ЈБМО 2013

1. Определи ги сите подредени парови природни броеви (a,b) такви што броевите $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ се природни броеви.

   Решение. За дадени природни броеви a и b бројот a^3b-1 можеме да го запишеме во облик
$$a^3b-1=b(a^3+1)-(b+1) .$$
   Ако a и b се броеви кои го исполнуваат условот од задачата, тогаш $a+1|a^3b-1$ и $a+1|b(a^3+1)$, па затоа $a+1|b+1$.

   Аналогно, b^3a+1 можеме да го запишеме во облик
$$b^3a+1=a(b^3-1)+(a+1) .$$
   Ако a и b се броеви кои го исполнуваат условот од задачата, тогаш $b-1|b^3a+1$ и $b-1|a(b^3-1)$, па затоа $b-1|a+1$.

   Сега, на потполно аналоген начин се добива дека $b-1|b+1$. Од равенството
$$b+1-(b-1)=2,$$
   следува $b-1|2$, па имаме две можности.

   Случај 1. $b=2$. Тогаш $a+1|b+1=3$ и единствена можност е $a=2$. Во овој случај единствено решение е $(a,b)=(2,2)$.

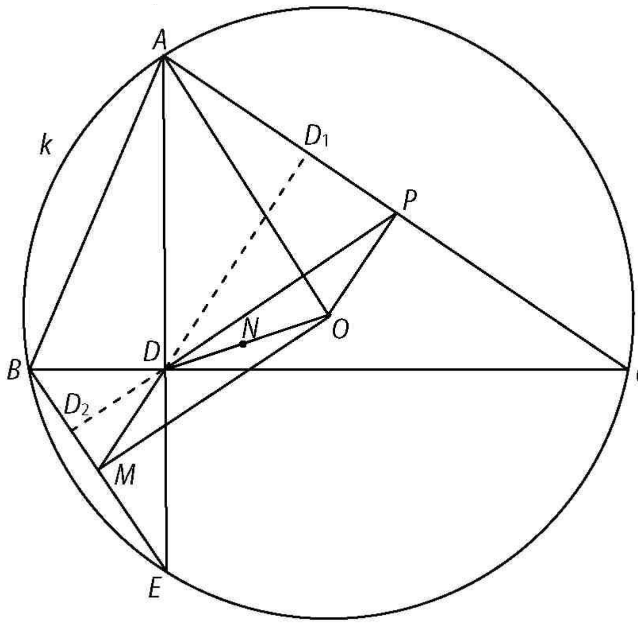
   Случај 2. $b=3$. Тогаш $a+1|b+1=4$, па имаме две можности $a=1$ или $a=3$. Решенија во овој случај се $(a,b)=(1,3)$ и $(a,b)=(3,3)$.

   Конечно бараните подредени парови се $(a,b)\in\{(1,3),(2,2),(3,3)\}$.

2. Нека ABC е остроаголен триаголник со $\overline{AB}<\overline{AC}$ и O е центар на неговата опишана кружница k . Нека D е точка од отсечката BC таква што $\measuredangle BAD=\measuredangle CAO$. Точката E е втора пресечна точка на ω и правата AD, а точките M,N и P се средини на отсечките BE,OD и AC, соодветно. Докажи дека M,N и P се колинеарни.

   Решение. Ќе докажеме дека $MOPD$ е паралелограм. Од тоа ќе следува дека M,N и P се колинеарни.

   Бидејќи $\measuredangle BAD=\measuredangle CAO=90^\circ-\measuredangle ABC$, точката D е подножјето на нормалата повлечена од точката A до страната BC. Бидејќи M е средина на отсечката BE, имаме



$$\overline{BM} = \overline{ME} = \overline{MD},$$

па затоа

$$\measuredangle MDE = \measuredangle MED = \measuredangle ACB.$$

Нека MD ја сече страната AC во точка D_1. Од

$$\measuredangle ADD_1 = \measuredangle MDE = \measuredangle ACD,$$

следува дека MD е нормална на AC. Од друга страна, бидејќи O е центар на кружницата опишана околу триаголникот ABC и P е средина на страната AC, добиваме дека OP е нормална на AC. Затоа MD и OP се паралелни.

Слично, бидејќи P е средина на страната AC, имаме $\overline{AP} = \overline{PC} = \overline{DP}$, па оттука $\measuredangle PDC = \measuredangle ACB$. Да земеме дека PD ја сече BE во точка D_2. Бидејќи $\measuredangle BDD_2 = \measuredangle PDC = \measuredangle ACB = \measuredangle BED$, заклучуваме дека PD е нормална на BE. Бидејќи M е средна точка на отсечката BE, OM е нормална на BE и оттука OM и PD се паралелени.

Од досега изнесеното следува дека четириаголникот $MOPD$ е паралелограм, па затоа точките M, N и P се колинеарни.

3. Докажи дека

$$(a + 2b + \tfrac{2}{a+1})(b + 2a + \tfrac{2}{b+1}) \geq 16,$$

за било кои позитивни броеви a и b такви што $ab \geq 1$.

