

ММО 2014

1. Во рамнина 2014 прави се распоредени во три групи заемно паралелни прави. Кој е најголемиот број на триаголници кои ги образуваат правите (секоја страна од триаголникот лежи на некоја од правите).

Решение. Нека $a \geq b \geq c$ се броевите на прави во трите групи за кои се добива најголем број на триаголници. Тогаш $a+b+c=2014$, а најголемиот можен број на триаголници е abc (кога никои три прави немаат заедничка точка). Ќе докажеме дека $a \leq c+1$.

Да го претпоставиме спротивното, т.е. $a > c+1$. Тогаш

$$abc < b(ac + a - c - 1) = b(a-1)(c+1),$$

што е противречно на изборот на a , b и c . Не може $a=c$, бидејќи во тој случај $a=b=c=\frac{2014}{3}$ не е цел број. За a , b и c да бидат цели мора

$a=672$ и $b=c=671$ и бројот на триаголници е $672 \cdot 671^2$.

2. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$3^{2a+1}b^2 + 1 = 2^c.$$

Решение. Да го разгледаме прво случајот $a \geq 0$. Јасно $c \geq 0$ при што $c=0$ повлекува $b=0$. Добиваме дека решенија се $(a, 0, 0)$ за произволен ненегативен цел број a . Од равенството

$$3^{2a+1}b^2 + 1 = 2^c$$

следува дека b е непарен цел број. Левата страна можеме да ја запишеме во следниов облик

$$3^{2a+1}b^2 + 1 = (3^{2a+1} + 1)b^2 - (b-1)(b+1).$$

За десната страна од последниот израз да забележиме дека $(b-1)(b+1)$ е делив со 8, додека $(3^{2a+1} + 1)b^2$ е делив со 4 но не и со 8. Затоа $2^c = 4$, т.е. $c=2$. Но, тогаш $3^{2a+1}b^2 = 3$, па $a=0$ и $b=\pm 1$.

Да го разгледаме сега случајот $a < 0$. Повторно $c \geq 0$ при што $c=0$ повлекува $b=0$ и тогаш a може да е произволен негативен цел број. Затоа да се ограничине на случајот $c > 0$. Доволно е да го разгледаме случајот $b > 0$. Ставајќи $d = -a$, диофантовата равенка од условот на задачата добива облик

$$(2^c - 1)3^{2d-1} = b^2,$$

при што b , c и d се природни броеви. Значи b е делив со 3, од што следува дека c е парен број. Така $b = 3^d x$, $c = 2y$, за некои природни броеви x и y . Диофантовата равенка се сведува до облик

$$4^{y-1} + 4^{y-2} + \dots + 1 = x^2.$$

Ова повлекува $x=y=1$. Имено, за $y \geq 2$ би добиле дека $x^2 \equiv 5 \pmod{8}$, што не е можно. Значи во овој случај единствените решенија се $(a, 3^{-a}, 2)$, каде a е произволен негативен цел број.

Множеството M од сите решенија на диофантовата равенка од условот на задачата може да се опише на следниов начин:

$$M = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\} \cup \{(a, \pm 3^{-a}, 2) \mid a \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}\}.$$

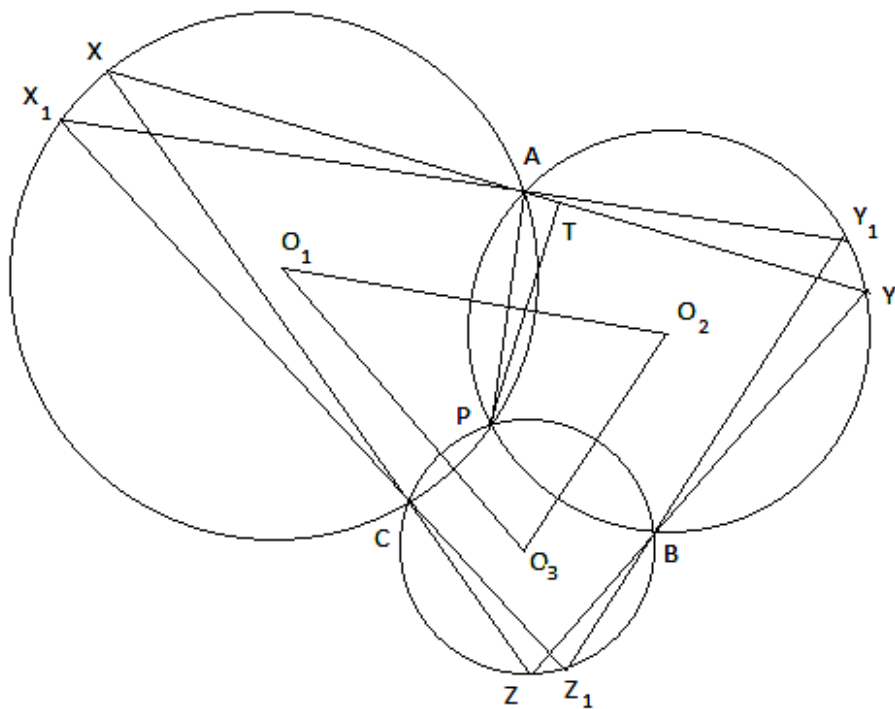
3. Нека k_1 , k_2 и k_3 се три кружници со центри во O_1 , O_2 и O_3 соодветно, такви што ниту еден од центрите не се наоѓа во внатрешноста на другите две кружници. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во A и P , k_1 и k_3 се сечат во C и P и k_2 и k_3 се сечат во B и P . Нека X е точка на k_1 таква што пресекот на правата XA со кружницата k_2 е Y и пресекот на правата XC со k_3 е Z и притоа Y не припаѓа во внатрешноста ниту на k_1 ниту на k_3 и Z не припаѓа во внатрешноста ниту на k_1 ниту на k_2 .

а) Докажи дека триаголниците XYZ и $O_1O_2O_3$ се слични меѓу себе.

б) Докажи дека плоштината на триаголникот XYZ не е поголема од четири пати по плоштината на триаголникот $O_1O_2O_3$. Дали се достигнува максимумот?

Решение. Прво ќе докажеме дека точките Y , B и Z се колинеарни. Бидејќи четириаголникот $BYAP$ е тетивен имаме $\angle PBY = \angle PAX$. Бидејќи четириаголникот $AXCP$ е тетивен $\angle PAX = \angle PCZ$. Бидејќи четириаголникот $CPBZ$ е тетивен добиваме $\angle PBZ + \angle PCZ = 180^\circ$. Значи,

$$\angle YBZ = \angle YBP + \angle PBZ = 180^\circ.$$



Да забележиме дека $\angle CO_1O_3 = \angle PO_1O_3$ и $\angle AO_1O_2 = \angle PO_1O_2$, од каде следува

$$\angle O_2O_1O_3 = \frac{1}{2} \angle AO_1C = \angle AXC.$$

Слично $\angle O_1O_2O_3 = \angle AYB$ и $\angle O_1O_3O_2 = \angle CZB$. Од досега изнесеното следува дека $\triangle XYZ \sim \triangle O_1O_2O_3$, со што го докажавме тврдењето под а).

Нека правата X_1Y_1 е паралелна со O_1O_2 и минува низ A , каде X_1 лежи на k_1 и Y_1 лежи на k_2 . Нека Z_1 е пресечната точка на правата X_1C со кружницата k_3 . Од претходно докажаното точките Y_1 , B и Z_1 се колинеарни и $\triangle X_1Y_1Z_1 \sim \triangle O_1O_2O_3$. Уште повеќе, $\angle PXA = \angle PX_1A$ и $\angle PYA = \angle PY_1A$. Затоа $\triangle PXY \sim \triangle PX_1Y_1$. Нека PT е висината спуштена од темето P кон страната XY . PA е висината на триаголникот PX_1Y_1 . Бидејќи PA е хипотенуза во правоаголниот триаголник PAT добиваме $\overline{PT} \leq \overline{PA}$. Па $P_{PXU} \leq P_{PX_1Y_1}$ и аналогно $P_{PYZ} \leq P_{PY_1Z_1}$ и $P_{PXZ} \leq P_{PX_1Z_1}$. Од ова добиваме $P_{XYZ} \leq P_{X_1Y_1Z_1}$. Точките P , O_1 и X_1 се колинеарни затоа што $\angle PAX_1 = 90^\circ$. Слично P , O_2 и Y_1 се колинеарни и P , O_3 и Z_1 се колинеарни. Добиваме дека O_1O_2 , O_1O_3 и O_2O_3 се средни линии во триаголниците X_1Y_1P , X_1Z_1P и Y_1Z_1P соодветно, па $P_{X_1Y_1Z_1} = 4P_{O_1O_2O_3}$. Од ова се добива бараното неравенство. Равенство се достигнува кога точките X и X_1 се соовпаѓаат, а со тоа и точките Y и Y_1 се соовпаѓаат и точките Z и Z_1 се соовпаѓаат.

4. Нека a, b, c се реални броеви за кои $a+b+c=4$ и $a, b, c > 1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} \geq 8\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right).$$

Решение. Бидејќи важи

$$\frac{1}{a-1} - \frac{8}{b+c} = \frac{1}{a-1} - \frac{8}{4-a} = \frac{12-9a}{(a-1)(4-a)} = \frac{3(4-3a)}{(a-1)(4-a)}$$

даденото неравенство е еквивалентно со

$$3\left(\frac{4-3a}{(a-1)(4-a)} + \frac{4-3b}{(b-1)(4-b)} + \frac{4-3c}{(c-1)(4-c)}\right) \geq 0.$$

Без губење на општоста нека претпоставиме дека $a \geq b \geq c$. Тогаш јасно е дека важи

$$4-3a \leq 4-3b \leq 4-3c.$$

Од $1 < a, b, c < 4$ следува дека $\frac{1}{(a-1)(4-a)}, \frac{1}{(b-1)(4-b)}, \frac{1}{(c-1)(4-c)}$ се позитивни реални броеви. Ќе докажеме дека

$$(a-1)(4-a) \geq (b-1)(4-b).$$

Имаме

$$(a-1)(4-a) \geq (b-1)(4-b) \Leftrightarrow 5a - a^2 \geq 5b - b^2 \Leftrightarrow (a-b)(5-a-b) \geq 0$$

Аналогно

$$(b-1)(4-b) \geq (c-1)(4-c).$$

Оттука следува дека

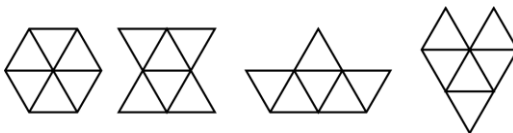
$$\frac{1}{(a-1)(4-a)} \leq \frac{1}{(b-1)(4-b)} \leq \frac{1}{(c-1)(4-c)}.$$

Бидејќи $4-3a \leq 4-3b \leq 4-3c$ можеме да го искористиме неравенство на Чебишев и добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{4-3a}{(a-1)(4-a)} + \frac{4-3b}{(b-1)(4-b)} + \frac{4-3c}{(c-1)(4-c)} &\geq \\ &\geq \frac{4-3a+4-3b+4-3c}{3} \cdot \left(\frac{1}{(a-1)(4-a)} + \frac{1}{(b-1)(4-b)} + \frac{1}{(c-1)(4-c)}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Равенство важи за $4-3a=4-3b=4-3c$, т.е. $a=b=c=\frac{4}{3}$.

5. Од рамнострани триаголник со страна 2014 е отсечен рамностран триаголник со страна 214, така што едно теме им се совпаѓа и две од страните од отсечениот триаголник лежат на две од страните на почетниот. Дали оваа фигура може да се пополни со фигури прикажани на цртежот десно без преклопување (дозволена е ротација), ако триаголниците во фигурите се рамнострани со страна 1? Образложи го одговорот!



Решение. Најпрво ја разделуваме дадената фигура на рамнострани триаголници со страна 1. Ги обележуваме триаголничкињата во дадената фигура со броевите од 1 до 6, како на сликата десно (во првиот ред последователно од 1 до 6, па броевите се повторуваат, во вториот почнуваме од 5, во третиот од 3, потоа од 1 и постапката се повторува). Лесно може да се забележи дека секоја од фигурите покрива по точно еден од броевите од 1 до 6. Според последното за фигурата да може да се покрие со дадените фигури, треба секој од броевите да се јавува еднаков број пати. Ако споредиме колку пати се јавува бројот 1 со колку пати се јавува бројот 2 ќе забележеме дека во првиот, четвртиот и секој ред од облик $3k+1$ имаме една единица повеќе отколку двојки, а во останатите бројот на единици и двојки е еднаков, според ова, следува дека бројот на единици и двојки не е еднаков, па не може секој од броевите да се јавува еднаков број пати. Следува дека фигурата не може да се покрие на бараниот начин.

