Ристо Малчески, Скопје

Валентина Гоговска, Скопје

НЕРАВЕНСТВА ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Во оваа статија предмет на разгледување ќе бидат неравенства меѓу страните, висините, тежишните линии и радиусите на опишаната и вписаната кружница во правоаголен триаголник. Во редовната настава научи дека дека за катетите a,b и хипотенузата c важи Питагоровата теорема, т.е. дека важи

$$a^2+b^2=c^2,$$

како и дека се точни равенствата

$$ab=ch=2P,\ R=\frac{c}{2},\ \ r=\frac{a+b-c}{2},$$

каде со P е означена плоштината на триаголникот, а со R и r се означени радиусите на опишаната и вписаната кружница во триаголникот, соодветно.

Задача 1. Нека a,b се катетите и c е хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC. Докажи дека $a+b\le c\sqrt{2}$.

Решение. *Прв начин*. Според Питагоровата теорема имаме $a^2+b^2=c^2$. Но,

$$a^2+b^2=\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(a-b)^2}{2}\ge\frac{(a+b)^2}{2},$$

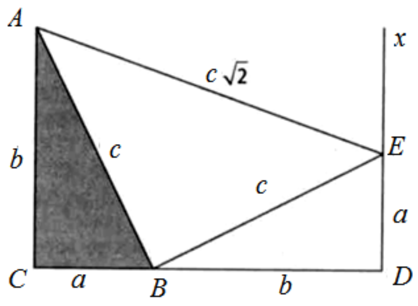
па затоа $c^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}$, од каде добиваме $2c^2\ge(a+b)^2$. Последното неравенство го коренуваме и го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{(a-b)^2}{2}$, т.е. ако и само ако $a=b$, што значи ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен.

Втор начин. Од Питагоровата теорема и неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува неравенството

$$\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{\frac{c^2}{2}}=\frac{c}{\sqrt{2}},$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b$, што значи ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен.

Трет начин. Преку темето B ја продолжуваме катетата CB на правоаголниот триаголник до точката D така што $\overline{BD}=\overline{AC}=b$. Во точката D повлекуваме нормала Dx и на неа наоѓаме точка E таква што $\overline{DE}=\overline{CE}=a$. Сега, триаголникот ABE е рамнокрак правоаголен триаголник со катети еднакви на c и хипотенуза еднаква на $c\sqrt{2}$. Затоа четириаголникот $ACDE$ е правоаголен трапез со висина CD, од каде следува $\overline{CD}\leq\overline{AE}$, односно $a+b\leq c\sqrt{2}$. Знак за равенство важи ако и само ако трапезот е правоаголник, што значи ако и само ако $a=b$.

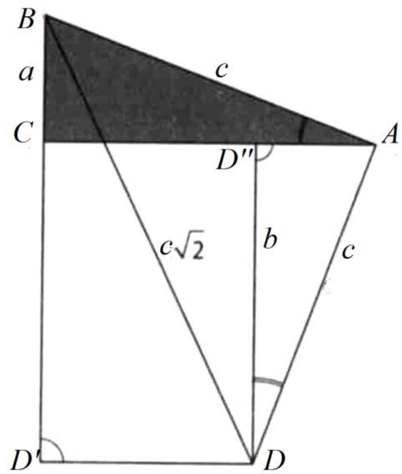


Четврт начин. Конструираме рамнокрак правоаголен триаголник ABD, $\overline{AD}=\overline{AB}=c$ и $\measuredangle BAD=90^{\circ}$, а потоа повлекуваме нормали DD' и DD'' на правите BC и AC, соодветно ($D'\in BC$ и $D''\in AC$). Правоаголните триаголници ABC и DAD'' се складни (Докажи!). Затоа

$$\overline{DD''}=\overline{AC}=b.$$

Четириаголникот $DD'CD''$ е правоаголник, па затоа $\overline{CD'}=b$. Според тоа,

$$\overline{BD'}=\overline{BC}+\overline{CD'}=a+b.$$



Понатаму, триаголникот BDD' е правоаголен со хипотенуза $c\sqrt{2}$, па затоа важи

