МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 41

Ристо Малчески
Самоил Малчески
Даниел Велинов

ГЕОМЕТРИСКИ ЗАДАЧИ ЗА НАТПРЕВАРИ ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД VI – IX ОДДЕЛЕНИЕ

Скопје, 2023

Рецензент:
Д-р Катерина Аневска
ФОН универзитет, Скопје

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е збирка од 309 геометриски задачи, повеќето од кои се задавани на математички натпревари во основното образование и тоа на белоруските, босанско-херцеговачките, бугарските, италијанските, македонските, московските, новозеландските, српските, хрватските, холандските, украинските и швајцарските натпревари. Задачите се на ниво на задачите кои се задаваат на регионалните и националните натпревари за учениците од шесто до деветто оделение во деветгодишното основно образование, односно на петто до осмо одделение во осумгодишното основно образование, па затоа оваа збирка задачи првенствено може да послужи за подготовка на учениците токму за ваквиот вид напревари. Самата збирка не содржи теориски резултати, бидејќи за таа намена се доволни статиите и книгите кои се наведени во литературата на крајот од оваа книга.

Задачите во збиркава се поделени во четиринаесет глави и тоа:

1. Отсечки и агли
2. Квадрат и правоаголник
3. Агли, страни и периметар на триаголник
4. Карактеристични точки и линии на триаголник
5. Складни и слични триаголници
6. Примена на Питагоровата теорема
7. Плоштина на триаголник
8. Четириаголник
9. Плоштина на четириаголник
10. Многуаголник
11. Кружница и круг
12. Пребројување на геометрски фигури
13. Геометриски задачи во правоаголен координатен систем
14. Стереометрија.

Повеќето од задачите се детално решени, а само мал број задачи се со кратки решенија, кои се доволни за да се следи идејата на решението.

Затоа, на читателот му препорачуваме сите решенија детално да ги испише. Освен тоа, сакаме да напоменеме дека и покрај вложениот напор задачите не се идеално подредени според тежината на истите, бидејќи за ваков вид задачи тоа практично и не е можно целосно да се направи.

Сметаме дека читателот треба прво самостојно да се обиде да ја реши секоја задача, а потоа да провери дали неговото решение се совпаѓа со понуденото решение, или пак ако не успеал сам да ја реши задачата, да го проучи понуденото решение. Имено, дел од подготовките за натпреварите треба да се одвива токму на самостојно откривање на решенијата на задачите кои претходно биле задавани на различни натпревари, почнувајќи од регионално ниво, па се до Јуниорската балканска математичка олимпијада, која покрај Европскиот математички куп (јуниори), Турнирот на градови (основна и напредна варијанта за 8 и 9 одделение) и Иранската геометриска олимпијада (елементарно ниво), кои се показател за нивото кое треба да го достигнат учениците на возраст до 15,5 години.

Во оваа пригода сакаме да му се заблагодараме на рецензентот д-р Катерина Аневска чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надеваме дека оваа збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците како за регионалните така и за државните натпревари, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика. Овде уште сакаме да напоменеме дека е пожелно во подготовката за престојните натпревари учениците покрај соодветните содржини од другите книги од серијата Математички талент да ги користат и статиите кои во литературата се наведени под редните броеви од [16] до [30].

Како што рековме, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така и од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидеме благодарнни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје Авторите
ноември, 2023 г.

1. ОТСЕЧКИ И АГЛИ

1. Што може да биде пресек на две полуправи? За секој од случаите скицирај по еден пример.

2. Борко сакал да закова шајка на $2\frac{1}{2}\,dm$ од крајот на штица долга $9\frac{1}{4}dm$. По грешка тој ја заковал шајката на $2\frac{1}{2}\,dm$ од другиот крај на штицата. На кое растојание од саканото место е закована шајката?

3. Точките A, B и C лежат на една права, така што B е меѓу A и C. Ако $\overline{AC} = 24\,cm$ и $\overline{AB} : \overline{BC} = 1:2$, определи го растојанието меѓу средините на отсечките AB и AC.

4. Точките C и D на отсечката AB се такви што $\overline{AC} : \overline{BC} = 4:5$ и $\overline{AD} : \overline{DB} = 2:1$. Растојанието меѓу средините на отсечките AC и CD е еднакво на $12\,cm$. Определи го растојанието меѓу средините на отсечките CD и DB.

5. Збирот на три од четирите агли кои се формираат при пресекот на две дадени прави е еднаков на 332°. Определи ја големината на секој од четирите агли.

6. Аголот ~ е поголем од својот комплементен агол за колку што е помал од својот суплементен агол. Пресметај го аголот ~ .

7. Збирот на аглите ~, и ¥ е еднаков на 180°. Аглите ~ и се комплементни, аглите 5 и ¥ се суплементни.Определи ги мерките на аглите ~, и ¥ .

8. Аглите ~ и се суплементни, а аглите и ¥ се комлементни. Збирот на аглите ~ и ¥ е еднаков на 123°. Определи ги зглите ~ , и ¥ .

9. Нека се C и D точки во внатрешноста на $\measuredangle AOB$ такви што важи $5\measuredangle COD = 4\measuredangle AOC$ и $3\measuredangle COD = 2\measuredangle DOB$. Ако $\measuredangle AOB = 105^\circ$, определи го $\measuredangle COD$.

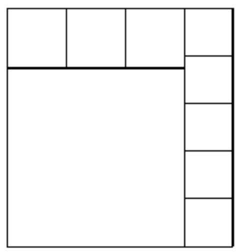
2. КВАДРАТ И ПРАВОАГОЛНИК

1. Периметарот на еден квадрат е еднаков на $12{,}8\,m$. Правоаголник, кај кој едната страна е со должина $6{,}4\,m$ има еднаква плоштина како квадратот. Определи го периметарот на правоаголникот. Која фигура има поголем периметар, квадратот или правоаголникот?

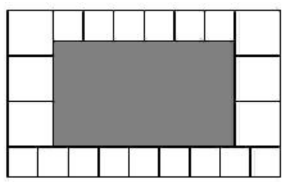
2. Доротеа сака да сошие чаршав за маса во правоаголна форма со димензии $1{,}5\,m$ и $1\,m$. Чаршавот треба да виси по $23\,cm$ од секоја страна, а за подвиткување се потребни по $2\,cm$. Колкава е плоштината на материјалот од кој Доротеа ќе го сошие чаршавот?

3. Правоаголник со димензии $22{,}5\,cm$ и $15{,}6\,cm$ е поделен на два квадрати и еден сив правоаголник, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на сивиот правоаголник.

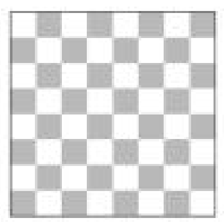
4. Правоаголникот на цртежот десно е составен од 9 квадрати. Периметарот на правоаголникот е еднаков на $234\,cm$. Определи ја неговата плоштина.



5. На цртежот десно е прикажан обоен во сиво правоаголник со периметар $76\,cm$. Правоаголникот е заобиколен со шара направена од два вида квадрати. Шарата и правоаголникот формираат нов правоаголник. Определи ја плоштината на шарата.



6. Шаховска табла 8×8 има плоштина $17\,dm^2$ и $64\,cm^2$. Определи ги плоштината и периметарот на секое поле на таблата, ако растојанието меѓу

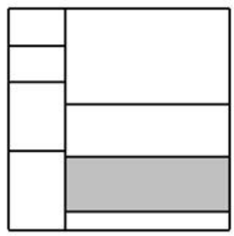


страните на шаховската табла и страните крај-ните полиња се еднакви на $1\,cm$.

7. Од квадрат е исечен квадрат со страна која е за $8\,cm$ помала од страната на дадениот квадрат. Плоштината на добиената фигура е еднаква на $144\,cm^2$. Определи ја плоштината на исечениот квадрат.

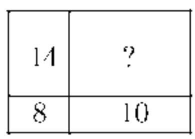
8. Должината на правоаголникот е еднаква на $\frac{6}{5}$ од неговата ширина. Должините на страните на правоаголникот изразени во сантиметри се двоцифрени огледални броеви. Определи ги периметарот и плоштината на овој правоаголник.

9. Квадрат е поделен на осум правоаголници како на цртежот десно. Збирот на периметрите на овие правоаголници е еднаков на $288\,cm$. Определи ја плоштината на сивиот правоаголник, ако неговата подолга страна е три пати подолга од пократката, а пократката страна е четири пати пократка од страната на квадратот.

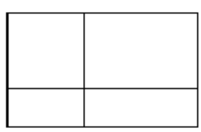


10. Правоаголник со отсечки кои се паралелни на неговите страни е поделен на четири правоаголници. Плоштините на трите помали од овие четири правоаголници се еднакви на $240\,cm^2$, $320\,cm^2$ и $480\,cm^2$. Определи ја плоштината на најголемиот од добиените правоаголници.

11. Правоаголник е поделен на четири правоаголници. Плоштините на три од нив се еднакви на $8\,cm^2$, $10\,cm^2$ и $14\,cm^2$ (цртеж десно). Определи ја плоштината на четвртиот правоаголник.



12. Правоаголникот на цртежот десно е поделен на четири правоаголници. Ако плоштините на три од овие правоаголници се 4, 10 и $25\,cm^2$, колку може да биде плоштината на четвртиот правоаголник?



