

Регионален натпревар 1995

I година

1. Нека збирот на три реални броја е 0, а збирот на нивните квадрати е 4. Да се пресмета збирот на четвртите степени на трите броја.

Решение. Да ги означиме трите броја со x, y и z . Според условите на задачата, имаме

$$x + y + z = 0, \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4. \quad (2)$$

Ако го квадрираме првото равенство, добиваме:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0,$$

од каде добиваме

$$xy + yz + zx = -2 \quad (3)$$

Ако го квадрираме равенството (3), добиваме:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2) = 4,$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z) = 4,$$

од каде заради (1) следува дека:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 4, \quad (4)$$

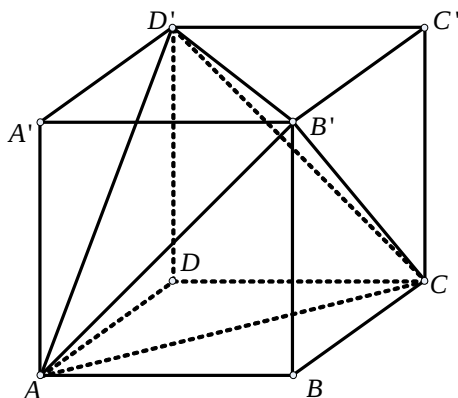
Ако го квадрираме равенството (2), добиваме:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 16$$

од каде, поради (4), следува дека $x^4 + y^4 + z^4 = 8$.

2. Нека $ABCD A'B'C'D'$ е коцка со раб a , каде $ABCD$ е еден од сидовите на коцката, а AA', BB', CC' и DD' се рабови на коцката. Да се пресмета (во зависност од a) висината на пирамидата $ACB'D'$, спуштена од темето D .

Решение. Веднаш да забележиме дека сите рабови на пирамидата $ACB'D'$ се еднакви и имаат должина $b = a\sqrt{2}$. Значи, $ACB'D'$ се добива од дадената коцка, кога ќе се отстранат четирите еднакви тристрани пирамиди $ACB'B, ACD'D, AB'D'A'$ и $CB'D'C'$ со волумени еднакви на $\frac{a^3}{6}$. Значи, волуменот V на $ACB'D'$ е $\frac{a^3}{3}$. Од друга



страна за волуменот V важи $V = \frac{b^2 h \sqrt{3}}{12}$, каде h е бараната висина, па со изедначување на двата волумени по средувањето, добиваме $h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

3A. Автомобил се движел од градот A кон градот B со брзина 60 km/h на нагорнините, 72 km/h на рамните делови и 90 km/h на надолнините и целиот пат го изминал за 5 часа. За да се врати назад, движејќи се со истите брзини на автомобилот му биле потребни 4 часа.

Колкаво е растојанието од A до B .

Решение. Нека $g \text{ km}$ од патот A до B се состои од нагорнини, $r \text{ km}$ се состои од рамни делови и $d \text{ km}$ се состои од надолнини. Тогаш, според условите на задачата, добиваме:

$$\frac{g}{60} + \frac{r}{72} + \frac{d}{90} = 5 \quad (1)$$

Движејќи се наназад, оние делови кои биле нагорнини стануваат надолнини и обратно, па затоа имаме:

$$\frac{g}{90} + \frac{r}{72} + \frac{d}{60} = 4. \quad (2)$$

Од сумирањето на (1) и (2) добиваме $\frac{g+r+d}{36} = 9$, односно $g+r+d = 324$.

Значи, растојанието од A до B е 324 km .

4A. Докажи дека постојат два позитивни природни броеви така што нивната сума е 1995 а производот е делив со 1995 .

Решение. Да претпоставиме дека постојат два такви броја и нека тоа се x и y . Според условите од задачата, имаме:

$$x + y = 1995 \text{ и } xy = 1995k,$$

каде k е позитивен природен број. Ако го изразиме од првото равенство и го замениме во второто, добиваме:

$$x^2 = 1995(x - k),$$

односно

$$x^2 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19(x - k).$$

Значи, x^2 е делив со 3 , од каде добиваме дека и x е делив со 3 . Аналогно заклучуваме дека x е делив со $5, 7$ и 19 . Значи, x е делив со $3, 5, 7$ и 19 , што значи, дека е делив и со нивниот заеднички содржател, односно со 1995 . Од последното, бидејќи x е природен број, добиваме дека $x \geq 1995$, од каде што добиваме дека $y \leq 0$. Последниот заклучок противречи на претпоставката, па значи не постојат природни броеви со бараните својства.