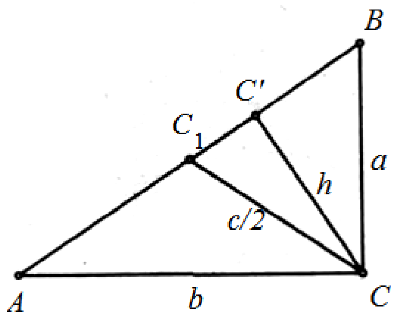
$$a+b\leq c\sqrt{2}. \blacksquare$$

Задача 2. Ако h е висината спуштена кон хипотенузата c на правоаголен триаголник, тогаш $c\geq 2h$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Од Питагоровата теорема

$$a^2+b^2=c^2,$$

формулата за плоштина на правоаголен триаголник $P=\frac{ab}{2}=\frac{ch}{2}$ и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува (цртеж десно):



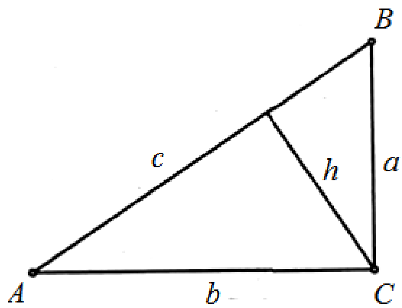
$$c^2=a^2+b^2\geq 2ab=2ch,$$

од каде добиваме $c\geq 2h$. Знак за равенство важи ако и само ако $a=b$, т.е. триаголникот е рамнокрак правоаголен.

Втор начин. Во правоаголен триаголник средината C_1 на хипотенузата е центар на опишаната кружница околу триаголникот, што значи дека

$$\overline{C_1B}=\overline{C_1A}=\overline{C_1C}=\frac{c}{2},$$

цртеж десно. Бидејќи хипотенузата е најголема страна на правоаголен триаголник, од триаголникот CC_1C' следува



$h\leq\frac{c}{2}$, т.е. $c\geq 2h$. Знак за равенство важи ако и само ако $C_1\equiv C'$, т.е. триаголникот е рамнокрак правоаголен. ■

Задача 3. Докажи дека за плоштината P во правоаголен триаголник со хипотенуза c важи $P\leq\frac{c^2}{4}$.

Решение. Според задача 2, ако h е висината спуштена кон хипотенузата c на правоаголен триаголник, тогаш $c\geq 2h$, т.е. $h\leq\frac{c}{2}$. Според тоа, за плоштината P на триаголникот добиваме

$$P=\frac{1}{2}ch\leq\frac{1}{2}c\cdot\frac{c}{2}=\frac{c^2}{4}.$$

Јасно, според задача 2 знак за равенство важи ако и само ако $a=b$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен. ■

Задача 4. Ако a,b се катетите, h е висината спуштена кон хипотенузата c на правоаголен триаголник, тогаш

$$c+h \geq a+b.$$

Докажи!

Решение. Од $h>0$ следува $h^2>0$. Сега, од Питагоровата теорема и равенството $ab=ch=2P$ последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&c^2=a^2+b^2,\\
&c^2+h^2>a^2+b^2,\\
&c^2+h^2+2ch>a^2+b^2+2ab,\\
&(c+h)^2>(a+b)^2.
\end{aligned}$$

Но, $a,b,c,h>0$ па од последното неравенство следува $c+h \geq a+b$, што и требаше да се докаже. ■

Задача 5. Ако a,b се катетите, c е хипотенузата на правоаголен триаголник и r е радисуот на впишаната кружница во триаголникот, докажи дека

$$2r+c \geq 2\sqrt{ab}.$$

Решение. Имаме $r=\frac{a+b-c}{2}$, од каде добиваме $2r+c=a+b$. Сега, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$2r+c=a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b$ и тогаш $c=a\sqrt{2}$, па затоа

$$r=\frac{2-\sqrt{2}}{2}a. ■$$

Задача 6. Ако t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b во правоаголниот триаголник ABC, тогаш

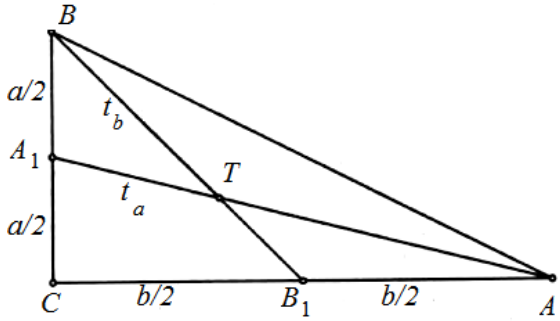
$$1<\frac{t_a+t_b}{a+b}<\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Докажи!

Решение. Од неравенстsвото на триаголник за правоаголниот триаголник ACA_1 добиваме $t_a < \frac{a}{2} + b$, а од правоаголниот триаголник BCB_1 добиваме $t_b < \frac{b}{2} + a$. Последните две неравенства ги собираме и го добиваме неравенството

$$t_a + t_b < (\tfrac{a}{2} + b) + (\tfrac{b}{2} + a) = \tfrac{3}{2}(a+b),$$

кое е еквивалентно со десното неравенство во (1).



Бидејќи t_a и t_b се хипотенузи во правоаголните триаголници ACA_1 и BCB_1, соодветно, важи $t_a > b$ и $t_b > a$. Последните две неравенства ги собираме и го добиваме неравенството

$$t_a + t_b > a + b,$$

кое е еквивалентно со левото неравенство во (1). ■

Задача 7. Докажи, ако t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b во правоаголниот триаголник ABC, тогаш

$$\tfrac{1}{2} < \tfrac{t_a}{t_b} < 2.$$

Решение. Од Питагоровата теорема применета на триаголниците AA_1C и BB_1C (цртеж горе) следува

$$t_a^2 = (\tfrac{a}{2})^2 + b^2 \text{ и } t_b^2 = (\tfrac{b}{2})^2 + a^2.$$

Последните две равенства ги делиме и добиваме

$$\frac{t_a^2}{t_b^2} = \frac{a^2+4b^2}{b^2+4a^2}.$$

Но,

$$\frac{a^2+4b^2}{b^2+4a^2}=4-\frac{15a^2}{b^2+4a^2}<4,$$

па затоа важи $\frac{1}{4}<\frac{t_a^2}{t_b^2}<4$, а од тука го добиваме бараното двојно неравенство. ■

Задача 8. Докажи, ако t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b во правоаголниот триаголник ABC, а P е неговата плоштина, тогаш

$$\frac{5}{2}P\le t_a t_b.$$

Решение. Во решението на претходната задача видовме дека важи $t_a^2=(\frac{a}{2})^2+b^2$ и $t_b^2=(\frac{b}{2})^2+a^2$. Ако ги помножиме овие две равенства, па потоа ги искористиме Питагоровата теорема, формулите за плоштина $P=\frac{ab}{2}=\frac{ch}{2}$ и неравенството $c\ge 2h$, добиваме

$$\begin{aligned}
t_a^2 t_b^2 &= \tfrac{1}{4}(a^2+4b^2)\cdot\tfrac{1}{4}(b^2+4a^2)\\
&= \tfrac{1}{16}(4(a^2+b^2)^2+9a^2b^2)\\
&= \tfrac{1}{16}(4c^4+9c^2h^2)\\
&\ge \tfrac{1}{16}(16c^2h^2+9c^2h^2)\\
&= (\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{ch}{2})^2=(\tfrac{5}{2}P)^2,
\end{aligned}$$

т.е. $t_a^2 t_b^2\ge(\frac{5}{2}P)^2$. Со коренување на последното неравенство добиваме $\frac{5}{2}P\le t_a t_b$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенството $c\ge 2h$ важи знак за равенство, т.е. ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен. ■