13. Еден правоаголен двор има ширина која е два пати помала од должината. Оградата на дворот е долга $162\,m$.

а) Кокава е плоштината на дворот?

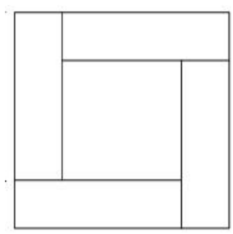
б) Дрводелецот Ѓорѓи треба да направи ограда на дворот. Дали може секаде да стави столбови за оградата на растојание од $2\,m$? А на растојание од $3\,m$? Ако може, колку столбови му се потребни?

в) На колку квадрати со страна $3\,m$ може да се подели дворот?

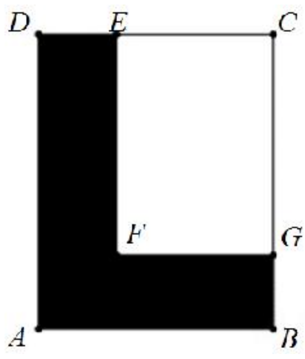
14. Даден е правоаголник со должини на страни $2023\,cm$ и $1309\,cm$. Правоаголникот е поделен на еднакви квадрати со најголема можна страна чија должина изразена во сантиметри е природен број. Определи го збирот на периметрите на делбените квадрати.

15. Лим во форма на правоаголник треба да се расече без да има отпад на правоаголници со страни $25\,cm$ и $35\,cm$ или на квадрати со страни $15\,cm$. Кои се најмалите димензии на лимот за да е можно расекувањето?

16. Голем квадрат е поделен на четири складни правоаголници и еден помал квадрат како што е прикажано на цртежот десно. Ако периметарот на големиот квадрат е за $40\,cm$ поголем од периметарот на помалиот квадрат, а периметарот на помалиот квадрат е за $8\,cm$ поголем од периметарот на секој од четирите складни правоаголници, колкава е разликата на плоштините на големиот и малиот квадрат?



17. На страните BC и CD на правоаголникот $ABCD$ дадени се соодветно точки G и E такви што важи $\overline{DE}=\overline{BG}$ и $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{EC}$. Точката F е внатрешна за правоаголникот $ABCD$ и е таква што $CEFG$ е правоаголник. Ако плоштината на шестаголникот $ABGFED$ (обоениот дел на цртежот десно) е еднаква на плоштината на правоаголникот $CEFG$ (необоениот дел на цртежот



десно), колку пати отсечката BC е подолга од отсечката DE ?

18. Должините на страните на еден правоаголник се разликуваат за $2\,cm$. Ако секоја страна ја зголемиме за $3\,cm$, тогаш плоштината на правоаголникот се зголемува за $105\,cm^2$. Определи ги периметарот и плоштината на овој правоаголник.

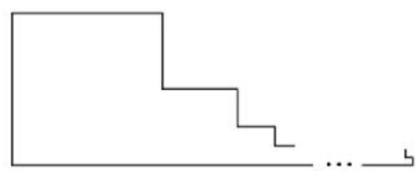
19. Ако збирот на периметрите на два квадрати е еднаков на 8, а разликата на нивните плоштини е еднаква на 3, определи ги должините на неговите страни.

20. Определи ги сите правоаголници чии мерни броеви на страните се природни броеви и кај кои мерните броеви на плоштината и периметарот се еднакви.

21. Пресметај го збирот на сите различни можни периметри кои може да го имаат правоаголниците со плоштина $144\,cm^2$ чии должини на страни изразени во сантиметри се природни броеви.

22. Должините на страните на еден правоаголник, изразени во сантиметри, се природни броеви. Ако страните на овој правоаголник ги зголемиме за $10\,cm$, тогаш неговата плоштина се зголемува два пати. Определи ги димензиите на сите вакви правоаголници.

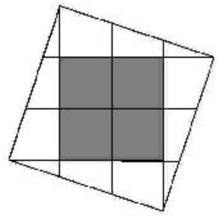
23. Во рамнината е даден квадрат со должина на страна $1024\,cm$. До дадениот квадрат е нацртан квадрат со два пати пократка страна и така се продолжува со цртање на квадрати се додека должините на страните изразени во сантиметри се природни броеви (види цртеж десно).



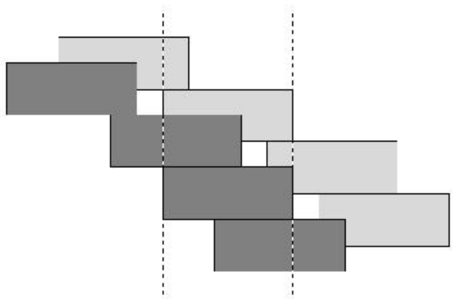
а) Определи го периметарот на фигурата добиена на погоре опишаниот начин.

б) Пресметај ја плоштината на квадратот кој се наоѓа во средината на вака добиената низа квадрати.

24. Секоја страна на квадрат со страна $10\,cm$ со точки е поделена на три еднакви дела. Некои од тие точки се поврзани меѓу себе или со темињата на квадратот како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на сивиот дел од квадратот.



25. Четири светлосиви и четири темносиви листови во форма на правоаголник имаат страни со исти должини кои, изразени во сантиметри, се природни броеви. Листовите се поставени на маса еден до друг така што секој се допира со еднииот или двата соседни листа со иста боја долж дел од својата подолга страна. На тој начин светлосивата и темносивата добиена фигура делумно се преклопуваат и притоа:
- на три места меѓу овие фигури има празнини во форма на квадрат со плоштина $1\,cm^2$,
- вториот светлосив и третиот темносив лист се поставени така што пократките страни им лежат на исти прави (цртеж десно).



Најмалиот правоаголник кој може да се опише околу поставените листови, а притоа неговите страни се паралелни со страните на листовите, има периметар $200\,cm$. Определи ги можните димензии на листовите. Која е најголемата можна плоштина на еден лист?

26. Дијагоналата на голем квадрат со должина на страна $2020\,cm$ Горјан ја покрил со низа зелени квадрати со должина на страна $4\,cm$. Дијагоналите на зелените квадрати лежат на дијагоналата на големиот квадрат, а пресекот на секои два последователни зелени квадрати е квадрат со должина на страна $1\,cm$. Пресметај го периметарот на фигурата која ја формираат зелените квадрати.

27. Дијагоналата на голем квадрат со должина на страна $2020\,cm$ Горјан ја покрил со низа зелени квадрати со должина на страна $4\,cm$. Дијагоналите на зелените квадрати лежат на дијагоналата на големиот квадрат,

рат, а пресекот на секои два последователни зелени квадрати е квадрат со должина на страна $1cm$. Пресметај ја плоштината на фигурата која ја формираат зелените квадрати.

3. АГЛИ, СТРАНИ И ПЕРИМЕТАР НА ТРИАГОЛНИК

1. Должините на две страни на триаголникот ABC се $a = 5,6\,cm$ и $b = 12,8\,cm$. Определи ја:

   а) најголемата, б) најмалата,

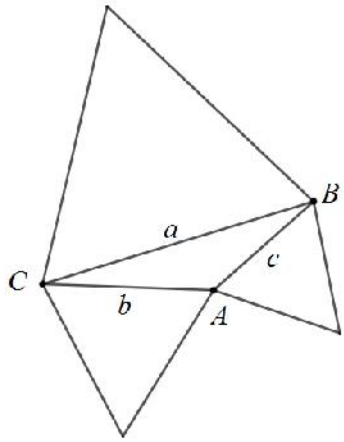
   можна вредност на периметарот на триаголникот, ако должината на неговата трета страна изразена во сантиметри е цел број.

2. Определи го збирот на периметрите на сите меѓусебно нескладни триаголници чиј периметар изразен во сантиметри е природен број, а должините на двете страни му се $7\,cm$ и $12\,cm$.

3. Правоаголник и рамнокрак триаголник имаат еднакви периметри. Ширината на правоаголникот е $6,9\,dm$, а должината му е поголема за $170\,mm$. Определи ја должината на кракот на триаголникот, кој е два пати подолг од основата.

4. Горјан изработува црвени, зелени, сини и жолти знамиња во облик на рамнокраки триаголници. Сите знамиња имаат основа со еднаква должина. Кај црвеното знаме кракот е подолг од основата за $\frac{1}{2}$ од должината на основата. Зеленото знаме има крак кој е подолг од кракот на црвеното знаме за $\frac{1}{3}$ од должината на кракот црвеното знаме. Синото знаме има крак кој е подолг од кракот на зеленото знаме за $\frac{1}{4}$ од должината на кракот на зеленото знаме, а жолтото знаме има крак кој е подолг од кракот на синото знаме за $\frac{1}{4}$ од должината на кракот на синото знаме. Треба да се сошијат 50 знамиња од секоја боја и сите треба да се порабат со трака со сребрена боја. Колку метри сребрена трака се потребни ако се знае дека за работ на црвеното знаме се потребни $40\,cm$ трака?

5. Во триаголникот ABC должината на страната b е за $14\,cm$ помала од должината на страната a и за $4\,cm$ поголема од должината на страната c. Над секоја страна на триаголникот се нацртани рамнострани триаголници, како на цртежот десно. Периметарот на добиената фигура е еднаков на $140\,cm$. Определи ги должините на страните на триаголникот ABC.



