XXI РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Колку има четирицифрени броеви чиј збир на цифрите е еднаков на 3?

Решение. Бараните броеви се запишани со цифрите: $0,1,2$ и 3. Тоа се броевите: 3000, 2100, 2010 2001, 1110, 1101, 1011, 1200, 1020, 1002.

Задача 2. Еден пилот за три дена прелетал $9014km$. Првиот ден прелетал $3154km$, а вториот ден $278km$ помалку. Колку километри прелетал пилотот третиот ден?

Решение. Ако првиот ден пилотот прелетал $3154km$, тогаш вториот ден прелетал $3154-278=2876km$, а третиот ден прелетал

$$9014-(3154+2876)=9014-6030=2984km.$$

Задача 3. Производот на два броја е 2250. Ако еден од нив се намали за 6, а другиот остане ист, тогаш новиот производ е 1800. Кои се тие броеви?

Решение. Бараните броеви да ги означиме со a и b. Имаме:

$$a\cdot b=2250 \text{ и } (a-6)\cdot b=1800,$$

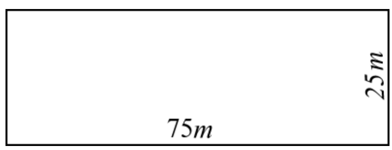
па затоа:

$$a\cdot b-6\cdot b=1800;\ 2250-6\cdot b=1800;\quad 6\cdot b=2250-1800=450;$$

т.е. $b=450:6=75$.Според тоа, $a=2250:75=30$.

Задача 4. Една нива во форма на правоаголник е долга $72m$ и широка $25m$. Колку тони пченка ќе се добијат од оваа нива, ако од $1\ m^2$ се добиваат просечно по $5kg$ пченка?

Решение. Плоштината на правоаголникот (нивата) е:

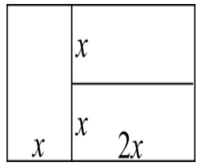


$$P=72\cdot 25=1900m^2.$$

Ако од $1m^2$ се добиваат просечно по $5kg$ пченка, тогаш од нивата ќе се добијат:

$$1900\cdot 5\,kg=9500\,kg \text{ тони пченка.}$$

Задача 5. Правоаголник $ABCD$ е составен од три складни правоаголници (види цртеж). Ако обиколката на секој од овие правоаголници е $60cm$, колкава е плоштината на квадратот кој со правоаголникот $ABCD$ има еднаква обиколка?



Решение. Од цртежот е јасно дека едната страна на секој од малите правоаголници мора да биде два пати подолга од другата. Ако должината на помалата страна е x, тогаш подолгата страна е $2x$, па обиколката на еден од нив е $2(x+2x)=60$. Оттука $x=10cm$. Обиколката на правоаголникот $ABCD$ е: $2(3x+2x)=10x=100cm$, а толку е и обиколката на квадратот. Должината на страната на квадратот е: $100:4=25cm$, па неговата плоштина е: $P=25^2=625cm^2$.

V одделение

Задача 1. Сашо замислил еден број и го помножил со 7 и со 16. Добиените производи ги собрал и го добил бројот 230. Кој број го замислил Сашо?

Решение. Нека со x го означиме бројот што го замислил Сашо. Ако бројот го помножи со 7 и со 16 ги добива броевите $7x$ и $16x$. Ако ги собереме добиените производи, добиваме: $7x+16x=230$; $23x=230$; $x=230:23$; $x=10$. Бројот кој го замислил Сашо е 10.

Задача 2. Група ученици отишле во паркот да се одморат. Ако на секоја клупа седат по 6 ученици, тогаш за двајца нема место, а ако на секоја клупа седат по 7 ученици, тогаш 3 места остануваат празни. Колку клупи имало во паркот и колку ученици имало во групата?

Решение. Нека е x број на клупи во паркот. Ако на секоја клупа седат по 6 ученици, тогаш бројот на ученици е $6x+2$, бидејќи за двајца нема место. Ако пак седат по 7 ученици, тогаш бројот на ученици ќе биде $7x-3$, бидејќи 3 места остануваат празни. Бидејќи во двата случаи има еднаков број ученици, следува дека $6x+2$ = $7x-3$, од каде се добива дека $x=5$. Значи, имаме 5 клупи, а ученици има $6x+2=6\cdot5+2=32$.

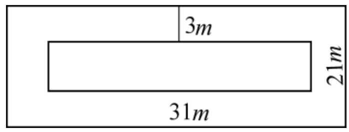
Задача 3. Количникот на два природни броја е 11. Ако деленикот се зголеми за 1650, а делителот остане ист, тогаш количникот ќе се зголеми 7 пати. Кои се тие броеви?

Решение. Ако количникот на два природни броја е 11, а x е делителот, тогаш деленикот ќе биде $11x$. Ако деленикот се зголеми за 1650, тогаш новиот деленик ќе биде $11x+1650$, па се добива

$$(11x+1650):x=7\cdot 11$$

т.е. $66x=1650$, од каде $x=25$. Деленикот ќе биде $11x=11\cdot 25=275$. Бараните броеви се 25 и 275.

Задаача 4. Во една спортска сала во правоаголна форма со должина $31m$ и ширина $21m$ се наоѓа базен. Секој ѕид на базенот е оддалечен три метри од ѕидот на салата. Колкава е плоштината на салата што е надвор од базенот?



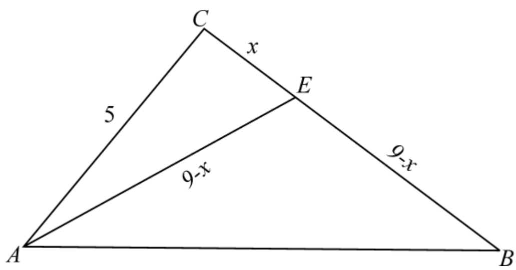
Решение. Димензиите на базенот се

$$31-6=25m \text{ и } 21-6=15m.$$

Бараната плоштина е

$$P=31\cdot 21-25\cdot 15=651-375=276m^2$$

Задача 5. Во $\triangle ABC$, на страната BC е означена точка E, така што $\overline{AE}=\overline{BE}$. Пресметај го периметарот на $\triangle AEC$, ако $\overline{AC}=5\,cm$ и $\overline{BC}=9\,cm$.



Решение. Нека $\overline{EC}=x$. Бидејќи $\overline{BC}=9\ \ cm$ се добива

$$\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{EC}=9-x.$$

Но, $\overline{AE}=\overline{BE}$ па и $\overline{AE}=9-x$.

Периметарот на ΔAEC ќе биде

$$L=\overline{AE}+\overline{EC}+\overline{AC}$$
$$=9-x+x+5=14cm.$$

VI одделение

Задача 1. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

$$\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}:\frac{5\frac{3}{5}+1\frac{1}{3}}{6\frac{3}{5}-4\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}-\frac{1}{5}\right).$$

Решение. Последователно добиваме:

$$\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}:\frac{5\frac{3}{5}+1\frac{1}{3}}{6\frac{3}{5}-4\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{\frac{5}{2}+\frac{10}{3}}{\frac{7}{2}-\frac{7}{3}}:\frac{\frac{28}{5}+\frac{4}{3}}{\frac{33}{5}-\frac{13}{3}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}-\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{\frac{15}{6}+\frac{20}{6}}{\frac{21}{6}-\frac{14}{6}}:\frac{\frac{84}{15}+\frac{20}{15}}{\frac{99}{15}-\frac{65}{15}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{5}{20}-\frac{4}{20}}{\frac{8}{56}-\frac{7}{56}}-\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{\frac{35}{6}}{\frac{7}{6}}:\frac{\frac{104}{15}}{\frac{34}{15}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{56}}-\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{35}{7}:\frac{104}{34}\right)\cdot\left(\frac{56}{20}-\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{17}\cdot\left(5\cdot\frac{17}{52}\right)\cdot\left(\frac{14}{5}-\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{17}\cdot 5\cdot\frac{17}{4\cdot 13}\cdot\frac{13}{5}=\frac{1}{4}.$$

Задача 2. Зоки со велосипед изминал 64% од патот, а преостанатите $9\,km$ ги изминал пеш. Колку километри изминал Зоки со велосипедот?

Решение. Преостанатите $9\,km$ изнесуваат $100-65=36\%$ од целиот пат. Според тоа, целиот пат е $9\,km\cdot\frac{100}{36}=25\,km$. Значи, Зоки со велосипедот изминал $25-9=16\,km$.

Задача 3. Определи го најмалиот четирицифрен број кој е делив со 9, ако производот на неговите цифри е еднаков на 180.

Решение. Од $180=1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5$ следува дека цифрите кои може да дадат производ 180 можат да бидат: 1, 4, 5, 9 или 1, 5, 6, 6 или 2, 2, 5, 9 или 3, 3, 4, 5 или 2, 3, 5, 6. Но, бројот треба да е делив со 9, што значи дека збирот на неговите цвифри треба да е делив со 9. Оттука добиваме дека цифрите на бројот може да бидат 1, 5, 6, 6 или 2, 2, 5, 9. Бидејќи се бара најмалиот број кој ги има бараните својства, заклучуваме дека тоа е бројот 1566.

Задача 4. Збирот на два надворешни агли на триаголникот ABC е $270°$. Докажи дека триаголникот е правоаголен.

Решение. Збирот на надворешните агли

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=360°.$$

Притоа

$$\alpha_1=180°-\alpha \text{ и } \beta_1=180°-\beta.$$

Ако

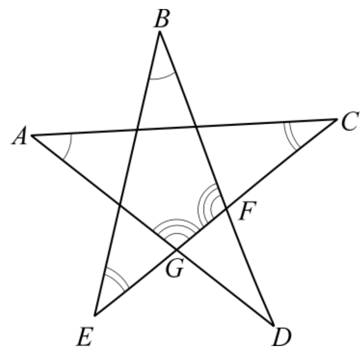
$$\alpha_1+\beta_1=270°,$$

тогаш

$$\gamma_1 = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ.$$

Бидејќи $\gamma + \gamma_1 = 180^\circ$ следува дека $\gamma = 90^\circ$ т.е. триаголникот е правоаголен.

Задача 5. Во ѕвездата на цртежот аглите кај точките A и B се еднакви, а исто и аглите кај точките E и C се еднакви и важи $\overline{AC} = \overline{BE}$. Докажи дека $\overline{AD} = \overline{BD}$.



Решение. Ги разгледуваме $\triangle AGC$ и $\triangle BEF$. Тие се складни според признакот АСА ($\overline{AC} = \overline{BE}$ и аглите што лежат на нив се еднакви по услов на задачата), па од складноста ќе имаме

$$\measuredangle AGC = \measuredangle BFE, \overline{AG} = \overline{BF}. \qquad (1)$$

Значи, $\measuredangle DGF = \measuredangle DFG,$ т.е. $\triangle GDF$ е рамнокрак и

$$\overline{GD} = \overline{FD} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) имаме $\overline{AG} + \overline{GD} = \overline{BF} + \overline{FD}$, од каде $\overline{AD} = \overline{BD}$.

VII одделение

Задача 1. Најди два последователни природни броја чија разлика на квадратите е 111.

Решение. Да ги означиме последователните природни броеви со n и $n+1$. Тогаш, од условот имаме:

$$(n+1)^2 - n^2 = 111,\ n^2 + 2n + 1 - n^2 = 111,\ 2n = 110,$$

т.е. $n = 55$. Значи бараните броеви се 55 и 56.

Задача 2. Во низа од шест природни броеви третиот и секој нареден е еднаков на збирот на двата претходни. Да се најдат броевите ако петтиот број е еднаков на 7.

Решение. Нека низата дадени броеви е $a, b, c, d, 7, e$. Од условот на задачата имаме:

$$a + b = c, b + c = d, c + d = 7, d + 7 = e$$

од каде

$$a + b = d - b, a + 2b = d \text{ и } (a+b) + (a+2b) = 7$$

т.е.

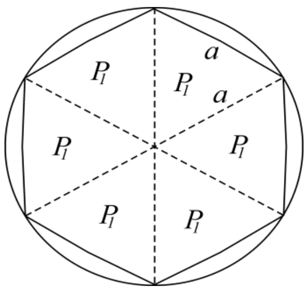
$$2a+3b=7.$$

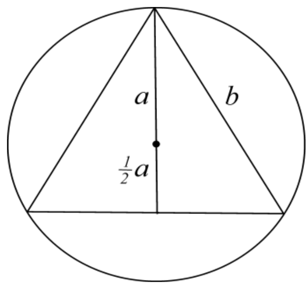
Оваа равенка има единствено решение за $a=2, b=1$ и $c=3, d=4, e=11$.

Задача 3. Во иста кружница се впишани рамностран триаголник и правилен шестаголник. Докажи дека плоштината на шестаголникот е два пати поголема од плоштината на триаголникот.

Решение. Со a да го означиме радиусот на кружницата. Тогаш плоштината на шестаголникот е

$$P=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$





Висината h на рамностраниот триаголник е $h=a+\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$ и ако со b ја означиме страната на триаголникот добиваме $h=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, т.е.

$$b=\frac{2h}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3a}{2}=a\sqrt{3}.$$

Конечно, плоштината на триаголникот

$$P^*=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

што значи

$$P=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}=2\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}=2P^*,$$

што и требаше да се докаже.

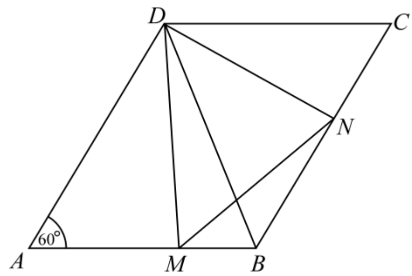
Задача 4. Во ромб $ABCD$ остриот агол е $60°$. На страната AB дадена е точката M, а на страната BC точката N, така што

$$\overline{MB}+\overline{BN}=\overline{AB}.$$

Докажи дека $\triangle MND$ е рамностран.

Решение. Од условот $\measuredangle BAD=60°$ и $\overline{AD}=\overline{AB}$, па се добива дека $\triangle ABD$ е рамностран. Од условот

$$\overline{MB}+\overline{BN}=\overline{AB}=\overline{BC}$$



следува дека

$$\overline{MB} = \overline{BC} - \overline{BN} \text{, т.е. } \overline{MB} = \overline{NC},$$

а $\measuredangle MBD = 60^\circ = \measuredangle NCD$ и $\overline{DB} = \overline{DC}$ од каде, според признакот САС, се добива дека $\triangle MBD \cong \triangle NCD$. Оттука, следува дека $\overline{DM} = \overline{DN}$ и $\measuredangle MDB = \measuredangle NDC$, па

$$\measuredangle MDN = \measuredangle MDB + \measuredangle BDN = \measuredangle NDC + \measuredangle BDN = \measuredangle BDC = 60^\circ.$$

Значи, $\triangle MND$ е рамнокрак со агол при врвот од 60° т.е. тој е рамностран.

Задача 5. Дали постои триаголник со висини 1,2 и 3?

Решение. Од формулата за плоштина на триаголник следува дека

$$\frac{1 \cdot a}{2} = \frac{2 \cdot b}{2} = \frac{3 \cdot c}{2},$$

т.е. $a = 2b = 3c$. Значи, $b = \frac{a}{2}, c = \frac{a}{3}$. Тогаш,

$$b + c = \frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{5a}{6} < a$$

што е контрадикција. Значи, таков триаголник не постои.

VIII одделение

Задача 1. Определи прост број p, таков што бројот $2p+1$ е точен куб на некој природен број.

Решение. Од условот $2p+1 = n^3$ следува дека n е непарен број, понатаму

$$2p = n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1).$$

Бидејќи n е непарен број, нека $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$. Тогаш

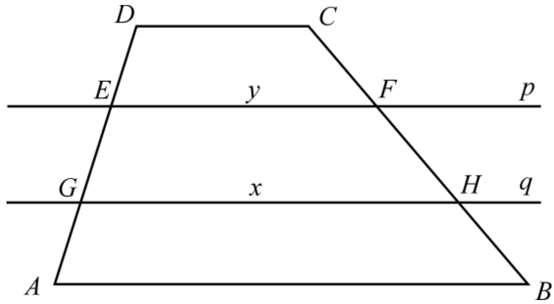
$$2p = 2k(4k^2 + 6k + 3),$$

$$p = k(4k^2 + 6k + 3).$$

Бројот p е прост, па од последното равенство следува $k = 1$, а

$$p = 13, 2p + 1 = 27 = 3^3.$$

Задача 2. Две прави p и q се паралелни со основите на трапезот $ABCD$ и го делат кракот AD на три еднакви делови. Определи ги должините на отсечките x и y на правите q и p меѓу краците, ако $\overline{AB}=13$ и $\overline{CD}=4$.



Решение. Нека p ги сече краците AD и BC во точките E и F, соодветно, и нека q ги сече краците AD и BC во точките G и H, соодветно (цртеж десно). Тогаш, EF е средна линија во трапезот $GHCD$, па затоа

$$y=\overline{EF}=\tfrac{1}{2}(\overline{GH}+\overline{CD})=\tfrac{1}{2}(x+4).$$

Од GH средна линија во трапезот $ABFE$ се добива

$$x=\overline{GH}=\tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{EF})=\tfrac{1}{2}(13+y).$$

Така, го добиваме системот

$$\begin{cases} y=\tfrac{1}{2}(x+4) \\ x=\tfrac{1}{2}(13+y) \end{cases}$$

од каде се добива дека $x=10$, $y=7$.

Задача 3. Во $\triangle ABC$ мерните броеви на страните се природни броеви, а должината на најмалата страна е $2cm$. Најди ја плоштината на $\triangle ABC$ ако

$$h_c=h_a+h_b.$$

Решение. Очигледно h_c е најголемата висина, па затоа c е најмалата страна, т.е. $c=2cm$. Од формулите за плоштина на триаголник имаме

$$h_a=\tfrac{2P}{a},\ h_b=\tfrac{2P}{b},\ h_c=\tfrac{2P}{c}$$

и ако замениме во равенството $h_c=h_a+h_b$ добиваме

$$\tfrac{1}{c}=\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}$$

и како $c=2cm$ добиваме $\frac{1}{2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Последната равенка е еквивалентна на равенката

$$ab-2a-2b=0,$$

т.е. на равенката

$$(a-2)(b-2)=4.$$

Во множеството природни броеви последната равенка има решенија

$$a=4,\ b=4;\ a=3,\ b=6 \text{ и } a=6,\ b=3.$$

Понатаму, a, b, c се страни на триаголник, па затоа $|a-b|<c$, што значи $a=4cm$, $b=4cm$ и $c=2cm$.

Задача 4. Еден автомобил патот од местото A до местото B го поминал со брзина од $60\,km/h$, а патот од местото B до местото A го поминал со брзина од $40\,km/h$. Определи ја средната брзина на движењето на автомобилот.

Решение. Со s да ја означиме должината на патот од A до B, со v_1 брзината со која автомобилот се движе од A до B и со v_2 брзината со која се движел од B до A. Тогаш соодветните времиња се $t_1=\frac{s}{v_1}$ и $t_2=\frac{s}{v_2}$. Според тоа, ако v_s е средната брзина со која за време t_1+t_2 автомобилот го поминува целиот пат, тогаш

$$v_s=\frac{2s}{t_1+t_2}=\frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}}=\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}=\frac{2\cdot 60\cdot 40}{60+40}=48\,km/h.$$

Задача 5. Докажи дека периметарот на триаголник е поголем од периметарот на кружницата впишана во него.

Решение. Плоштината на кругот впишан во триаголникот изнесува $r^2\pi$, каде r е радиусот на впишаната кружница. Плоштината на целиот триаголник е еднаква на sr, каде s е полупериметарот на триаголникот. Плоштината на впишаниот круг е помала од плоштината на триаголникот, па затоа $r^2\pi<sr$. Ако последното неравенство го скратиме со r и го помножиме со 2, добиваме $2r\pi<2s$, што и требаше да се докаже.