangle(l, l_a)\ ,$$

па затоа $B''C''\parallel l_a$. Аналогно се докажува дека $C''A''\parallel l_b$ и $A''B''\parallel l_c$.
Бидејќи $\measuredangle L'BC=\measuredangle CBL=\measuredangle C''BC$, точката L' припаѓа на BC'' и аналогно $L'\in CB''$. Ја разгледуваме точката $K\neq B''$ во која правата $B'B''$ ја сеча Γ. Од теоремата на Паскал применета на шестаголникот $KB''CIBC''$ следува дека точките $KB''\cap IB=B', B''C\cap BC''=L'$ и $CI\cap C''K$ се колинеарни, од што следува дека $CI\cap C''K=C'$, т.е. $K\in C'C''$. Аналогно $K\in A'A''$, па K е центар на хомотетија која го пресликува $\triangle A'B'C'$ во $\triangle A''B''C''$ и оттука следува тврдењето на задачата.