6. За должините на страните a,b,c на $\triangle ABC$ е познато дека $c<b<a$, $b-c=2(a-b)$ и $a=2c$. Збирот на реципрочните вредности на должините на страните е $\frac{7}{20}$. Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$.

7. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AC}=\overline{BC}$. Точката O е средина на основата AB. Периметарот на триаголникот ABC е $50\,cm$, а периметарот на триаголникот ADC е $40\,cm$. Определи ја должината на отсечката CD.

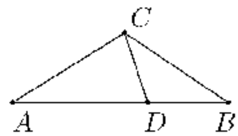
8. Во $\triangle ABC$ симетралата $AL, (L\in BC)$ на $\measuredangle BAC$ ја преполовува тежишната линија CM. Докажи дека $\overline{AB}=2\overline{AC}$.

9. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е еднаков на периметарот на правоаголник со должина $26\,cm$ и ширина $14\,cm$. Определи ги должините на страните на триаголникот, ако една од страните му е еднаква на една од страните на правоаголникот.

10. Даден е тапоаголен $\triangle ABC$ кај кој мерките на сите агли изразени во степени се природни броеви. Симетралата на тапиот агол $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точката D, а подножјето на висината повлечена од темето A е точката N. Точката D е меѓу точките N и B. Мерката на $\measuredangle CBA$ е десет пати поголема од мерката на $\measuredangle DAN$, која изразена во степени, исто така е природен број. Колкава е најголемата можна вредност на мерката на тапиот агол на овој триаголник изразена во степени?

11. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle B = 80^\circ$. Нека D е точка на страната BC таква што $\measuredangle BDA = 70^\circ$ и $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC}$. Определи ја мерката на $\measuredangle ACB$.

12. На страната AB на рамнокракиот $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$, постои точка D таква што $\overline{AD} = \overline{AC}$ и $\overline{DB} = \overline{DC}$. Определи ја мерката на $\measuredangle ACB$.



13. Симетралата на внатрешниот агол кај темето A на $\triangle ABC$ ја сече страната BC во точка A. Нека E е внатрешна точка на страната AB таква што $\measuredangle ADB = 94^\circ, \measuredangle ACE = 38^\circ$ и $\measuredangle CEB = 84^\circ$. Определи која е најкратка, а која е најдолга страна на $\triangle ABC$.

14. Петтината на острио агол ~ на правоаголниот триаголник ABC е еднаква на третината на острио агол на овој триаголник. Спореди ги должините на страните на овој триаголник.

15. Во остроаголниот $\triangle ABC$ аголот ~ е 80°, а висините h_a и h_b се сечат во точката H. Ако $\measuredangle AHB = 126^\circ$, која страна е најкратка, а која е најдолга во $\triangle ABC$.

16. Даден е триаголник ABC. Аголот кој го градат симетралите на надворешните агли во темињата B и C е еднаков на внатрешниот агол во темето A и за 7° е поголем од внатрешниот агол при темето C. Спореди ги должините на страните на триаголникот ABC.

17. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа AB која е пократка од кракот. Нека D е пресечната точка на кракот BC и симетралата на $\measuredangle BAC$. Определи ги аглите на триаголникот ABC ако триаголникот ABD е рамнокрак.

18. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C. Со ~ ’ и ’ да ги означиме надворешните агли во темињата A и B, со-

одветно. Ако важи $\frac{\sim ’}{;}=\frac{4}{5}$, определи ги внатрешните агли на триаголникот ABC.

19. Во разностран триаголник ABC е впишана кружница k со центар O. Конструирани се прави p и q, кои минуваат низ точката O, такви што $p \| AC$ и $q \| BC$. Правата p ја сече страната AB во точката M, а правата q ја сече страната AB во точката N. Докажи дека периметарот на триаголникот OMN е еднаков на должината на страната AB.

20. Даден е квадрат $ABCD$. Нека E е точка од полуправата AB таква што $\measuredangle AED = 22^\circ 30’$. Ако отсечките AC и DE се сечат во точката S, определи ја мерката на $\measuredangle BSE$.

21. За $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC = 40^\circ$, $ABC = 20^\circ$ и $\overline{AB} - \overline{BC} = 10\,cm$. Симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката M. Определи ја должината на отсечката CM.

22. Во триаголникот ABC е повлечена симетралата $BL\,(L \in AC)$ на $\measuredangle ABC$. Ако $\overline{AB} = \overline{BL} = \overline{LC}$, определи ги аглите на триаголникот ABC.

23. Во остроаголниот триаголник ABC разликата на внатрешните агли во темињата A и C е еднаква на 50° и височините повлечени во темињата A и C се сечат во точката H така што $\measuredangle AHC = 110^\circ$. Определи ги големините на аглите на овој триаголник.

24. Даден е $\triangle ABC$ и точка M во неговата внатрешност. Познато е дека $\overline{AM} = \overline{AC}$ и триаголниците ABM, BCM и CAM се рамнокраки. Определи го $\measuredangle ABC$.

25. Даден е триаголник, во кој збирот на двата агли е еднаков на третиот агол, а најголемиот агол се однесува кон еден од другите два агли како $5:1$. Определи ги аглите на овој триаголник.

26. Висината повлечена во темето C го дели $\measuredangle C$ во однос $3:5$, а другите два агли на триаголникот се однесуваат как $7:5$. Определи го $\measuredangle C$.

27. Еден од надворешните агли на $\triangle ABC$ е еднаков на 156° и е за толку поголем од разликата меѓу двата внатрешни несоседни со него агли, за колку што таа разлика е поголема од третиот агол на $\triangle ABC$. Определи го најмалиот агол на $\triangle ABC$.

28. Даден е рамнокрак триаголник ABC со агол при основата еднаков на 50°. Точката D е надворешна за триаголникот и е таква што $\measuredangle DBA = 30^\circ$ и $\measuredangle DCB = 20^\circ$. Определи го $\measuredangle DAB$.

29. Даден е правоаголен триаголник $ABC, \measuredangle ACB = 90^\circ$. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече тежишната линија повлечена од темето C во точката D. Ако $\overline{AC} = \overline{AD}$, определи го $\measuredangle ABC$.

30. Во триаголникот ABC со агол во темето C еднаков на 60°, симетралата на страната AC ја сече страната AB во точката D. Ако $\measuredangle ACD = 2\measuredangle DCB$, определи ги големините на другите два агли на овој триаголник.

31. Даден е рамнокрак триаголник ABC, при што $\overline{AC} = \overline{BC}$. На кракот AC се избрани точки M и N такви што $\measuredangle MBA = \measuredangle CBN$ и $\overline{MN} = \overline{BM}$, при што точката M е меѓу точките A и N. Определи го $\measuredangle NBA$.

32. Во рамнокрак $\triangle ABC$ симетралата на кракот AC и симетралата на $\measuredangle BAC$ се сечат во точка D која припаѓа на кракот BC. Определи ја големината на $\measuredangle CDA$.

33. Во $\triangle ABC$ е повлечена симетралата $BL, L \in AC$ на $\measuredangle ABC$. Ако е познато дека $\measuredangle ALB : \measuredangle CLB = 13:23$, да се определи разликата на $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle CAB$.

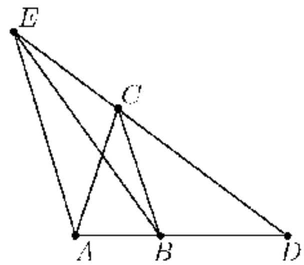
34. Даден е триаголник ABC. Симетралата AP, ($P \in BC$) на $\measuredangle BAC$ ја сече висината CH $(H \in AB)$ во точка D. Ако

$$\measuredangle ABP : \measuredangle APB : \measuredangle BCH = 4:7:2,$$

а) определи го видот на триаголникот DPC,

б) најди ги аглите на триаголникот ABC.

35. Даден е рамнокрак триаголник ABC $(\overline{AC}=\overline{BC})$. Точката D лежи на правата AB и $\overline{BD}=\overline{BC}$, а точката E лежи на правата DC и $\overline{CE}=\overline{CA}$ (цртеж десно).



а) Ако $\measuredangle ACB=20^\circ$, определи ги $\measuredangle ADE$, $\measuredangle AED$, $\measuredangle BEC$ и $\measuredangle ABE$.
б) Ако правите BC и AE се паралелни, докажи дека триаголникот ADE е рамнокрак.

36. Даден е правоаголик $ABCD$ каде $\overline{AB}=2\overline{BC}$. На страната CD е избрана точката M, така што симетралата на $\measuredangle DMB$ минува низ темето A. Определи ја големината на $\measuredangle AMB$.

37. Во триаголникот ABC е $\measuredangle BAC=45^\circ$. Нека точката M на страната AC е таква што $\overline{MC}=2\overline{AM}$ и $\measuredangle ABM=15^\circ$. Определи ја мерката на $\measuredangle ACB$.

38. Даден е $\triangle ABC$. Нека H е подножјето на висината повлечена од темето C. Ако $\overline{CH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ и $\measuredangle BAC=75^\circ$, определи ја мерката на $\measuredangle ABC$.