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за два позитивни реални броја имаме

$$\frac{a+1}{2}+\frac{2}{a+1}\geq 2\sqrt{\frac{a+1}{2}\frac{2}{a+1}}\geq 2,$$

од каде што непосредно се добива

$$a+2b+\frac{2}{a+1}\geq \frac{a+3}{2}+2b=\frac{a+4b+3}{2}.$$

На потполно аналоген начин, од истите причини како и претходно имаме

$$b+2a+\frac{2}{b+1}\geq 2a+\frac{b+3}{2}=\frac{b+4a+3}{2}.$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и условот $ab\geq 1$ имаме

$$\frac{a+4b+3}{2}\cdot\frac{b+4a+3}{2}\geq \frac{1}{4}(\sqrt{ab}+4\sqrt{ab}+3)^2=\frac{64}{4}=16,$$

што требаше да се докаже.

Втор начин. Бидејќи $ab\geq 1$, и од тоа што a и b се позитивни реални броеви, имаме

$$a+b\geq a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\frac{1}{a}}=2.$$

Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина меѓу четири позитивни реални броја имаме

$$\begin{aligned}a+2b+\frac{2}{a+1}&=b+(a+b)+\frac{2}{a+1}\geq b+2+\frac{2}{a+1}=(b+1)+\frac{2}{a+1}+1\\&=\frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{2}{a+1}+1=4\sqrt[4]{\frac{(b+1)^2}{2(a+1)}}.\end{aligned}$$

Потполно аналогно, ако a и b си ги сменат местата во претходното неравенство добиваме

$$b+2a+\frac{2}{b+1}\geq 4\sqrt[4]{\frac{(a+1)^2}{2(b+1)}}.$$

Од добиените неравенства и со уште една примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина меѓу два реални броја, заедно со неравенството $ab\geq 1$, добиваме

$$\begin{aligned}(a+2b+\frac{2}{a+1})(b+2a+\frac{2}{b+1})&\geq 16\sqrt[4]{\frac{(b+1)^2}{2(a+1)}\frac{(a+1)^2}{2(b+1)}}=16\sqrt[4]{\frac{b+1}{2}\frac{a+1}{2}}\\&\geq 16\sqrt[4]{\frac{2\sqrt{a}}{2}\frac{2\sqrt{b}}{2}}=16\sqrt[8]{ab}\geq 16.\end{aligned}$$

Трет начин. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1})=((a+b)+b+\tfrac{2}{a+1})((a+b)+a+\tfrac{2}{b+1})$$
$$\geq (a+b+\sqrt{ab}+\tfrac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}})^2.$$

Од друга страна, од неравенството межу аритметичката и геометриската средина следува

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}\geq 2$$

и

$$\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}\geq \frac{4}{a+b+2},$$

па затоа

$$a+b+\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}\geq a+b+1+\frac{4}{a+b+2}=\frac{(a+b+1)(a+b-2)}{a+b+2}+4\geq 4$$

со што е завршен доказот.

4. Нека n е позитивен број. Двајца играчи, Ана и Бојан, ја играат следната игра:

- Ана избира n реални броеви (меѓу нив може да има и еднакви),
- Ана на лист хартија ги запишува сите збирови на паровите од избраните броеви и листот му го дава на Бојан (постојат $\frac{n(n-1)}{2}$ вакви збирови и мешу нив може да има еднакви ,
- Бојан победува ако ги погоди првичните n избрани броеви од Ана со само едно погодување.

Дали може Бојан да биде сигурен дека ќе победи во следните случаи:

а) $n=5$ б) $n=6$ в) $n=8$

Објасни го твојот одговор.

(На пример, за $n=4$, Ана може да ги избере броевите 1, 5, 7, 9, кои имаат исти по парови суми како и броевите 2, 4, 6, 10, па затоа Бојан не може да биде сигурен дека ќе победи.)

Решение. а) Да. Нека $a\leq b\leq c\leq d\leq e$ се броевите избрани од Ана. Бидејќи сите броеви се појавуваат во добиените по парови збирови точно 4 пати, со собирање на сите 10 по парови добиени збирови и делење на резултатот со 4, Бојан го добива збирот $a+b+c+d+e$. Со одземање на најмалиот и најголемиот по парови збир $a+b$ и $d+e$ тој го добива c. Со одземање на c од вториот најголем по парови збир $c+e$ тој го добива e. Одземајќи го e од најголемиот по парови збир $d+e$ тој го добива d. На ист начин може да ги добие и a и b.

б) Да. Нека $a \le b \le c \le d \le e \le f$ се броевите избрани од Ана. Бидејќи сите броеви се појавуваат во добиените по парови збирови точно 5 пати, со собирање на добиените 15 по парови збирови и делење на резултатот со 5, Бојан го добива збирот $a+b+c+d+e+f$. Со одземање на најмалиот и најголемиот добиен по парови збир $a+b$ и $e+f$ тој го добива збирот $c+d$.

Со одземање на најмалиот и вториот најголем по парови збир $a+d$ и $d+f$ од $a+b+c+d+e+f$ тој го добива збирот $c+e$. На сличен начин може да ја добие $b+d$. Тој ги користи нив за да ги добие $a+f$ и $b+e$.

Сега $a+d$, $a+e$, $b+c$ се трите најмали меѓу останатите шест добиени по парови збирови. Ако Бојан ги собере овие три пара и притоа од нив ги одземе $c+d$ и $b+e$ и добиениот резултат го подели со 2, тој го добива a. Потоа тој може да ги одреди останатите броеви.

в) Не. Ако Ана ги избере осумте броеви 1, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 20, тогаш Бојан не може да биде сигурен дека точно ќе ги погоди осумте броеви, бидејќи броевите 2, 4, 6, 10, 11, 15, 17, 19 ги даваат точно истите 28 по парови збирови како и претходните броеви.