Задача 9. Докажи, ако t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b, а t_c е тежишната линија повлечена кон хипотенузата во правоаголниот триаголник ABC, тогаш

$$\frac{t_a+t_b}{t_c}\le\sqrt{10}.$$

Решение. Претходно видовме дека

$$t_a^2 = (\tfrac{a}{2})^2 + b^2 \text{ и } t_b^2 = (\tfrac{b}{2})^2 + a^2 .$$

Ако ги собереме последните две равенства и ја искористиме Питагоровата теорема добиваме

$$t_a^2 + t_b^2 = \tfrac{5}{4}(a^2 + b^2) = \tfrac{5}{4}c^2 .$$

Но, $c = 2t_c$, па со замена во последното равенство добиваме

$$t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2 .$$

Конечно, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува неравенството

$$t_a + t_b \le \sqrt{2(t_a^2 + t_b^2)} = \sqrt{2 \cdot 5t_c^2} = t_c\sqrt{10} ,$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $t_a = t_b$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен. ■

Задача 10. Докажи дека во правоаголен триаголник важи нера венството

$$R \ge (1+\sqrt{2})r .$$

Решение. Во задача 1 докажавме дека $a+b \le c\sqrt{2}$. Ако последното неравенство го помножиме со $1+\sqrt{2}$, последователно добиваме:

$$(a+b)(1+\sqrt{2}) \le c\sqrt{2}(1+\sqrt{2}),$$
$$(a+b)(1+\sqrt{2}) \le c(2+\sqrt{2}) = c(1+\sqrt{2}) + c,$$
$$(a+b-c)(1+\sqrt{2}) \le c.$$

Сега, ако искористиме дека $c = 2R$ и $2r = a+b-c$, добиваме

$$2R \ge 2(1+\sqrt{2})r, \text{ т.е. } R \ge (1+\sqrt{2})r . \blacksquare$$

Задача 11. Докажи дека во правоаголен триаголник важи неравенството

$$\tfrac{a+b+c}{2h} \ge 1+\sqrt{2} .$$

Решение. Од Питагоровата теорема, равенството $ab=ch$ и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}\frac{a+b+c}{2h}&=\frac{c(a+b+c)}{2ab}=\frac{c(a+b)}{2ab}+\frac{c^2}{2ab}\\&=\frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}+\frac{a^2+b^2}{2ab}\\&\geq\frac{2\sqrt{ab}\cdot\sqrt{2ab}}{2ab}+\frac{2ab}{2ab}=1+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b$, т.е. триаголникот е рамнокрак правоаголен. ■

Задача за самостојна работа

1. Докажи, ако во правоаголен триаголник t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b, тогаш точно е неравенството $\frac{\sqrt{5}}{2}\leq\frac{t_a+t_b}{a+b}$.
2. Докажи, ако t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b, а r е радиусот на впишаната кружница во правоаголен триаголник тогаш точно е неравенството
$$t_a^2+t_b^2\geq 5r^2(3+2\sqrt{2}).$$
3. Докажи дека во правоаголен триаголник важи неравенството
$$\sqrt{2}-1<\frac{r}{h}<\frac{1}{2},$$
каде r е радиусот на впишаната кружница, а h евисината над хипотенузата.
4. Нека R и r се радиусите на опишаната и впишаната кружница и P е плоштината на правоаголениот триаголник. Докажи дека
$$R+r\geq\sqrt{2P}.$$
5. Докажи, ако во правоаголен триаголник t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b, тогаш точно е неравенството
$$t_a^2+t_b^2\geq\frac{5}{8}(a+b)^2.$$
6. Нека a,b се катетите и h е висината повлечена над хипотенузата во правоаголен триаголник. Докажи го неравенството

$$a+b \geq 2h\sqrt{2}.$$

7. Нека a,b се катетите, c е хипотенузата на правоаголен триаголник и $n>3$ е природен број. Докажи го неравенството

$$a^n+b^n<c^n.$$

Литература

1. Малчески, Р. (2021). Неравенства меѓу средините, https://matematickitalent.mk
2. Малчески, С. (2021). Неравенства меѓу средините и примена , https://matematickitalent.mk