39. Триаголникот ABC е рамнокрак и симетралата на надворешниот агол во темето B зафаќа со правата AC агол од 15°. Определи ги аглите на триаголникот ABC.

40. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ $(\measuredangle C=90^\circ)$ и точка O во неговата внатрешност. Низ точката O е повлечена права m, паралелна на BC, која ги сече AC во точка M и AB во точка K. Ако $ON\perp BC$ ($N\in BC$), $\overline{OM}=\overline{ON}$ и $\measuredangle CAN=\measuredangle BNK$, определи ги аглите на $\triangle ANK$.

41. Центрите на впишаната и опишаната кружница на рамнокракиот триаголник ABC се симетрични во однос на основата AB. Определи ги аглите на овој триаголник.

42. Точката M е внатрешна за квадратот $ABCD$ и $\measuredangle MAD=60^\circ, \measuredangle MCB=$

15°. Определи ја големината на $\measuredangle MDC$.

43. Нека M е пресекот на симетралата на внатрешниот агол во темето A и страната BC на триагоникот ABC. Ако центарот на впишаната кружница на триаголникот AMB истовремено е и центар на опишаната кружница околку триаголникот ABC, определи ги мерките на аглите на триаголникот ABC.

4. КАРАКТЕРИСТИЧНИ ТОЧКИ И ЛИНИИ НА ТРИАГОЛНИК

1. За $\triangle ABC$ е дадено $\measuredangle ACB = \measuredangle CAB + 90^\circ$. Нека BD и BE (D, E лежат на правата AC) се соодветно внатрешната и надворешната симетрала на $\measuredangle ABC$. Докажи дека $\overline{BD} = \overline{BE}$.

2. Внатре во $\triangle ABC$, на симетралата l на $\measuredangle ABC$, е земена точка M таква што симетралите на отсечките AM и MC се сечат на l. Ако $s_{AM} \cap AB = P$ и $s_{CM} \cap CB = N$, докажи дека $\overline{BP} : \overline{BN} = \overline{BA} : \overline{BC}$.

3. Должините на страните на триаголникот ABC се $\overline{AB} = 125\,cm$, $\overline{AC} = 117\,cm$ и $\overline{BC} = 120\,cm$. Симетралата на внатрешниот агол во темето A ја сече страната BC во точката L, а симетралата на внатрешниот агол во темето B ја сече страната AC во точката K. Нека M и N се подножјата на нормалите повлечени од темето C на правите BK и AL, соодветно. Определи ја должината на отсечката MN.

4. Точките K и L се на страната AB на триаголникот ABC, такви што $\overline{KL} = \overline{BC}$ и $\overline{AK} = \overline{LB}$. Нека M е средина на AC. Докажи дека $\measuredangle KML = 90^\circ$.

5. Нека D е средината на тежишната линија CC_1 на $\triangle ABC$. Правата AD ја сече страната BC во точката M. Ако $\overline{BC} = a$, определи ги должините на отсечките BM и CM.

6. Во рамнокрак триаголник ABC $(\overline{AC} = \overline{BC})$ мерката на аголот при врвот се 108°. Нека E е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle BAC$ и страната BC. Ако D е подножјето на висината повлечена од темето C, докажи дека $\overline{AE} = 2\overline{CD}$.

7. Во триаголникот ABC се повлечени висината $CD\,(D \in AB)$ и тежишната линија CM $(M \in AB)$ и $D \neq M$. Ако $\measuredangle ACD = \measuredangle BCM$, докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.

8. Даден е $\triangle ABC$. На правата AC е избрана точка D таква што $\overline{CD} = 3\overline{CA}$ (точката A е меѓу точките C и D), а на правата BC е избрана точка E, различна од B, таква што $\overline{CE} = \overline{BC}$. Ако $\overline{BD} = \overline{AE}$, докажи дека $\measuredangle BAC = 90^\circ$.

9. Во правоаголниот триаголник $ABC\,(\measuredangle ACB = 90^\circ)$ се повлечени висината $CD\,(D \in AB)$ и тежишната линија CM $(M \in AB)$. Докажи дека $\measuredangle ACD = \measuredangle BCM$.

10. Над катетите AC и BC на правоаголниот триаголник ABC, надвор од триаголникот се конструирани соодветно квадратите $ACPQ$ и $BEFGC$, со центри O_1 и O_2. Нека O е средината на AB. Докажи дека $\triangle OO_2O_1$ е правоаголен и точката C припаѓа на O_2O_1.

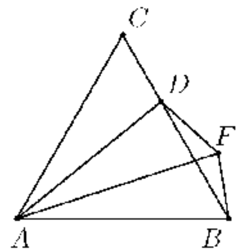
11. Во триаголникот ABC важи $\overline{AB} > \overline{AC}$. Нека D е точка на страната AB таква што важи $\measuredangle ACD = \measuredangle ABC$. Нека точката E е средината на отсечката DB, а точката S е центарот на опишаната кружница околу триаголникот BDC. Ако точката M е средината на отсечката AS, докажи дека важи $\overline{ME} = \overline{MC}$.

12. Конструирај триаголник ABC со периметар $14\,cm$ а мерките на двата внатрешни агли се $52^\circ 30'$ и $67^\circ 30'$.

5. СКЛАДНИ И СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

1. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, ($\overline{AC}=\overline{BC}$). На основата AB е земена точка D таква што $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{DB}$. Нормалата на AB во точката D ја сече AC во точката E, а правата низ D паралелна со AC ја сече BC во точката F. Докажи дека $\overline{CE}=\overline{CF}$.

2. На цртежот десно е даден рамностран триаголник ABC. Точката F е таква што $\overline{AF}=\overline{BC}$ и $\measuredangle CAF=42^\circ$, а точката D пресечната точка на страната BC и симетралата на $\measuredangle CAF$. Определи го $\measuredangle DFB$.



3. Во триаголникот ABC важи $\overline{BC}=2\overline{AC}$. Нека D е точка на страната BC таква што важи $\measuredangle CAD=\measuredangle ABC$. Симетралата на надворешниот агол кај темето C ја сече полуправата AD во точка E. Докажи дека $\overline{AE}=\overline{AB}$.

4. Во внатрешноста на рамнокрак триаголник $ABC\ (\overline{AC}=\overline{BC})$ дадена е точка M таква што $\measuredangle AMB=2\measuredangle ACB$. На отсечката AM е избрана точка N таква што $\measuredangle CNM=\measuredangle ACB$. Докажи дека $\overline{CN}=\overline{BM}+\overline{MN}$.

5. Нека I е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC и нека P,Q,R се точки соодветно на страните AC,AB,BC такви што важи $\overline{AP}=\overline{AQ}, \overline{BQ}=\overline{BR}$. Ако $\measuredangle RIQ=\measuredangle BAC$, докажи дека $RP\perp AC$.

6. Во остроаголниот триаголник ABC симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точката D. Низ D е повлечена права, која ја сече страната AC во точката E така што $\measuredangle CDE=\measuredangle BAC$. Докажи дека $\measuredangle BAC=2\measuredangle DBE$.

7. Околу $\triangle ABC\ (\overline{AC}>\overline{BC})$ е опишана кружница. Симетралата на AB ја

сече кружницата во точката D која е на лакот $\overset{\frown}{AC}$ кој не ја содржи точката B. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од точката D на правата AC. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{BC} + \overline{CE}$.

8. Даден е остроаголен рамнокрак триаголник ABC. Симетралата на кракот BC ја сече полуправата AB во точката M. Нека E е точка на полуправата MC таква што C е меѓу M и E и $\overline{CE} = \overline{MA}$. Докажи дека триаголникот MBE е рамнокрак.

9. Даден е триаголник ABC, во кој $\measuredangle BAC = 30^\circ$ и $\measuredangle ABC = 15^\circ$. Точката L припаѓа на страната AB и $\measuredangle ALC = 60^\circ$. Ако M е пресечната точка на симетралата на AB и правата AC, докажи дека $\overline{AL} = 2\overline{CM}$.

10. Даден е квадрат $ABCD$. На страните BC и CD соодветно се земени точки E и F така, што AF е симетрала на $\measuredangle EAD$. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{DF} + \overline{BE}$.

11. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C и агол од 60° во темето A. Ако D е средина на хипотенузата AB и E е пресекот на симетралата на $\measuredangle CAB$ и катетата BC, докажи дека триаголниците AEC, ADE и BED се складни меѓу себе.

12. Во внатрешноста на рамностран $\triangle ABC$ се избрани точки M и N такви што $\measuredangle ACM = \measuredangle CAM = \measuredangle ABN = \measuredangle BAN = 18^\circ$. Определи го $\measuredangle BMN$.

13. Во $\triangle ABC$, со $\measuredangle ACB = 60^\circ$, симетралата AM ($M \in BC$) на $\measuredangle BAC$ и симетралата BK $(K \in AC)$ на $\measuredangle ABC$ се сечат во точката L. Докажи дека $\overline{LM} = \overline{LK}$.

14. Даден е рамнокрак правоаголен $\triangle ABC$, $\measuredangle C = 90^\circ$. Точките M и N од страната AB се такви што $\measuredangle ACM = \measuredangle BCN = 15^\circ$. Ако нормалата од A повлечена на CN ја сече CM во точката P, а нормалата повлечена од B кон CM ја сече CN во точката Q, докажи дека $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$ и $\overline{AQ} = \overline{BC}$.

