VI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика 1976-1985
подготвена од Илија Јанев и Коста Мишовски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Ако четвртината од некој број се намали за 2 се добива осмина од тој број.

а) Кој е тој број;

б) Пресметај ја бројната вредност на изразот

$$\frac{x^3-36x}{x^2-9x-90}$$

ако x е бројот добиен под а).

2. Некој двоцифрен број е делив со 3. Ако напишеме меѓу цифрите на тој број нула и на така добиениот трицифрен број му ја додадеме двократната вредност на цифрата на стотките, ќе се добие број деветпати поголем од двоцифрениот број. Кој е тој број?

3. Од точката M што ја дели страната AB на рамностраниот триаголник ABC на делови од 6 cm и од 2 cm, повлечени се нормали на другите две страни на триаголникот. Колку е оддалечено темето C до секоја од овие нормали?

4. Дадена е кружницата k (O, r) со два заемно нормални пречника AB и CD. Во точката B е повлечена тангентата t на кружницата. Нека M е произволна точка од радиусот OC. Полуправата AM ја сече кружницата k во точката H. Тангентата, повлечена во точката H ја сече правата t во точката P. Докажи дека:

а) Четириаголникот OPHM е трапез;

б) Четириаголникот AOPM е паралелограм.

45. (1982.VII.1)

I.

а) Нека x бараниот број. Тогаш од условот на задачата е:

$$\frac{x}{4} - 2 = \frac{x}{8},$$

од каде што добиваме: $x = 16$.

б) Бројната вредност на изразот можеме да ја пресметаме:
1) Со директна замена на x со 16,
2) Со упростување на дропката, а дури потоа со замена на x со 16.

На првиот начин задачата се решава „без идеја", но затоа имаме поголеми пресметувања.

Вториот начин содржи една „мала идеја". Тој е „поелегантен" од првиот начин. Затоа ќе го покажеме него.

Првин ќе ги разложиме на множители и броителот и именителот на дропката:

$$\therefore \ x^3 - 36x = x(x^2 - 36) = x(x+6)(x-6)$$

$\therefore \ x^2 - 9x - 90 = ?$ Овој квадратен трином ќе го разложиме на множителите вака: Најпрвин ќе го разложиме на множители слободниот член, бројот 90, па ќе имаме:

$90 = 1 \cdot 90 = 2 \cdot 45 = 3 \cdot 30 = 5 \cdot 16 = 6 \cdot 15 = 9 \cdot 10.$
Од сите разлагања, само броевите 6 и 15 се разликуваат за -9, па ќе имаме:

$$\begin{aligned} x^2 - 9x - 90 &= x^2 + 6x - 15x - 90 \\ &= x(x+6) - 15(x+6) \\ &= (x+6)(x-15). \end{aligned}$$

Сега ќе ја скратиме дропката:

$$\frac{x^3 - 36x}{x^2 - 9x - 90} = \frac{x(x+6)(x-6)}{(x+6)(x-15)} = \frac{x(x-6)}{x-15}.$$

На крајот ќе замениме за $x = 16$:

$$\frac{16(16-6)}{16-15} = 16 \cdot 10 = 160.$$

Од ова сигурно ја согледа „универзалноста" на овој начин, над првиот.

Одговор: а) 16; б) 160.

46. (1982.VII.2)

I. Нека е $\overline{xy}$ бараниот двоцифрен број, т.е. $\overline{xy} = 10x + y$, при кое е $x + y = 3k$, т.е. збирот на цифрите се дели со 3.

Од условот на задачата е:

$\overline{x0y} + 2x = 9\overline{xy}$ или
$100x + y + 2x = 9(10x + y)$
$102x + y = 90x + 9y$
$12x = 8y$
$3x = 2y.$

Одовде е: $x : y = 2 : 3$ или
$(x + y) : y = (2 + 3) : 3$
$3k : y = 5 : 3$
$9k = 5y.$

Последното равенство е можно (бидејќи y е цифра од 0 до 9, а $k \in N$) само ако е $y = 9$, $k = 5$. Во тој случај е $x = 6$, па бараниот број е 69.

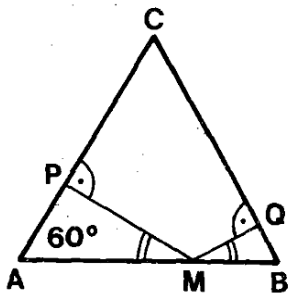
Одговор: 69.

II. Забелешка: Од $x : y = 2 : 3$ следува дека е $5 | (x + y)$, но поради тоа што е $3 | (x + y) \Rightarrow 15 | (x + y)$, а тоа е можно само ако е $x + y = 15$. Поради тоа што е $3x = 2y \Rightarrow x = 6$, $y = 9$. . .

III. Од $3x = 2y \Rightarrow$

1° $x = 2$, $y = 3 \Rightarrow 23$ не е делив со 3
2° $x = 4$, $y = 6 \Rightarrow 46$ не е делив со 3
3° $x = 6$, $y = 9 \Rightarrow 69$ е делив со 3.

Одговор: 69.



Црт. 34

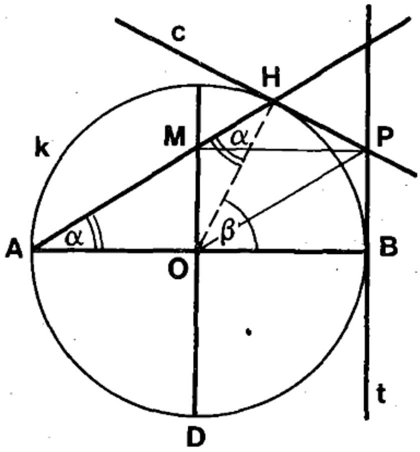
47. (1982.VII.3)

I. Триаголникот ABC нека е рамностран со страна $\overline{AB}$ = 8 cm и точката M нека лежи на основата AB, при кое е $\overline{AM}$ = 6 cm и $\overline{MB}$ = 2 cm.

Нека е $MP \perp AC$ и $MQ \perp BC$. Од $\triangle$ AMP имаме $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AM} = 3$ cm (како катета наспроти агол од 30°), па следува дека е $\overline{CP} = \overline{CA} - \overline{AD} = 8 - 3 = 5$ cm. Аналогно, наоѓаме дека $\overline{BQ} = 1$ cm, па е $\overline{CQ} = 7$ cm.

Одговор: 5 cm и 7 cm.

48. (1982.VII.4)



Црт. 35

I.

а) Да ги користиме ознаките на цртежот. Триаголникот AHO е рамнокрак, па е: $\measuredangle A = \measuredangle H = \alpha$ (види црт. 35). Аголот BOH е надворешен за Δ AHO, па е:

$$\beta = 2\alpha \ldots \qquad (1)$$

Но четириаголникот OBPH е делтоид (бидејќи е $\overline{OB} = \overline{OH} = r$ и $\overline{PB} = \overline{PH}$ како тангентни отсечки), па следува дека е

$$\measuredangle BOP = \measuredangle POH = \frac{\beta}{2} \ldots . \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува $\alpha = \frac{\beta}{2} = \measuredangle POH$, т.е. AH || OP, од каде што следува дека четириаголникот OPHM е трапез.

б) Бидејќи е $\measuredangle OAM = \measuredangle BOP$, $\overline{AO} = \overline{OB} = r$ и $\measuredangle AOM = \measuredangle OBP = 90^o$, следува дека е Δ AOM $\cong \Delta$ OBP, од каде што следува: $\overline{AM} = \overline{OP}$. Но уште е AM || OP, па следува дека четириаголникот AOPM е паралелограм.

II. Очигледно, OBPH е делтоид, па е

$$OP \perp BH. \qquad (3)$$

Од друга страна е $\measuredangle AHB = 90^o$ (Талесова теорема, агол впишан во полукружница). т.е.

$$AH \perp BH \qquad (4)$$

Од (3) и (4) следува дека AH || OP, т.е. четириаголникот OPHM е трапез. (исто и четириаголникот OPHA е трапез).

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Во правоаголен координатен систем, графиците на функциите $y = kx + 1$ и $y = ax + 6$ се сечат во точката C (3,4) и со x-оската образуваат триаголник. Пресметај го периметарот на триаголникот.

2. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\cos 2\varphi}$$

ако $3 \operatorname{cotg} 2\varphi = \sqrt{3}$.

3. Определи ја должината на дијагоналата AC на трапезот ABCD со основи AB и CD и $\measuredangle ADC = \measuredangle ACB$, ако средната линија изнесува 13 cm, а основите се во размер 9 : 4.

4. Јован, Петре и Миле решавале задачи. Ако Јован реши 5 задачи повеќе отколку што решил, тогаш ќе имал решено толку задачи колку што решиле Петре и Миле заедно. Ако Петре реши 9 задачи повеќе отколку што решил, тогаш ќе имал решено толку задачи, колку што решиле Јован и Миле заедно.

Нивните презимиња се Ристов, Илиевски и Ѓоргов. Колку задачи решил секој од нив и кое им е презимето, ако бројот на задачите што ги решил Ристов е делив со 3, а Ѓоргов решил 11 задачи.

49. (1982.VIII.1)

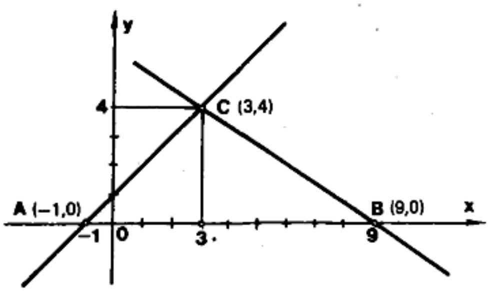
1. Бидејќи точката C лежи на обете прави, тоа значи дека нејзините координати ќе ги задоволуваат равенките на обете прави.

$$y = ax + 6 \qquad\qquad y = kx + 1$$
$$4 = a \cdot 3 + 6 \qquad\qquad 4 = k \cdot 3 + 1$$
$$4 - 6 = 3a \qquad\qquad 4 - 1 = 3k$$
$$a = -\frac{2}{3} \qquad\qquad k = 1$$

Другите две темиња на триаголникот се наоѓаат на x–оската, т.е. $y = 0$

$$y = -\frac{2}{3}x + 6 \qquad\qquad y = x + 1$$
$$0 = -\frac{2}{3}x + 6 \qquad\qquad 0 = x + 1$$
$$x = 9 \qquad\qquad x = -1$$
$$B(9, 0) \qquad\qquad A(-1, 0)$$

Значи, триаголникот има темиња $A(-1, 0)$, $B(9, 0)$ и $C(3, 4)$, а подножната точка на висината од темето C е точката $D(3, 0)$.



Црт. 36

Имаме:

$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = 1 + 9 = 10$

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{16 + 16} =$

$= 4\sqrt{2}$

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} =$

$= 2\sqrt{13}.$

Тогаш периметарот на триаголникот е

$$L = 10 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{13} \text{ единици.}$$

Одговор: $L = 10 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{13}$ единици.

50 (1982.VIII.2)

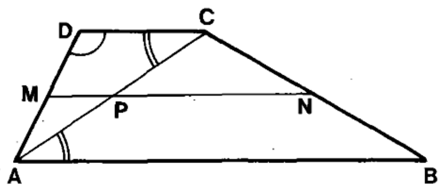
I. Од $3\,\mathrm{ctg}\,2\varphi = \sqrt{3}$ добиваме:

$$\mathrm{ctg}\,2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2\varphi = 60^\circ \Leftrightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Тогаш за изразот ќе имаме

$$\frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} + \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

51. (1982.VIII.3)



Црт. 37

I. Нека е ABCD трапез кој ги задоволува условите на задачата, т.е. $\overline{AB} : \overline{CD} = 9 : 4$, $\measuredangle ADC = \measuredangle ACB$ и $\overline{MN} = 13$ cm. Нека е P пресечна точка на дијагоналата AC и средната линија MN. Отсечката MP е средна линија во $\triangle ACD$, па е $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{CD}$. Аналогно е $\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Имаме:

$$\overline{AB} : \overline{CD} = 9 : 4$$
$$\frac{\overline{AB}}{2} : \frac{\overline{CD}}{2} = 9 : 4$$
$$\overline{PN} : \overline{MP} = 9 : 4.$$

Од друга страна е:

$$\overline{MP} + \overline{PN} = 13$$
$$(\overline{PN} + \overline{MP}) : \overline{MP} = 13 : 4$$
$$13 : \overline{MP} = 13 : 4$$
$$\overline{MP} = 4.$$

Следува $\overline{PN} = 9$.

Лесно се добива $\overline{MP} = 4$ а $\overline{PN} = 9$ од каде што е $\overline{AB} = 18$ и $\overline{CD} = 8$. Од сличноста на триаголниците ADC и BCA следува: $\overline{DC} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AB}$ или $8 : \overline{AC} = \overline{AC} : 18$

$$\overline{AC}^2 = 8 \cdot 18 = 144$$
$$\overline{AC} = 12.$$

Одговор: $\overline{AC} = 12$ cm.

52. (1982.VIII.4)

I. Јован нека решил x задачи, Петре нека решил y задачи а Миле нека решил z задачи. Тогаш од условот на задачата следува дека е:

$$\begin{cases} x+5=y+z \\ y+9=x+z. \end{cases}$$

Од првата и втората равенка ја изразуваме променливата z

$$\begin{cases} z=x+5-y \\ z=y+9-x. \end{cases}$$

Ги сравнуваме десните страни:

$$x+5-y=y+9-x$$
$$2x=2y+4$$
$$x=y+2.$$

Оваа вредност за x ја заменуваме во првата равенка:

$$y+2+5=y+z$$
$$z=7.$$

Значи, Миле решил 7 задачи, а неговото презиме не е Ѓоргов, а не е ни Ристов, останува да важи: Миле Илиевски.

За броевите x и y знаеме дека еден од нив е делив со 3, еден е еднаков на 11, а важи и равенката $x=y+2$.

Можноста $y=11$, $x=13$ отпаѓа, па мора да важи $x=11$, а $y=9$.

Значи, Јован решил 11 задачи; па неговото презиме е Ѓоргов, а Петре решил 9 задачи, а неговото презиме е Ристов.

Одговор: Јован Ѓоргов решил 11 задачи;
Петре Ристов решил 9 задачи;
Миле Илиевски решил 7 задачи.