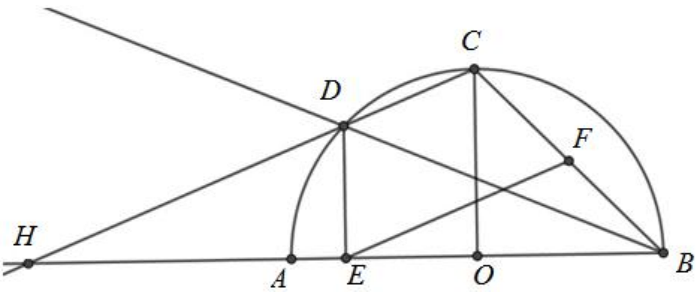
JMMO 2018

1. Определи ги сите природни броеви $n>2$, такви што $n=a^3+b^3$, каде што a е најмалиот природен делител на n поголем од 1 и b е произволен природен делител на n.
   Решение. Прво да забележиме дека ако n е непарен, тогаш мора и двата делители a и b да се непарни. Но, нивниот збир е парен, па n мора да биде парен, што е контрадикција. Значи, n е парен и $a=2$. Тогаш мора и b да биде парен. Важи и дека $b\,|\,(n-b^3)=a^3=8$. Оттука, добиваме дека $b\in\{2,4,8\}$. Значи, бараните броеви n се $n=16$, $n=72$ и $n=520$.

2. Дадена е полукружница k со центар O и дијаметар AB. Нека C е точката од k таква што $CO\perp AB$. Симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече k во точката D. Нека E е точката од AB таква што $DE\perp AB$ и нека F е средината на CB. Докажи дека четириаголникот $EFCD$ е тетивен.
   Решение. Триаголникот ABC е рамнокрак правоаголен. Нека $CD\cap AB=\{H\}$. Од

$$\measuredangle AED=\measuredangle ADB=90^\circ \text{ и } \measuredangle DAE=\measuredangle DAB$$



следува дека $\triangle ADE\sim\triangle ABD$. Од тетивноста на четириаголникот $ABCD$ следува $\measuredangle ADC=180^\circ-\measuredangle ABC=135^\circ$ т.е. $\measuredangle HDA=45^\circ$. Тогаш

$$\measuredangle DAB=\measuredangle DAC+\measuredangle CAB=\measuredangle DBC+\measuredangle CAB=22^\circ30'+45^\circ=67^\circ30'.$$

Според тоа,

$$\measuredangle HAD=180^\circ-\measuredangle DAB=180^\circ-67^\circ30'=112^\circ30',$$

односно

$$\measuredangle AHD=180^\circ-(\measuredangle HAD+\measuredangle HDA)=180^\circ-157^\circ30'=22^\circ30'$$

т.е. $\triangle HDB$ е рамнокрак. Бидејќи $\triangle HDB$ е рамнокрак и $DE \perp AB$ следува дека E е средина на HB. Но, E е средина на HB и F е средина на CB, па затоа EF е средна линија во $\triangle HBC$ т.е. $EF \parallel HC$ т.е. $EF \parallel CD$. Значи, четириаголникот $EFCD$ е трапез. Понатаму, $EF \parallel HC$ следува $\measuredangle FEB = \measuredangle CHB = 22^\circ 30'$. Од $DE \perp AB$ имаме

$$\measuredangle DEF = 90^\circ - \measuredangle FEB = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'.$$

Според тоа,

$$\measuredangle EFB = 180^\circ - (\measuredangle FEB + \measuredangle EBF) = 180^\circ - 67^\circ 30' = 112^\circ 30',$$

т.е.

$$\measuredangle CFE = 180^\circ - \measuredangle EFB = 67^\circ 30'.$$

Конечно, $EFCD$ е рамнокрак трапез, од каде следува тврдењето.

3. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x + y + z = 1$. Докажи дека

$$\frac{(x+y)^3}{z} + \frac{(y+z)^3}{x} + \frac{(z+x)^3}{y} + 9xyz \geq 9(xy + yz + zx).$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
\frac{(x+y)^3}{z} + \frac{(y+z)^3}{x} + \frac{(z+x)^3}{y} + 9xyz &\geq 3\sqrt[3]{\frac{(x+y)^3}{z} \cdot \frac{(y+z)^3}{x} \cdot \frac{(z+x)^3}{y}} + 9xyz \\
&= 3\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{\sqrt[3]{xyz}} + 9xyz \\
&\geq 3\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{\frac{x+y+z}{3}} + 9xyz \\
&= 9(x+y)(y+z)(z+x) + 9xyz \\
&= 9(x+y+z)(xy+yz+zx) \\
&= 9(xy+yz+zx).
\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = \frac{1}{3}$.

4. Определи ги сите парови (p,q), $p,q \in \mathbb{N}$ такви што

$$(p+1)^{p-1} + (p-1)^{p+1} = q^q.$$

Решение. Имаме

$$(p+1)^{p-1} + (p-1)^{p+1} \geq (p+1)^{p-1} \geq (p-1)^{p-1} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}&<(p+1)^{p+1}+(p+1)^{p+1}\\&=2(p+1)^{p+1}<(p+2)^{p+2}\end{aligned}\tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека

$$(p-1)^{p-1}\le q^q<(p+2)^{p+2}.$$

1) Нека

$$q=p-1,\ (p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=(p-1)^{p-1}.$$

Од

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}\ge(p+1)^{p-1}\ge(p-1)^{p-1}$$

имаме $(p-1)^{p+1}=0$ и $(p+1)^{p-1}=(p-1)^{p-1}\Rightarrow p=1,q=0.$ Но 0 не е природен од што следува дека $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=(p-1)^{p-1}$ нема решение во $\mathbb{N}$.

2) Нека $q=p$, $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=p^p$.

Ако $p=1$, тогаш

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=1 \text{ и } p^p=1.$$

Значи $(p,q=(1,1)$ е решение на $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=q^q$.

Ако $p=2$, тогаш

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=4 \text{ и } p^p=4.$$

Значи $(p,q)=(2,2)$ е решение на $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=q^q$.

Ако $p=3$, тогаш

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=32 \text{ а } p^p=27.$$

Значи $(p,q)=(3,)$ не е решение $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=q^q$.

Ако $p\ge4$, тогаш важи $(p-1)^p>p^{p-1}$. Добиваме

$$\begin{aligned}(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}&>(p+1)^{p-1}+p^{p-1}(p-1)\\&>p^{p-1}+p^{p-1}(p-1)=p^p\end{aligned}$$

Значи кога $p\ge4$, $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=q^q$ нема решение во $\mathbb{N}$.

3) Нека $q=p+1$

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=(p+1)^{p+1}\Leftrightarrow$$

$$(p-1)^{p+1}=(p+1)^{p-1}((p+1)^2-1)\Leftrightarrow$$

$$(p-1)^{p+1}=(p+1)^{p-1}p(p+2)$$

Бидејќи p и $p-1$се заемно прости $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=(p+1)^{p+1}$ нема решение во $\mathbb{N}$.

Конечно, решенија на $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=q^q$ се

$$(p,q=(1,1) \text{ и } (p,q)=(2,2).$$

5. Во кружница е впишан правилен 2018-аголник. Броевите $1,2,...,2018$ се распоредуваат во темињата на 2018-аголникот, во секое теме по еден број, така што збирот на секои два соседни броја (од тоа распоредување) е еднаков на збирот на двата нивни дијаметрално спротивни броја. Определи го бројот на различните распоредувања на броевите. (Распоредувањата добиени со ротација околу центарот на кружницата се сметаат за еднакви).

Решение. Разгледуваме распоредување на броевите кое го исполнува условот на задачата. Нека A,B се два соседни броја во тоа распоредување и нивните дијаметрално спротивни броја се a,b соодветно. Тогаш е исполнет условот $A+B=a+b$ или $A-a=b-B$. Од произволноста на соседните броеви A,B добиваме дека било која разлика на броевите на дијаметрално спротивнивните места е константа, односно $A-a=C$. Значи, броевите од 1 до 2018 треба да се групираат во 1009 парови така што разликата на броевите во секој пар да е C. Вакви парови може да се формираат акко C е делител на 1009.

Нека $C=k$. Тогаш мора (соодветно) броевите да се спаруваат на следниот начин

$$\begin{aligned}&\{1,2,...,k\}\to\{k+1,k+2,...,2k\},\\ &\{2k+1,2k+2,...,3k\}\to\{3k+1,3k+2,...,4k\},...,\\ &\{2019-2k,...,2017-k,2018-k\}\to\{2019-k,...,2017,2018\}\end{aligned} \tag{1}$$

(k елементи од едно множество се спаруваат со k елементи од друго множество, при што секој елемент од множеството $\{1,2,...,2018\}$ треба да се јави точно еднаш).

Ако бројот на (стрелките) спарувања во (1) е m, тогаш $2018=2km$ или $1009=km$. Бидејќи 1009 е прост број, единствени можни вредности за k се 1 и 1009.

1) $C=1$. Во овој случај спарувањето на броевите ќе биде (1,2), (3,4), ...(2017,2018) и броевите од еден пар ќе бидат дијаметрално спротивни. Нека на една дијагонала го фиксираме првиот пар (1,2). Да

забележиме дека е потребно да се избере редоследот на броевите меѓу 1 и 2 во еден правец (на пример во правец на движењето на стрелките на часовникот), а останатата половина ќе биде детерминирана од условот на задачата. Бидејќи не се бројат ротациите, соседниот број на бројот 1 (во правец на стрелките на часовникот) може да се избере на 1008 начини, неговиот соседен на 1007 начини итн. Значи броевите може да се распоредат на $1008!$ начини (циклична пермутација на 1009 елементи).

2) $C=1009$. Во овој случај броевите ќе бидат групирани на следниот начин (1,1010), (2,1011),...(1009,2018). Распоредувањето на броевите како и во првиот случај може да се направи на $1008!$ начини.

Конечно броевите може да се распоредат на $2\cdot 1008!$ начини.