15. Во правоаголен триаголник ABC, $\measuredangle ACB = 90^\circ$, симетралите на острите агли ги сечат спротивните катети во точките A' и B'. Нека M и N се подножјата а нормалите повлечени соодветно од точките A' и B' кон хипотенузите. Определи ја големината на $\measuredangle MCN$.

16. Во триаголникот ABC важи

$$\measuredangle BAC = 40^\circ, \measuredangle CBA = 20^\circ \text{ и } \overline{AB} - \overline{BC} = 10\,cm.$$

Симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката M. Определи ја должината на отсечката CM.

17. Правата p ја сече отсечката AB во точката C. Точката D припаѓа на правата p, различна е од C и важи $\overline{AC} = \overline{AD}$. Точката E припаѓа на правата p (C е меѓу E и D) и важи $\overline{EC} = \overline{EB}$. Правата q паралелна на правата p која минува низ точката A и правата r паралелна на правата AB која минува низ точката E се сечат во точката F. Докажи дека $\overline{FB} = \overline{FD}$.

18. Во рамнокрак триаголник ABC аголот наспроти основата AB е еднаков на 80°. На висината над основата на триаголникот избрана е точка D таква што $\measuredangle DBA = 30^\circ$. На отсечката BD е избрана точка T таква што $\measuredangle TAD = 20^\circ$. Определи ја мерката на $\measuredangle TCA$.

19. Во тапоаголен триаголник ABC ($\measuredangle C > 90^\circ$), CD и AM се висини и $\measuredangle A = 45^\circ$.
а) Докажи, дека MD е симетрала на $\measuredangle AMB$.
б) Ако DL ($L \in BC$) е висина во триаголникот BCD, определи ја должината на BL, ако $\measuredangle MDC = 15^\circ$ и $\overline{CL} = a$.

20. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. Нека M, N, P се соодветно средините на страните AB, BC, CA. Над отсечката AP е конструиран рамностран триаголник APK, а над отсечката BN е конструиран рамностран триаголник BNL така што точките B и K се на различни страни од правата AC, а точките A и L се на различни страни од правата BC.

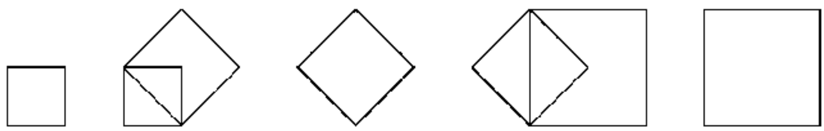
а) Докажи дека триаголникот MKL е рамнокрак.
б) Определи ја мерката на $\measuredangle MKL$.

21. Даден е правоаголник $ABCD$ $(\overline{AB} > \overline{BC})$. Симетралата на дијагоналата AC ја сече страната CD во точката E. Кружницата $k(E, \overline{EA})$ по вторпат ја сече страната AB во точката F. Нека G е подножјето на нормалата повлечена од точката C на правата EF. Докажи дека точката G припаѓа на дијагоналата BD.

22. За аглите на $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ABC = \frac{7}{2}\measuredangle CAB$ и $\measuredangle BCA = \frac{3}{2}\measuredangle CAB$. Симетралата на страната AC ги сече симетралата AD на $\measuredangle CAB$ и страната AB во точките M и K, соодветно. Докажи дека $\triangle BCM$ е рамнокрак и пресметај го периметарот на четириаголникот $BCMK$, ако важи $\overline{AM} + \overline{MK} = 6\,cm$.

6. ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

1. Во низа од квадрати првиот квадрат има страна $1cm$. Должината на страната на секој следен квадрат е еднаква на должината на дијагоналата на претходниот квадрат. На долните цртежи е прикажано како се добиваат вториот и третиот квадрат. Определи ја должината на страната на 11-тиот квадрат.



2. Продавницата во која Пабло го купил телевизорот продава само телевизори кај кои должината и ширината на екраните се во однос 7:4. Ако дијагоналата на екранот на телевизорот на Пабло е еднаква на $10\sqrt{65}\ cm$, определи ги должината и ширината на екранот.

3. Даден е правоаголен триаголник чии катети се со должини $6\,cm$ и $12\,cm$. Околу овој триаголник е опишана кружница, а околу кружницата е опишан квадрат. Пресметај ја плоштината на овој квадрат.

4. Во правоаголникот $ABCD\ (\overline{AB} > \overline{BC})$ точката M е средина на страната CD. Правата BM ја сече правата AD во точката N. Ако $\overline{DN} = 4$ и $\overline{BM} = 5$, определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

5. Должините на тежишните линии соодветни на катетите во правоаголен триаголник се $\sqrt{52}cm$ и $\sqrt{73}\ cm$. Определи го растојанието меѓу тежиштето и центарот на опишаната кружница на овој триаголник.

6. Во правоаголен триаголник ABC точката D е средина на хипотенузата, а E и F се точки на катетите AC и BC соодветно такви што $DE \perp DF$. Докажи дека $\overline{EF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BF}^2$.

7. Точките D и E се соодветно средини на страните BC и CA на триаголникот ABC. Отсечките AD и BE се заемно нормални. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}$.

8. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\measuredangle ABC = 60^\circ$. Низ средината M на AC е повлечена нормала на AC, која ја сече AB во точка P така што $\measuredangle ACP : \measuredangle PCB = 3:2$. Ако $\overline{BP} = 3\,cm$, определи ги должините на страните на $\triangle ABC$.

9. Околу кружница со радиус 3 е опишан рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AC} = \overline{BC}$ и $\measuredangle BAC = 30^\circ$. Определи ги страните на овој триаголник.

10. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C и $\measuredangle BAC > \measuredangle ABC$. Висината h повлечена кон хипотенузата AB ја дели AB на две отсечки со должини $9\,cm$ и $16\,cm$. Во темето A е повлечена права која минува низ средината на висината h и ја сече страната BC во точката E. Пресметај ја должината на отсечката AE.

11. Над хипотенузата BC на правоаголниот триаголник ABC е конструиран квадрат $BCDE$, во надворешноста на триаголникот. Нека O е центарот на овој квадрат. Ако m и n се соодветно должините на катетите AB и AC, определи ја должината на отсечката OA.

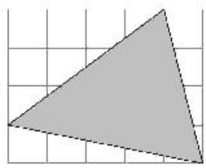
12. Даден е четириаголник $ABCD$ таков што $AB \parallel CD$, $\overline{AB} = 25\,cm$, $\overline{CD} = 11\,cm$, $\overline{BC} = 15\,cm$ и $\overline{AD} = 13\,cm$. Докажи дека $\measuredangle ACB = 90^\circ$.

7. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

1. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со катети $\overline{AB} = 8\,cm$ и $\overline{BC} = 6\,cm$. Ако D и E се средините соодветно на AB и BC, определи ја плоштината на $\triangle CDE$.

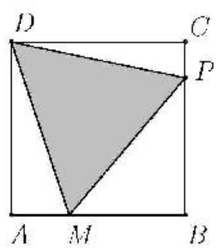
2. Даден е $\triangle ABC$. На страната AB е избрана точка D таква што $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, на страната BC е избрана точка E таква што $\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{BC}$ и на страната CA е избрана точка F таква што $\overline{AF} = \frac{1}{4}\overline{AC}$. Ако отсечките EF и CD се сечат во точката O и плоштината на четириаголникот $ADOF$ е еднаква на $50\,cm^2$, определи ја плоштината на триаголникот OCE.

3. Должината на страната на едно мало квадратче на цртежот десно е еднаква на $2\,cm$. Определи ја плоштината на осенчениот триаголник.

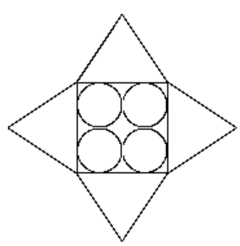


4. Даден е квадрат $ABCD$ со страна $3\,cm$. На страните AB и AD се земени соодветно точки M и N такви што $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ и $\overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{AD}$. Определи ја плоштината на $\triangle NMC$.

5. Квадратот $ABCD$ има страна $12\,cm$. Точката $M \in AB$ е таква што $\overline{AM} : \overline{MB} = 1:2$. Точката P припаѓа на страната BC и е таква што плоштините на триаголниците AMD и DPC се однесуваат како $4:3$ (цртеж десно). Определи ја плоштината на триаголникот MPD.



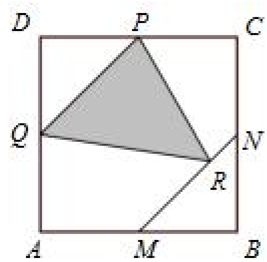
6. Ѕвездата на цртежот десно е составена од четири рамнострани триаголници и квадрат. Радиусот на секоја од четирите кружници е еднаков



на $5\,cm$. Определи ги периметарот и плошти-ната на ѕвездата.

7. Квадрат има плоштина $36\,cm^2$. Секоја од страните е поделена на три еднакви делови со должина $x\,cm$. Од темињата на квадратот се отсе-чени четири рамнокраки правоаголни триаголници со катети $x\,cm$. Определи ја плоштината на преостанатиот дел.

8. Пресметај ја плоштината на триаголникот PQR прикажан на цртежот десно, ако должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на $12\,cm$, точките M, N, P и Q се средини на страните на квадратот, а точката R е произвол-на точка од отсечката MN.

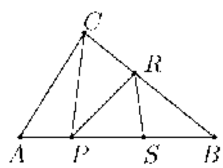


9. Нека за страните на правоаголник $ABCD$, со периметар $60\,cm$, важи $\overline{AD}:\overline{AB}=5:7$.
а) Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.
б) Определи ја плоштината на триаголникот AEF, каде точката E лежи на страната CD, а точката F ја дели страната AB во однос $\overline{AF}:\overline{FB}=2:5$.

10. Даден е квадрат $ABCD$. Точките M, N и P се средини соодветно на страните AB, CD и BC. Нека K е пресечната точка на отсечките MN и DP. Докажи дека $P_{DMK}=P_{NKPC}$.

11. Во правоаголниот триаголник ABC со страни $\overline{AB}=8\,cm, \overline{BC}=6\,cm$ и $\overline{CA}=10\,cm$ е повлечена симетралата $CD, D\in AB$ на $\measuredangle ACB$. Определи ја плоштината на $\triangle ADC$.

12. На цртежот десно отсечките CP, PR и RS го делат триаголникот ABC на четири триагол-ници со еднакви плоштини. Ако $\overline{AB}=24\,cm$, да се определи должината на отсечката PS.



13. Плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на $12\,cm^2$. Точката P е средина на страната BC, а точката N припаѓа на страната AC и е таква што $\overline{AN} = 2\overline{NC}$. Определи ја плоштината на $\triangle PNC$.

14. Во триаголникот ABC точките M, N и P се соодветно на отсечките AB, MC и NA, при што важи $\overline{AM} = 2\overline{BM}$, $\overline{MN} = 2\overline{CN}$ и $\overline{NP} = 2\overline{AP}$. Определи ја плоштината на триаголникот MNP ако плоштината на триаголникот BMC е $108\,cm^2$.

15. На страната AB на триаголникот ABC е земена точка E.
а) Докажи дека $P_{AEC} : P_{BEC} = \overline{AE} : \overline{BE}$.
б) На правата CE е избрана точка D, при што E е меѓу C и D. Плоштините на триаголниците AEC, BEC и ABD се соодветно 12, 18 и $20\,cm^2$. Определи ја плоштината на $\triangle DBC$.

16. На страните AB и AC на триаголникот ABC соодветно се означени точки D и E така што $DE \parallel BC$ и $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{BC}$. Ако $\overline{AB} = 6\,cm$, определи ја AD.

17. Даден е $\triangle ABC$ со плоштина $1\,cm^2$. На страната BC на $\triangle ABC$ е избрана точка P, а потоа на отсечката AP е избрана точка Q. Ако $\frac{\overline{CP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = \frac{1}{3}$, определи ја плоштината на $\triangle ABQ$.

18. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Низ центарот O на триаголникот е повлечена права l, паралелна на AB. Ако h_1, h_2, h_3 се растојанијата од произволна точка M на правата l соодветно до страните AB, BC, CA, докажи дека $h_1 = \frac{h_2 + h_3}{2}$.

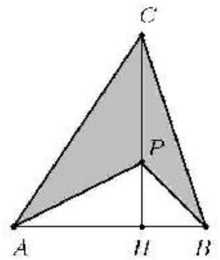
19. На страната CD на правоаголникот $ABCD$ е избрана точка E. Отсечката AE ја сече дијагоналата BD во точката F. Ако плоштината на триаголникот ABF е $50\,cm^2$, а плоштината на триаголникот ADF е $30\,cm^2$, определи ја плоштината на триаголникот DEF.

20. Две висини на триаголник се поголеми или еднакви на страните кон кои се повлечени. Определи ги аглите на овој триаголник.

21. Даден е правоаголник $ABCD$ со плоштина $1680\,cm^2$. Симетралата на $\measuredangle DBC$ ги сече дијагоналата AC во точка L и страната CD во точка N, при што важи $\overline{BN}=\overline{DN}$. Определи ја плоштината на $\triangle NLC$.

22. Даден е рамнокрак триаголник $ABC\,(\overline{AC}=\overline{BC}=24\,cm)$. Висината повлечена во темето C е за 20% подолга од висината повлечена во темето A. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот.

23. Во триаголникот ABC страната AB и висината CH се со должина $6\,cm$. Точката P ја дели CH во однос $\overline{CP}:\overline{PH}=2:1$. Определи ја плоштината на обоениот дел на цртежот десно.



24. Даден е триаголник ABC со страни $\overline{AB}=24\,cm$ и $\overline{BC}=15\,cm$. На страната AB се земени точки M и N (M е меѓу A и N), а на страната BC точки P и Q (P е меѓу B и Q), така што плоштините на триаголниците ACQ, AMQ, MPQ, MNP, BNP се еднакви. Определи ги должините на отсечките AM, MN, NB, CQ, QP, PB.

25. Во $\triangle ABC$ точките M, N, P, Q и R се соодветно средини на отсечките AC, BC, MN, AP и BP. Ако плоштината на $\triangle ABC$ е S, изрази ја плоштината на $\triangle QRP$ преку S.

26. Во триаголникот ABC на страната AC е земена точка M, а на страната BC е земена точка N. Отсечките BM и AN се сечат во точката O. Определи ја плоштината на триаголникот MNC, ако плоштините на триаголниците AOM, AOB и BON се соодветно $75\,cm^2, 45\,cm^2$ и $15\,cm^2$.

27. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle CAB=3\measuredangle ABC$. Нека L е пресечната

точка на симетралата на $\measuredangle ACB$ со страната AB и нека

$$P_{\triangle ALC} : P_{\triangle LBC} = 1:2,$$

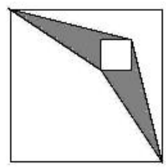
каде $P_{\triangle ALC}$ и $P_{\triangle LBC}$ се соодветно плоштините на $\triangle ALC$ и $\triangle LBC$. Определи ги големините на аглите на $\triangle ABC$

28. Определи ги сите правоаголни триаголници чии мерни броеви на страните се природни броеви и кај кои мерните броеви на плоштината и периметарот се еднакви.

29. Плоштината на $\triangle ABC$ е 27. На страната BC е избрана точка D низ која е повлечена права паралелна со страната AB која страната AC ја сече во точката F и права паралелна со страната AC која страната AB ја сече во точката E. Разликата на плоштините на $\triangle EBD$ и $\triangle FDC$ е 9. Пресметај ги плоштините на $\triangle EBD$ и $\triangle FDC$.

30. Нека $ABCD$ е квадрат со страна $31\,cm$. На страната AB е земена точка E таква што $\overline{AE} = 11\,cm$, на страната BC е земена точка F таква што $\overline{BF} = 14\,cm$, а на страната CD е земена точка G таква што $\overline{CG} = 10\,cm$. Определи ја плоштината на триаголникот EFG.

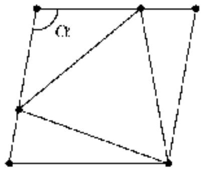
31. Квадрат со страна 2 е поставен во квадрат со страна 7, при што соодветните страни на двата квадрати се паралелни. Определи ја плоштината на обоениот дел на големиот квадрат.



32. Во правоаголен триаголник во кој катетите се однесуваат како $5:12$, кружницата со дијаметар MN каде M и N се средините на катетите, ја сече хипотенузата во точките P и Q. Определи го односот во кој точките P и Q ја делат хипотенузата.

33. Во триаголникот ABC е впишана кружница. Тангентата на оваа кружница паралелна со страната AB ги сече страните BC и AC соодветно во точките M и N. Определи ја должината на отсечката MN ако должините на страните на триаголникот ABC се: $\overline{AB} = 14\,cm$, $\overline{BC} = 13\,cm$, $\overline{CA} = 15\,cm$.

8. ЧЕТИРИАГОЛНИК



1. Во ромб со страна a е вписан рамностран триаголник со страна a (цртеж десно). Определи го аголот ~ .

2. Од подножјето D на висината CD во триаголникот ABC се повлечени нормали кон BC и AC, кои ги сечат соодветно во точките M и N. Нека $\measuredangle CAB = 60^\circ, \measuredangle CBA = 45^\circ$, а H е ортоцентарот на $\triangle MNC$. Ако O средината на CD, определи го $\measuredangle OCH$.

3. Даден е $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB =$ ¥ и $\measuredangle ABC =$. Симетралата на $\measuredangle ACB$ по втор пат ја сече кружницата опишана околу $\triangle ABC$ во точката D. На лакот $\overset{\frown}{BC}$, кој не ја содржи точката D, земена е точка E таква што $\overline{BE} = \overline{AC}$. Определи ги аглите на четириаголникот $CDBE$.

4. Во триаголникот ABC отсечките AM и BN се симетрали на агли $(M \in BC, N \in AC)$, а O е нивната пресечна точка. Точките C, N, O, M лежат на иста кружница. Определи го $\measuredangle ACB$.

5. Даден е рамнокрак трапез $ABCD\,(AB \| CD)$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката O. Точките P, Q, R се средини соодветно на AO, BC, OD и $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC}$. Определи ги аглите на $\triangle PQR$.

6. Основата на рамнокракиот трапез $ABCD\,(AB \| CD)$ е дијаметар на опишаната кружница околу трапезот. Определи ги мерките на аглите на трапезот ако $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

7. Дијагоналите во рамнокракиот трапез $ABCD\,(AB \| CD)$ се сечат во точката O. Точките M и N се средините соодветно на отсечките OA и BC. Определи ја големината на $\measuredangle AOD$ ако $\overline{MN} = \overline{BN}$.

8. Едниот агол на правоаголен триаголник е еднаков на 50°. Нека X, Y и Z се точките во кои впишаната кружница во триаголникот ги допира неговите страни. Пресметај ги големиннте на аглите на $\triangle XYZ$.

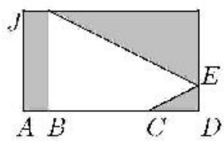
9. Даден е четириаголник со должини на страни $a, 2a, \frac{2a}{3}$ и $\frac{a}{2}$. Определи го најмалиот можен природен број a, за кој периметарот на овој четириаголник е природен број, кој е делив со 10.

10. Ромб $ABCD$ има страна $6\,cm$ и агол од 60° кај темето A. Од темето B се конструирани висините на ромбот BE и BF. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот BEF.

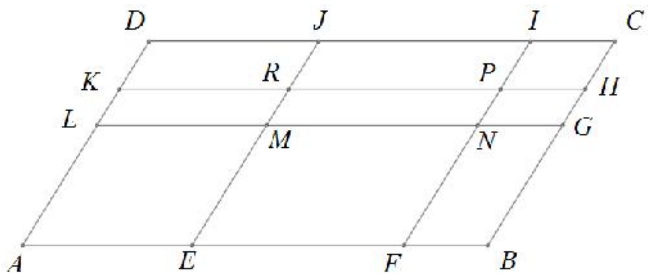
11. Дијагоналите AC и BD на паралелограмот $ABCD$ се сечат во точката O. Точката E е тежиште на триаголникот ABD. На отсечката OC е дадена точка G таква што $\overline{OG} : \overline{GC} = 1:2$. Докажи дека четириаголникот $EBGD$ е паралелограм.

12. Во трапезот $ABCD$ важи $AD \| BC$, $\measuredangle ABC = 60^\circ$, $\measuredangle BCD = 30^\circ$ и $\overline{BC} = 7$. Нека E, M, F, N се средини на страните AB, BC, CD, DA. Ако $\overline{MN} = 3$, пресметај ја должината на отсечката EF.

13. Матео и Филип си делат правоаголна торта. Матео си пресекол едно правоаголно и две триаголни парчиња, како што е прикажано на цртежот десно, при што $\overline{AB} = \overline{DE}$ и $\overline{BC} = \overline{AJ}$. Филип го добил преостанатиот дел од тортата. Кој добил повеќе торта, Матео или Филип?



14. Паралелограмот $ABCD$ со отсечките LG, KH, EJ и FI е поделен на паралелограми (види цртеж). Периметарот на паралелограмот $KRJD$ е еднаков на $32\,cm$, на паралелограмот $EFNM$ е $5\,dm$, а на паралелограмот $ABCD$ е $1\,m$. Пресметај го периметарот на паралелограмот $NGHP$.



15. Точката D е средина на страната BC на $\triangle ABC$, а точката E припаѓа на страната AC и е таква што важи $\measuredangle ADB = \measuredangle CDE$. Кој има поголем периметар, четириаголникот $ABDE$ или триаголникот ADC ?

16. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека E е точка на полуправата DB таква што AB е симетрала на $\measuredangle CAE$ и нека $F = CE \cap AB$. Докажи дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1$.

17. Даден е паралелограм $ABCD$. Симетралата на $\measuredangle DAB$ ги сече страната CD во точка T и продолжението на страната BC во точка M. Ако $\overline{DT} = 5\,cm$ и $\overline{CM} = 2\,cm$, определи го периметарот на $ABCD$.

18. Во рамнокрак триаголник $ABC\ (\overline{AC} = \overline{BC})$ со $\measuredangle ACB = 120^\circ$ е повлечена висината $CD\ (D \in AB)$. На CD е земена точка E таква што $\overline{CE} : \overline{ED} = 1:2$. Правата AE ја сече BC во точката F. Ако $CF = 3\,cm$, определи ја должината на висината CD.

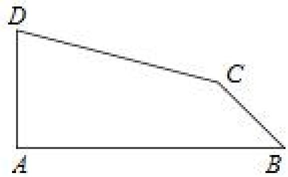
19. Периметарот на тангентен рамнокракиот трапез $ABCD\ (AB \| CD)$ е еднаков на p. Определи ја должината на средната линија (отсечка) на трапезот.

20. Средната линија на трапезот $ABCD\ (AB \| CD)$ е долга $12\,cm$. Точките C_1, D_1, C_2, D_2 се соодветно средини на отсечките BD, AC, BD_1, AC_1. Определи ја должината на отсечката C_2D_2.

21. Во трапезот $ABCD$ должината на средната линија е $16\,cm$ и е еднаква на дијагоналата AC. Дијагоналите на трапезот се заемно нормални и

AC е поделена од пресечната точка на дијагоналите O во однос $3:1$. Определи ги основите на трапезот.

22. Во четириаголникот $ABCD$ (цртеж десно) важи $AD \perp AB$ и $\measuredangle ABC = 45^\circ$. Ако $\overline{AB} = 15\, cm$, $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\ cm$ и $\overline{AD} = 8\, cm$, пресметај ја должината на страната CD.



23. Во трапезот $ABCD$ дадени се краците $\overline{AD} = 3\, cm$ и $\overline{BC} = 4\, cm$, по-кратката основа е $\overline{DC} = 4\, cm$ и дијагоналата $\overline{AC} = 4\, cm$. Определи ја должината на дијагоналата BD.

24. Даден е трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB} = 5\, cm$ и $\overline{CD} = 3\, cm$. Дијагоналата AC е нормална на кракот BC, а дијагоналата BD го преполовува аголот при долната основа. Определи ја висината на овој трапез.

25. Во четириаголникот $ABCD$ дијагоналите AC и BD се заемно нормални и се сечат во точката S. Со M, N, P, Q да ги означиме подножјата на нормалите повлечени од точката S на страните AB, BC, CD, DA, редоследно. Докажи дека важи
$$\frac{1}{\overline{SM}^2} + \frac{1}{\overline{SP}^2} = \frac{1}{\overline{SN}^2} + \frac{1}{\overline{SQ}^2}.$$

26. Во $\triangle ABC$ отсечките $AE\ (E \in BC)$ и $CD\ (D \in AB)$ се соодветно симетрали на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ACD$, а DE е средна отсечка во $\triangle ABC$. Докажи дека $\triangle ABC$ е рамностран.

27. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$, чии дијагонали се сечат во точката O и важи $\measuredangle AOD = 60^\circ$. Нека T е внатрешна точка на триаголникот BOC таква што $\overline{AT} = \overline{BT}, \overline{CT} = \overline{DT}$ и $\measuredangle ATB = \measuredangle CTD$. Ако K, L, M се редоследно средините на страните AB, BC, CD, докажи дека триаголникот KLM е рамностран.

28. Даден е правоаголен $\triangle ABC, \measuredangle ACB = 90^\circ$, $\measuredangle CAB = 30^\circ$ и хипотенуза

$\overline{AB} = 8\,cm$. Нека CD и CM ($D, M \in AB$) се соодветно висината и тежишната линија. Низ точката D е повлечена права m, нормална на тежишната линија CM, која катетата AC ја сече во точката E, и права p, паралелна на катетата BC, која ја сече AC во точката F. Определи ги должините на отсечките ME и DF.

29. Даден е трапез $ABCD\,(AB \parallel CD, \overline{AB} > \overline{CD})$. Кружницата чиј дијаметар е помалата основа на трапезот ги сече дијагоналите AC и BD соодветно во нивните средини M и N. Правите DM и CN се сечат во точката P, а дијагоналите AC и BD во точката H. Докажи, дека трапезот $ABCD$ е рамнокрак и правата HP е нормална на AB и CD.

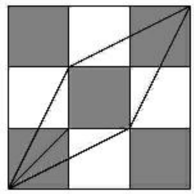
30. Во трапезот $ABCD\,(AB \parallel CD)$ средната отсечка е еднаква на $a\,cm$ и е еднаква на дијагоналата AC. Дијагоналите на трапезот се заемно нормални и AC со пресечната точка O е поделена во однос $3:1$. Определи ги основите на трапезот.

31. Во трапезот $ABCD$ важи $\measuredangle ABD = 30^\circ$. Правата l која минува низ точката C и е паралелна на BD е нормална на AD, ја сече полуправата AD во точката E и притоа важи $\overline{AD} : \overline{DE} = m : n$. Определи ги должините на основите на трапезот ако должината на средната линија е k.

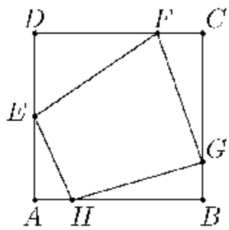
32. Докажи, дека подножјата на висините, повлечени од две спротивни темиња на паралелограм кон правите на кои лежат неговите страни, се темиња на правоаголник.

33. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со центар на опишана кружница O и $\overline{BC} < \overline{AB}$. Симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката D. Симетралата на страната AC ја сече опишаната кружница на $\triangle BOD$ во точката E. Правата DE по втор пат ја сече опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката F. Докажи дека правите CF, OE и AB се сечат во една точка.

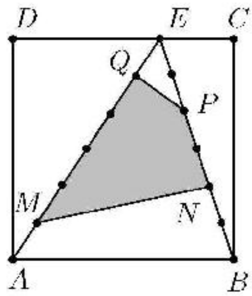
9. ПЛОШТИНА НА ЧЕТИРИАГОЛНИК



1. Квадрат кој е поделен на девет помали квадрати и е шаховски обоен како што е прикажано на цртежот десно. Потоа од квадратот е исечен ромб. Колкав дел од ромбот е обоен во сиво?



2. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна $120\,mm$. Точката E е средина на страната AD, точката F на страната DC е таква што $\overline{DF} = 2\overline{FC}$, точката G на страната CB е таква што $\overline{CG} = 3\overline{GB}$ и точката H на страната BA е таква што $\overline{BH} = 4\overline{HA}$. Определи ја плоштината на четириаголникот $EFGH$.



3. Даден е квадрат $ABCD$ со страна $12\,cm$ и точка E на страната CD. Отсечките AE и BE се поделени на по 6 еднакви делови, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.

4. На страните AB и BC на правоаголникот $ABCD$ се дадени соодветно точките E и F за кои важи $\overline{AB} = \frac{7}{3}\overline{EB}$ и $\overline{BC} = \frac{3}{2}\overline{BF}$. Ако $\overline{AB} = 14\,cm$ и $\overline{BC} = 9\,cm$, колкав дел од плоштината на правоаголникот $ABCD$ е плоштината на четириаголникот $EBFD$.

5. Квадратот $ABCD$ е поделен со дијагоналата BD и отсечките $EF \parallel AB$ и $GH \parallel AD$ на седум делови. Пресечните точки на BD со EF и GH да ги означиме соодветно со I и J, а $EF \cap GH = K$. Ако плоштините на $GBIK$, BFI и $IFCHJ$ се соодветно еднакви на 90, 50 и 160, определи ја плоштината на квадратот $ABCD$.

6. Нека H е средината на страната CD на квадратот $ABCD$ чија плош-

тина е $36\,cm^2$. Точката F е пресекот на дијагоналите AC и BD, точката E е пресекот отсечките AH и BD, а точката G е пресекот на отсечките AC и BH. Определи ја плоштината на четириаголникот $EFGH$.

7. На страните CD и DA на квадратот $ABCD$ соодветно се избрани точките K и L.
   а) Докажи дека $P_{BCL} : P_{BCK} = P_{LCD} : P_{LCK}$.
   б) Нека отсечките BK и CL се сечат во точката M. Ако плоштината на $\triangle CKM$ е 48, плоштината на $\triangle BCM$ е 72 и плоштината на четириаголникот $DLMK$ е е 77, определи ја плоштината на четириаголникот $ABML$.

8. Нека $ABCD$ е правоаголник чии должини на страни изразени во сантиметри се природни броеви. Точката P е средина на страната BC, а точката B' е осносиметрична слика на точката B во однос на правата AP. Ако периметарот на четириаголникот $ABPB'$ е еднаков на $15\,cm$, определи ги најмалата и најголемата можна вредност на плоштината на правоаголникот $ABCD$.

9. Во триаголник ABC со плоштина $980\,cm^2$ точките M и N се средини соодветно на отсечките AB и CM, а точките P и Q се внатрешни за отсечките AN и BN и ги делат во однос $1:6$, сметајќи од N. Определи ја плоштината на четириаголникот $PMQN$.

10. Даден е правоаголник $ABCD$, $\overline{AB} = 20\,cm$ и $\overline{BC} = 12\,cm$. На правата BC е избрана точка Z таква што $\overline{CZ} > 8\,cm$ и C е меѓу Z и B. Точката E е внатрешна за правоаголникот и се наоѓа на растојание $6\,cm$ од страната AB и од страната AD. Ако правата EZ ги сече AB и CD соодветно во точките X и Y, да се определи плоштината на четириаголникот $AXYD$.

11. Даден е правоаголник $ABCD$. Квадратот $DEFG$ е таков што точката D е темето на правоаголникот, E припаѓа на страната AB, F припаѓа на страната BC и $\measuredangle BEF = 30^\circ$. Ако плоштината на квадратот

$DEFG$ е еднаква на $36\,cm^2$, пресметај ги плоштината и периметарот на пресекот на правоаголникот $ABCD$ и квадратот $DEFG$.

12. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол при темето C и плоштина 6. За катетите AC и BC важи $\overline{AC} > \overline{BC}$ и $\overline{AB} = 5$. Кружница со центар C ги сече висината повлечена кон хипотенузата AB во нејзината средина M, катетата AC во точката L и катетата BC во точката N. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABNL$.

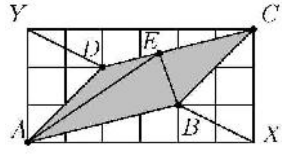
13. Триаголник има страна $48\,cm$ и висина повлечена кон неа $0,5\,dm$. Определи го периметарот на паралелограм со висини $0,12\,m$ и $0,8\,dm$, кој има плоштина $1,2$ пати поголема од плоштината на триаголникот.

14. Даден е ромб со дијагонала $90\,cm$ и плоштина $5400\,cm^2$. Определи го радиусот на впишаната кружница во овој ромб.

15. Точката M е средина на страната CD на паралелограмот $ABCD$, а точката P е средина на отсечката AM.
а) Правата DP ја сече страната AB во точката N. Докажи дека $\overline{DP} = \overline{PN}$.
б) Правата BP ја сече страната AD во точката Q. Определи го односот $\overline{AQ} : \overline{QD}$.

16. Плоштината на четириаголникот $ABCD$ е еднаква на S. Определи ја плоштината на паралелограмот чии страни се еднакви и паралелни на дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$.

17. На страната CD на паралелограмот $ABCD$ на цртежот десно е избрана точката E. Ако квадратчињата на мрежата имаат должина на страна $1\,cm$, определи ја плоштината на $\triangle ABE$.



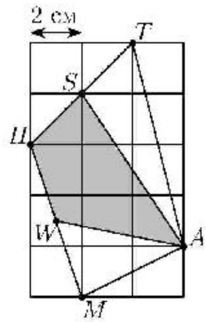
18. Точките M, N и P лежат соодветно на страните BC, BD и дијагоналата на паралелограмот $ABCD$ при што $PM \parallel AB$ и $PN \parallel AD$. От-

сечките AM и AN ја сечат BD соодветно во точките E и F. Докажи дека $P_{AEF} = P_{EBM} + P_{FND}$.

19. Даден е паралелограм $ABCD$. Точката E е на продолжението на страната BC и е таква што $\overline{BC}:\overline{CE} = 2:1$, а точката F е на продолжението на страната AB и е таква што $\overline{AB}:\overline{BF} = 3:1$. Определи ја плоштината P на паралелограмот $ABCD$, ако е познато дека плоштината на триаголникот DEF е за $10\,cm^2$ помала од P.

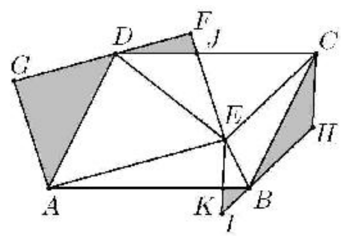
20. Даден е ромб $ABCD$ $(\measuredangle BAD < 90^\circ)$ со страна a и дијагонали d' и d''. Определи ги аглите на ромбот ако $a^2 = d'd''$.

21. На цртежот десно четириаголникот $MATH$ е нацртан во квадратна мрежа. Точките W и S се средини на страните MH и HT, соодветно. Определи ја плоштината на четириаголникот $WASH$.



22. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека точката M е средина на страната CD, а точката N е средина на страната AD. Правите AM и BN се сечат во точката P. Колкав дел од плоштината на паралелограмот $ABCD$ е плоштината на триаголникот ANP?

23. Во паралелограм $ABCD$ е земена внатрешна точка E и се конструирани паралелограми $AEFG$ и $CEIH$ така, што B лежи на HI и D лежи на GF (цртеж десно).



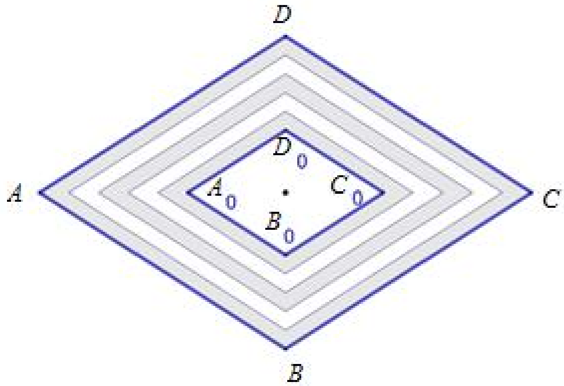
а) Докажи, дека збирот на плоштините на $AEFG$ и $CEIH$ е еднаков на плоштината на $ABCD$.

б) