IX РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

V одделение

1. Колку степени има аголот што го опишува минутната стрелка на часовникот за 5 минути?

2. Татко, мајка и ќерка сега имаат заедно 76 години. Таткото е за 4 години постар од мајката. Кога се родила ќерката, таткото и мајката заедно имале 46 години. Колку години има секој од нив сега?

3. Во еден магацин имало 120 големи и 40 мали конзерви. Вкупната маса на сите конзерви е 108 kg. Масата на 3 големи конзерви е иста со масата на 8 мали конзерви. Пресметај ја масата, одделно, на една мала и една голема конзерва.

4. Правоаголник со плоштина 99 cm^2 има должина 9 cm. Пресметај ја плоштината на оној квадрат чиј периметар е еднаков на периметарот на правоаголникот.

V одделение

1. Бидејќи часот има 60 минути, тогаш 60:5=12. 5 минути претставуваат $\frac{1}{12}$ од полниот агол, т.е. $360:12=30^{\circ}$.

2. Ќерката има: (76-46):3=10 години. Мајката има: (46-4):2+10=31 година. Таткото има: 31+4=35 години.

3. Ако 3 големи конзерви имаат иста маса како 8 мали конзерви, тогаш 120 големи, ќе имаат иста маса со 320 мали конзерви.
Бидејќи во магацинот имало вкупно 120 големи и 40 мали конзерви, следува (320+40) мали конзерви имаат маса од 108 kg, т.е. една мала конзерва има маса: 108:(320+40)=0,3 kg=300 грама, а една голема (108000-300·40):120=800 грама.

4. Ако со a и b ги обележиме страните на правоаголникот, тогаш:

$$P=a\cdot b;\quad 99=9\cdot b; b=11 \text{ cm}.$$

Периметарот на правоаголникот е: $L_p=2(a+b)=40$ cm. Ако со x ја означиме страната на квадратот, тогаш: $L_k=4x=40$, и $x=10$ cm. $P_k=a^2=100$ cm^2.

VI одделение

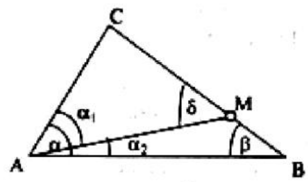
1. Докажи дека спроти поголема страна во триаголник лежи поголем агол.

2. Нека x, y и z се рационални броеви, од кои еден е позитивен, еден е негативен и еден е еднаков на нула. Определи кој од тие броеви е позитивен, кој негативен, а кој е нула ако $\frac{x(y-z)}{z} > 0$.

3. Ако некој број се подели со 63 се добива количник n и остаток 59. Пресметај го остатокот, добиен со делење на тој број со 21.

4. Низ средината на кракот AC на рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AC}=\overline{BC}=10$ cm, повлечена е нормала на самиот крак. Нормалата го сече кракот BC во точката D. Периметарот на триаголникот ABD е 18 cm. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC.

VI одделение



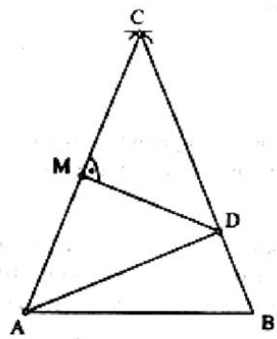
1. Нека $\overline{BC} > \overline{AC}$.
Треба да докажеме дека $\alpha>\beta$. Повлекуваме отсечка AM, така што $\overline{AC}=\overline{CM}$. Оттука имаме $\alpha_1=\delta$ и $\alpha>\alpha_1$, т.е. $\alpha>\delta$. Аголот δ е надворешен за триаголникот. Според тоа $\delta>\beta$. Следува дека $\alpha>\beta$.

2. За да е $\frac{x\cdot(y-z)}{z} > 0$, потребно е $z\neq0$ и $x\neq0$ значи $y=0$.

3. Нека тој број е x, тогаш имаме:

$$x = 63n+59;$$
$$x = 3\cdot21n+2\cdot21+17;$$
$$x = 21\cdot(3n+2)+17\,.$$

Според тоа бројот поделен со 21 има остаток 17.



4. Триаголниците AMD и CMD се правоаголни со еднакви катети, што значи тие се складни. ΔADC е рамнокрак, т.е. $\overline{AD}=\overline{CD}$.
Оттука следува дека: $\overline{AD}+\overline{DB}=10$ cm.
$L_{ABD}=\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{DB}$.
$18=\overline{AB}+10$, т.е. $\overline{AB}=8$ cm.
Според тоа $L_{ABC}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$.
$L_{ABC}=8+10+10$.
$L_{ABC}=28$ cm.

VII одделение

1. Докажи дека разликата од квадратите на два последователни природни броја е непарен број.

2. Даден е паралелограм ABCD. Нека P е средина на страната AD, а M средина на страната BC. Докажи дека отсечките AM и CP ја делат дијагоналата BD на три еднакви дела.

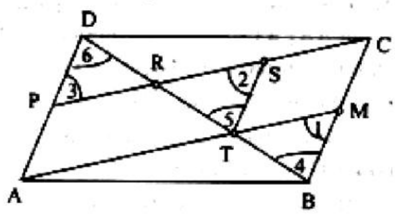
3. Картата за концерт чинела 180 денари. Кога цената на картата била намалена, бројот на посетителите се зголемил за 50%, а приходот се зголемил за 25%. Колку била новата цена на картата?

4. Дадени се кружниците $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ и правата p. Да се конструира права t паралелна со правата p, така што кружниците k_1 и k_2 да отсекуваат од неа еднакви тетиви.

VII одделение

1. Ако x и x+1 се последователни природни броеви, тогаш имаме:
$(x+1)^2-x^2=x^2+2x+1-x^2=2x+1,\ x\in N$.

2. Отсечките AP и MC се еднакви и паралелни, тоа значи дека четириаголникот AMCP е паралелограм. Ако повлечеме отсечка TS∥MC, тогаш и четириаголниците ATSP и TMCS се паралелограми. Од тука следува дека $\overline{TS}=\overline{MC}$;
$\overline{TS}=\overline{BM}$;
$\overline{TS}=\overline{PD}$ и $\overline{PD}=\overline{BM}$.



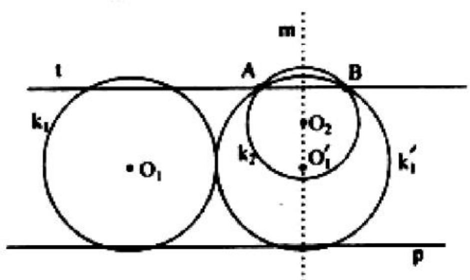
Да ги разгледаме триаголниците PRD; RTS и TB M.
1. $\overline{BM}=\overline{TS}=\overline{PD}$.
2. $\angle 1=\angle 2=\angle 3$
3. $\angle 4=\angle 5=\angle 6$

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}$ како агли со паралелни краци.

Според тоа $\Delta PRD\cong\Delta RTS\cong\Delta TBM$, а од тоа следува дека $\overline{DR}=\overline{RT}=\overline{TB}$.

3. Нека x е бројот на поранешни посетители. Тогаш приходот бил 180x. По намалувањето на цената, приходот е $180x\cdot 1.25=225x$, а посетители $1.5x$. Картата чини: $225x:1.5x=150$ денари.

4. Начин на конструкција.
1. Низ O_2 повлекуваме права m нормална на p
2. Вршиме транслација на k_1 за вектор $\overrightarrow{OO_1'}$ во k_1'. (види цртеж)



Ако $k_2\cap k_1'=\{A, B\}$, правата AB е бараната права t.

Ако $k_2\cap k_1'=\{M\}$, правата t е тангента на k_1 и k_2.

Ако $k_2\cap k_1'=\varnothing$, тогаш задачата нема решение.

VIII одделение

1. Од равенката $(a-3)x+(a-1)\cdot(3-x)=a+x-8$ определи го x ако е познато дека a е корен на равенката $2(a-5)-3(a-2)=6(a-3)$.

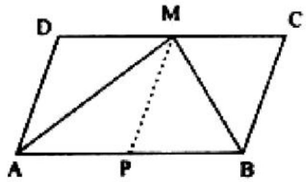
2. Во паралелограм ABCD, со периметар 48 cm, отсечките што ги поврзуваат темињата A и B со средината на страната CD се заемно нормални. Пресметај ги должините на страните на тој паралелограм.

3. Низ темето B на правоаголник ABCD повлечена е права p нормална на дијагоналата BD. Темињата A и C, соодветно, се оддалечени од правата p за 6,4 cm и 3,6 cm. Пресметај ги страните на правоаголникот.

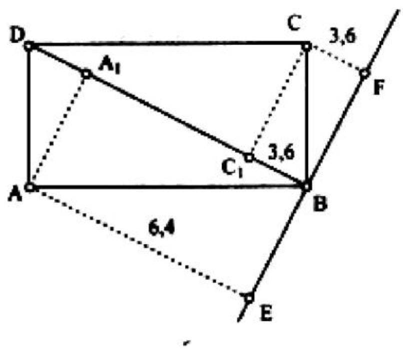
4. Учениците Јован, Аница и Илија заедно имале 780 денари. Кога Јован потрошил $\frac{1}{4}$ од своите пари, Аница потрошила $\frac{1}{5}$, а Илија потрошил $\frac{3}{7}$, тогаш на сите им останале еднаква сума на пари. Колку пари имал секој од нив?

VIII одделение

1. Прво ќе ја решиме втората равенка со што ќе го определиме a.
$2a-10-3a+6=6a-18 \Leftrightarrow a=2$. Првата равенка гласи:
$(2-3)x+(2-1)(3-x)=2+x-8 \Leftrightarrow x=3$.



2. Ако ја повлечеме тежишната линија MP на правоаголниот триаголник ABM, тогаш точката P е центар на опишаната кружница околу правоаголниот триаголник, $\left(\overline{MP}=\overline{PB}\right)$.
Четириаголникот PBCM е ромб.
$\overline{MP}=\overline{PB}=\overline{BC}$, т.е. $\overline{AB}=2\overline{BC}$.
Периметарот на паралелограмот е:
$L=2\overline{AB}+2\overline{BC}$
$48=2(2\overline{BC})+2\overline{BC}=6\overline{BC}$, т.е. $\overline{BC}=8$ cm, а $\overline{AB}=16$ cm.



3. Од темињата A и C повлекуваме нормали AA_1 и CC_1 на дијагоналата BD .
Четириаголниците $AEBA_1$ и CC_1BF се правоаголници, т.е. $\overline{BA_1}=6,4$ cm и $\overline{BC_1}=3,6$ cm. Правоаголните триаголници AA_1D и CC_1B се складни.
$\overline{DA_1}=\overline{BC_1}=3,6$ cm, т.е. $\overline{BD}=10$ cm .
Од теоремата за пропорционални отсечки во правоаголниот триаголник ABD имаме:
$\overline{AB}^2=\overline{BD}\cdot\overline{BA_1}$.
$\overline{AB}^2=10\cdot 6,4$.
$\overline{AB}=8$ cm и $\overline{AD}=6$ cm .

4. Нека на секој му останале по x денари.

Ако Јован имал a денари, тогаш: $a-\frac{1}{4}a=x \Rightarrow a=\frac{4}{3}x$.

Ако Аница имала b денари, тогаш: $b-\frac{1}{5}b=x \Rightarrow b=\frac{5}{4}x$.

Ако Илија имал c денари, тогаш: $c-\frac{3}{7}c=x \Rightarrow c=\frac{7}{4}x$.

Бидејќи $a+b+c=780$, имаме: $\frac{4}{3}x+\frac{5}{4}x+\frac{7}{4}x=780 \Rightarrow x=180$ денари.

Јован имал 240 денари, Аница 225 денари и Илија 315 денари.