3Б. На располагање ни се смеси AB составена од супстанциите A и B во однос $2:3$, смеси BC , составена од супстанциите B и C во однос $1:2$ и смеси CA , составена во однос $1:1$. По колку грама од секоја од смесите треба да се земат за да се добие 24 g смеси во која односот на супстанциите A, B и C е $1:1:1$?

Решение. Да земеме x грама од првата смеси, y грама од втората смеси и $24-x-y$ грама од третата смеси. Во добиената смеси треба да има по 8 грама од секоја од супстанциите. Од друга страна, добиената смеси има $\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}(24-x-y)$ грама од супстанцијата A и $\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}y$ грама од супстанцијата B . Решавајќи го системот равенки

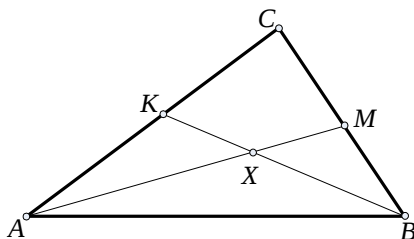
$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}(24-x-y) = 8 \\ \frac{3}{5}x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases},$$

добиваме $x=10, y=6$, а оттаму и $z=8$.

Значи, потребни се 10 g од првата, 6 g од втората и 8 g од третата смеси.

4Б. Нека ABC е триаголник, K е точка на страната AC , различна од A и C , M е точка од страната BC различна од B и C и нека X е пресечна точка на KB и MA . Докажи дека не е можно да бидат исполнети равенствата $\overline{KX} = \overline{XB}$ и $\overline{MX} = \overline{XA}$.

Решение. Да претпоставиме дека е можно да се исполнети дадените равенства. Тогаш $ABMK$ е четириаголникот чии дијагонали се преполовуваат, од каде следува дека $ABMK$ е паралелограм. Од тука добиваме дека отсечките AK и BM , односно отсечките AC и BC се паралелни, што не е можно.



II година

1. Нека a, b и c се должини на страни на триаголник. Докажи дека функцијата $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, дадена со:

$$f(x) = b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2,$$

прима позитивна вредност за секој реален x .

Решение. Функцијата $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, дадена со $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ прима позитивна вредност за секој реален број x ако и само ако $A > 0$ и $D = B^2 - 4AC < 0$.

Бидејќи, во дадениот случај, имаме $A = b^2 > 0$, првиот услов е исполнет.

За вториот услов, имаме

$$\begin{aligned} D &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 \\ &= (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc) \\ &= [(b+c)^2 - a^2][(b-c)^2 - a^2] \\ &= (a+b+c)(b+c-a)(b-c-a)(a+b-c). \end{aligned}$$

Бидејќи a, b и c се должини на страни на триаголник, имаме $a+b+c > 0$, $b+c-a > 0$, $b-c-a < 0$ и $a+b-c > 0$, од каде што се добива дека $D < 0$, односно дека е исполнет и вториот услов.

2. Низ внатрешна точка M на триаголникот ABC повлечени се прави паралелни на страните на триаголникот ABC . Истите го делат триаголникот на шест делови од кои три се триаголници со плоштини P_1, P_2 и P_3 . Изрази ја плоштината на триаголникот ABC преку плоштините P_1, P_2 и P_3 .

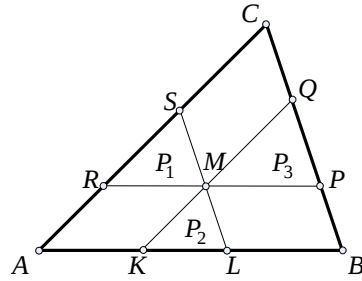
Решение. Нека P е плоштината на $\triangle ABC$. Секој од триаголниците RMS, KLM и MPQ е сличен на триаголникот ABC , па затоа

$$\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{RM}{AB}, \quad \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{KL}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{MP}{AB}.$$

Со собирање на горните равенства имајќи предвид дека $RM = AK$ и $MP = LB$, добиваме

$$\frac{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{AK + KL + LB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1,$$

од каде што следува дека $P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3})^2$.



3A. Нека z е комплексен број, a е реален број и $z + \frac{1}{z} = a$. Докажете дека z е реален број или $|z| = 1$.

Решение. Од дадениот услов, добиваме $z^2 - az + 1 = 0$. Значи, z е решение на квадратната равенка $x^2 - ax + 1 = 0$. Последната равенка има реални решенија, и тогаш z е реален број, или решенијата и се парот конјугирани комплексни броеви z и $\bar{z}$. Но, тогаш според Виетовите врски, добиваме $\bar{z}z = 1$, односно $|z| = 1$.

4A. Нека a, b и c се цели броеви и $a > 0$. Докажи дека, ако равенката

$$ax^2 + bx + c = 0$$

има две реални решенија во интервалот $(0, \frac{1}{2})$, тогаш $a \geq 5$.

Решение. Нека x_1 и x_2 се решенија на дадената равенка. Според Виетовите врски, имаме $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, од каде, бидејќи $x_1, x_2 \in (0, \frac{1}{2})$, добиваме $0 < \frac{c}{a} < \frac{1}{4}$,

односно $0 < 4c < a$. Од последното е јасно дека c е позитивен број, па бидејќи и a и c се цели позитивни броеви, добиваме $a \geq 4c + 1 \geq 4 \cdot 1 + 1 = 5$.

3Б. Да се определат сите комплексни броеви z за кои важи

$$z\bar{z} + 1 = -i(z - \bar{z}).$$

Решение. Нека $z = a + ib$, каде a и b се реални броеви. Бидејќи $\bar{z}z = a^2 + b^2$ и $z - \bar{z} = 2bi$, дадената равенка се трансформира во $a^2 + b^2 + 1 = 2b$, од каде добиваме $a^2 + (b-1)^2 = 0$. Но, збир на квадрати на реални броеви е 0 ако и само ако квадраните броеви се 0, од каде добиваме дека $a = 0$ и $b-1 = 0$, односно $b = 1$.

Значи, постои единствен комплексен број кој ги исполнува условите и тоа е $z = i$.

4Б. Докажи дека ако $10x + 11y = \frac{1}{3}$, тогаш $x^2 + y^2 > \frac{1}{1995}$.

Решение. Од условот $10x + 11y = \frac{1}{3}$, добиваме $y = \frac{1-30x}{33}$, од каде

$$x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{1-30x}{33}\right)^2 = \frac{1}{1089}(1989x^2 - 60x + 1).$$

Да ставиме $f(x) = 1989x^2 - 60x + 1$. Тогаш, минималната вредност на f е

$$f_{\min}(x) = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1989 - 3600}{4 \cdot 1989} = \frac{121}{221}.$$

Значи,

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{1089}(1989x^2 - 60x + 1) \geq \frac{1}{1089} \cdot \frac{121}{221} = \frac{1}{1989} > \frac{1}{1995}.$$

III година

1. Определи ги реалните решенија на равенката:

$$\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x.$$

Решение. Воведуваме смена $\log_3 x = y$, од каде што се добива $\sqrt{x} = \sqrt{3^y}$. Заменувајќи во почетната равенка, добиваме

$$\log_2(1 + \sqrt{3^y}) = y,$$

$$1 + \sqrt{3^y} = 2^y,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1.$$

Едно очигледно решение на последната равенка е $y = 2$. Ако $y \geq 2$, тогаш

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y < \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ и } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

од каде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y < \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Ако пак $y < 2$, тогаш

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ и } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

од каде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y > \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Значи, $y = 2$ е единственото решение на равенката $\left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1$, од каде што се добива, (враќајќи се во извршената смена), дека $x = 9$ е единственото решение на почетната равенка.

2. Нека $ABCDT$ е четиристрана пирамида со основа $ABCD$ (A и C не се соседни темиња) чии дијагонали AC и BD се заемно нормални и се сечат во точката O која е подножје на висината на пирамидата од врвот T . Нека $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ се соодветно, аглие меѓу висината на пирамидата и висините спуштени на бочните сидови ABT, BCT, CDT и DAT , спуштени од врвот T . Докажи дека

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \gamma = \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \delta.$$

Решение. Да ги означиме со A', B', C' и D' , соодветно, подножјата на висините на бочните сидови ABT, BCT, CDT и DAT , спуштени од врвот T ; со a', b', c' и d' , должините на отсечките OA', OB', OC' и OD' , соодветно; со a, b, c и d должините на отсечките OA, OB, OC и OD , соодветно; со h должината на висината на пирамидата.

Имаме:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \gamma = \frac{h^2}{a'^2} + \frac{h^2}{c'^2}$$

и

$$\operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \delta = \frac{h^2}{b'^2} + \frac{h^2}{d'^2}.$$

Да го разгледаме триаголникот ABO . Тој е правоаголен, со прав агол во темето O , а отсечката OA' му е висина спуштена кон хипотенузата. Значи,

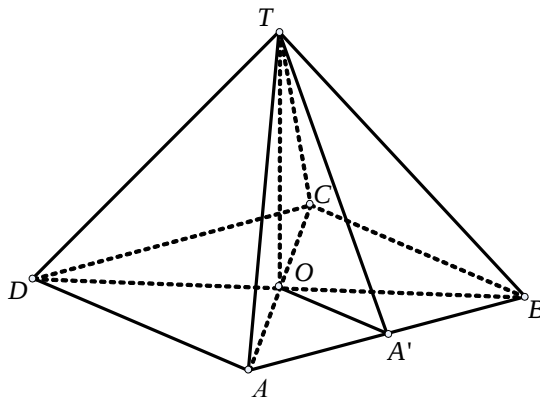
$$\frac{1}{a'^2} = \frac{\overline{AB}^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

и аналогно

$$\frac{1}{b'^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{c'^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \text{ и } \frac{1}{d'^2} = \frac{1}{d^2} + \frac{1}{a^2}.$$

Со оглед на добиените равенства, имаме:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \gamma = h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \right) = \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \delta.$$



3A. Докажи дека не постои полином P со реални коефициенти така што за секој реален број x важи $P(\sin x) = \cos x$.

Решение. *Прв начин.* Да претпоставиме дека постои таков полином. Нека $t = \sin x$. Тогаш за $-1 \leq t \leq 1$ важи

$$(P(t))^2 = 1 - t^2 \quad (1)$$

од каде што е јасно дека P мора да е линеарен полином, односно $P(t) = at + b$. Со замена во (1), добиваме

$$a^2 t^2 + 2bt + b^2 = -t^2 + 1,$$

од каде што, добиваме $a^2 = -1$, што не е можно за ниту еден реален број.

Значи, не постои полином со бараното својство.

Втор начин. Да претпоставиме дека постои таков полином. Тогаш

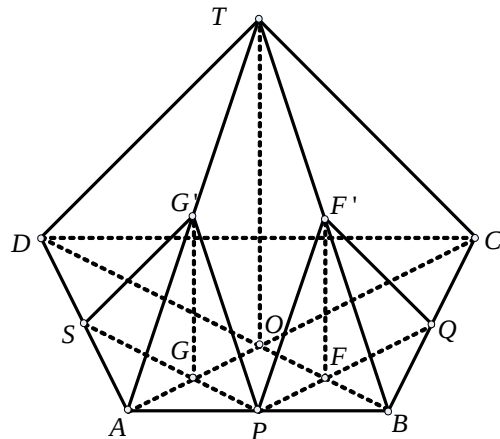
$$-1 = \cos \pi = P(\sin \pi) = P(0) = P(\sin 0) = \cos 0 = 1,$$

што не е можно.

Значи, не постои полином со бараното својство.

4A. Нека $ABCDT$ е пирамида со основа $ABCD$ (A и C не се соседни темиња), чии дијагонали AC и BD се сечат во точката O , која е подножје на висината на пирамидата од врвот T . Нека P, Q, R и S се средините на отсечките AB, BC, CD и DA , соодветно. Низ отсечките PQ, QR, RS и SP се повлечени 4 рамнини, нормално на основата на пирамидата кои од пирамидата отсекуваат 4 тристрани пирамиди кои ги отфрламе. Докажи дека плоштината на преостанатиот дел на пирамидата е еднаква на вкупната плоштина на четирите отфрлени пирамиди.

Решение. Нека F е пресечна точка на отсечките PQ и BD . Отсечката PQ е средна линија за триаголникот ABC . Затоа F е средина на отсечката BO , а висината FF' на отфрлената пирамида со основа PQB е средна линија на триаголникот OTB . Заклучуваме дека отсечките PF и QF' се средни линии на триаголниците ATB и CTB , соодветно. Аналогни заклучоци можат да се изведат за секоја од отфрлените пирамиди.



За да се пресмета вкупната плоштина на отфрлените пирамиди, од интерес е да се знае вкупната плоштина на нивните основи. Од друга страна, не е тешко да се

покаже дека средните линии на секој триаголник истиот го делат на четири триаголници со еднаква плоштина, односно секој од добиените четири дела има плоштина еднаква на четвртина од плоштината на дадениот триаголник. Оттаму следува дека вкупната плоштина B_0 на основите на отфрлените пирамиди е

$$B_0 = P_{PQB} + P_{RSD} + P_{QRC} + P_{SPA} = \frac{1}{4}(P_{ACB} + P_{BDC} + P_{CDA} + P_{DAB}) = \frac{1}{4}2B = \frac{|B|}{2}.$$

каде со B е означена плоштина на основата $ABCD$. Значи, половина од плоштината на основата на почетната пирамида е во преостанатиот дел, а половина учествува во плоштината на отфрлените пирамиди.

Нека плоштината на обвивката на почетната пирамида е M . Да го разгледаме триаголникот ABT . Два од четирите дела на кои тој е поделен со своите средни линии се во преостанатиот дел, а два се во отфрлените пирамиди. Аналогна дискусија може да се изврши и за другите бочни сидови на почетната пирамида. Значи, половина од плоштината на обвивката на почетната пирамида е во преостанатиот дел, а половина учествува во плоштината на отфрлените пирамиди.

Сите преостанати сидови се всушност сидовите по кои е вршено отсекувањето на отфрлените делови и истите се заеднички за преостанатиот дел и за отфрлените пирамиди. Нека нивната плоштина е Z .

Значи, плоштината на преостанатиот дел, како и вкупната плоштина на отфрлените пирамиди, е еднаква на $\frac{B}{2} + \frac{M}{2} + Z$.

3Б. Да се определи аголот α , ако се знае дека $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и

$$\sin \alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \frac{\sqrt{6-3\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{4(1-\sqrt{2})} (\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} + \sin \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \cos \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{4}}{2}} + \sin \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}} \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{8} = \sin(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{7\pi}{24} \end{aligned}$$

од каде што е јасно дека $\alpha = \frac{7\pi}{24}$.

4Б. Нека $ABCDT$ е пирамида со основа $ABCD$ (A и C не се соседни темиња), чии дијагонали AC и BD се сечат во точката O , која е подножје на висината на пирамидата од врвот T . Нека P, Q, R и S се средини на отсечките AB, BC, CD и DA соодветно. Низ отсечките PQ, QR, RS и SP се повлечени четири рамнини, нормално на основата на пирамидата, кои од пирамидата отсекуваат 4

тристрани пирамиди кои ги отфрламе. Докажи дека волуменот на преостанатиот дел на пирамидата е три четвртини од волуменот на пирамидата $ABCDT$.

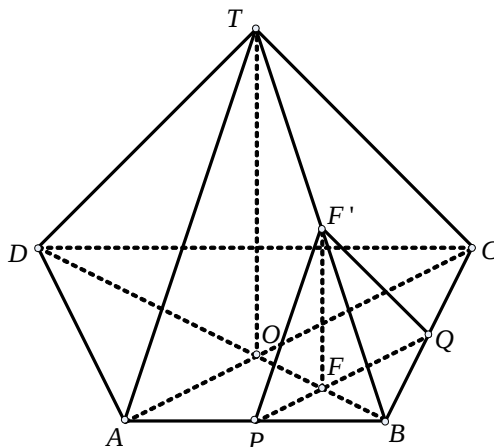
Решение. Нека F е пресечната точка на отсечките PQ и BD . Отсечката PQ е средна линија за триаголникот ABC . Затоа F е средина на отсечката BO , а висината на отфрлената пирамида со основа PQB е средна линија на триаголникот OTB . Значи, висината H_0 на оваа пирамида е половина од висината H на почетната пирамида. Истото важи за висината на секоја од четирите отфрлени пирамиди. За да се пресмета вкупниот волумен на отфрлените пирамиди од интерес е да се знае вкупната плоштина на нивните основи. Од друга страна, не е тешко да се покаже дека средните линии на секој триаголник истиот го делат на четири триаголници со еднаква плоштина, односно секој од добиените четири дела има плоштина еднаква на четвртина од плоштината на дадениот триаголник. Оттаму следува дека вкупната плоштина B_0 на основите на отфрлените пирамиди е:

$$\begin{aligned} B_0 &= P_{PQB} + P_{QRC} + P_{RSD} + P_{SPA} \\ &= \frac{1}{4}(P_{ABC} + P_{BCD} + P_{CDA} + P_{DBA}) \\ &= \frac{1}{4}2B = \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

каде со B е означена плоштината на основата $ABCD$. Вкупниот волумен на отфрлените пирамиди V_0 е

$$V_0 = \frac{1}{3} B_0 H_0 = \frac{1}{3} \frac{B}{2} \frac{H}{2} = \frac{1}{4} \frac{BH}{3},$$

па волуменот на преостанатиот дел е $\frac{3}{4} \frac{BH}{3}$.



IV година

1. Да се определи коефициентот пред x^3 во развиената форма (по извршените степенувања) на изразот

$$(1+x)^3 + (1+x)^4 + \dots + (1+x)^{1995}.$$

Решение. Според формулата за сума на геометричка прогресија, добиваме:

$$(1+x)^3 + (1+x)^4 + \dots + (1+x)^{1995} = \frac{(1+x)^3[(1+x)^{1993} - 1]}{x} = \frac{(1+x)^{1996} - (1+x)^3}{x}.$$

Бидејќи во именителот се наоѓа x , за определување на бараниот коефициент доволно е да се определи коефициентот пред x^4 во броителот. Но, x^4 не се јавува во $(1+x)^3$, па доволно е да се определи коефициентот пред x^4 во $(1+x)^{1996}$.

Значи, бараниот коефициент е $\binom{1996}{4}$.

2. Нека $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ е функција така што за $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ важи

$$2f(\sin x) + 3f(\cos x) = \sin x. \quad (1)$$

а) да се определи $f(0)$,

б) да се определи функцијата f .

Решение. а) Ако во (1) замениме за $x=0$ и за $x=\frac{\pi}{2}$, го добиваме системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 2f(0) + 3f(1) = 0 \\ 2f(1) + 3f(0) = 1 \end{cases},$$

по чие решавање се добива $f(0) = \frac{3}{5}$.

б) Ако ја воведеме смената $t = \frac{\pi}{2} - x$, од (1), добиваме дека за $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ важи

$$2f(\cos t) + 3f(\sin t) = \cos t,$$

односно за $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ важи

$$2f(\cos x) + 3f(\sin x) = \cos x. \quad (2)$$

Решавајќи го системот равенки (1) и (2) по непознати $f(\sin x)$ и $f(\cos x)$, добиваме

$$f(\sin x) = \frac{1}{5}(3\cos x - 2\sin x).$$

Конечно, ставајќи $\sin x = y$, добиваме дека за $y \in [0,1]$ важи

$$f(y) = \frac{3}{5}\sqrt{1-y^2} - \frac{2}{5}y.$$

Лесно се проверува дека добиената функција го задоволува равенството (1).

3А. Нека $a_1, a_2, \dots$ е бесконечна аритметичка прогресија чии членови се цели броеви. Докажи дека ако во дадената аритметичка прогресија постои член кој е куб на цел број, тогаш бесконечно многу членови на прогресијата се кубови на цели броеви.

Решение. Бидејќи членовите на прогресијата се цели цели броеви, јасно е дека разликата d е цел број. Нека важи $a_k = n^3$, каде n е цел број. Ако $d=0$, тогаш сите членови на прогресијата се еднакви на $a = n^3$, односно сите се кубови на цел број. Да претпоставиме дека разликата d не е нула. Имаме

$$(n+d)^3 = n^3 + 3n^2d + 3nd^2 + d^3 = a_k + (3n^2 + 3nd + d^2)d = a_{k+(3n^2+3nd+d^2)}$$

и поопшто

$$\begin{aligned} (n+id)^3 &= n^3 + 3n^2id + 3ni^2d^2 + i^3d^3 = a_k + (3n^2i + 3ni^2d + i^3d^2)d \\ &= a_{k+(3n^2i+3ni^2d+i^3d^2)} \end{aligned}.$$

Бидејќи за различни природни броеви i на левата страна на последното равенство фигурираат кубови на различни цели броеви ($d \neq 0$), јасно е дека дадената прогресија содржи бесконечно многу членови кои се кубови на цели броеви, но само под услов бројот

$$k + (3n^2i + 3ni^2d + i^3d^2)$$

Да е позитивен за секој ненегативен цел број i (бидејќи е тоа очигледно за $i = 0$, доволно е да се разгледува само случајот кога i е природен број). Но, дискриминантата на квадратниот тринот (разгледуван по d) $i^3d^2 + 3ni^2d + 3n^2i$ е $D = -3n^2i^4 \leq 0$, а за главниот коефициент i^3 важи $i^3 > 0$, па значи $i^3d^2 + 3ni^2d + 3n^2i \geq 0$, од каде следува дека $k + (3n^2i + 3ni^2d + i^3d^2)$ е позитивен број.

4А. Дадена е елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, каде $a > b > 0$. Што претставува геометриското место на точки кои се средини на сите тетиви на елипсата кои минуваат низ десниот фокус $F_2(e, 0)$?

Решение. Равенката на произволна права низ десниот фокус е:

$$y = k(x - e). \quad (1)$$

Со замена во равенката на елипсата, добиваме:

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 - 2a^2k^2ex + a^2k^2e^2 - a^2b^2 = 0. \quad (2)$$

Ако со x_1 и x_2 ги означиме решенијата на квадратната равенка (2), кои се всушност апсцисите на крајните точки на тетивата определена со правата (1), апсцисата на средната точка на соодветната тетива, според Виетовите формули, е:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2k^2e}{b^2 + a^2k^2} \quad (3)$$

Соодветната ордината е:

$$y = k(x - e) = -\frac{b^2ke}{b^2 + a^2k^2}. \quad (4)$$

Од (3) и (4) следува:

$$\frac{x}{y} = -\frac{a^2k}{b^2}, \quad (5)$$

па со елиминација на k од (1) и (5) ја добиваме равенката на бараното геометриско место на точки:

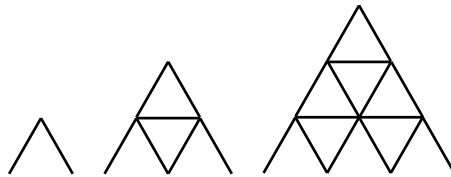
$$b^2\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + a^2y^2 = \left(\frac{eb}{2}\right)^2,$$

$$\frac{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2}{\left(\frac{e}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{eb}{2a}\right)^2} = 1.$$

Значи, бараното геометриско место на точки е елипса.

3Б. За кула од карти оде ден кат потребни се две карти, за два ката потребни се 7 карти, а за кула од три ката потребни се 15 карти (види цртеж). Колку карти се потребни за кула од n ката?

Решение. За првиот кат (броено од горе) се потребни една карта накосена на десно, една накосена на лево и ниту една хоризонтална, за вториот две накосени надесно, две налево и една хоризонтално поставена, за третиот кат



три накосени надесно, три налево и две хоризонтално поставени и се така до n -тиот кат, за кој се потребни n карти накосени надесно, n налево и $n-1$ хоризонтално поставена. Значи, вкупниот број на потребни карти е:

$$(1+1+0)+(2+2+1)+\dots+[n+n+(n-1)]=2(1+2+3+\dots+n)+(1+2+3+\dots+n-1)\\ = \frac{2n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$$

4Б. Со $y = x^2 - 2(k-1)x + k^2$, каде k е реален број е дадено множество парабололи (секој број k определува по една параболола). Да се определи геометриското место на на точки кои се темиња на дадените парабололи.

Решение. Апсцисата на темето на параболата

$$y = x^2 - 2(k-1)x + k^2,$$

е $x = -\frac{b}{2a} = k-1$, а соодветната ордината е $y = (k-1)^2 - 2(k-1)(k+1) + k^2 = 2k-1$.

Со елиминација на параметарот k , ја добиваме равенката на бараното геометриско место на точки:

$$y = 2x+1.$$

Значи, бараното геометриско место на точки е права.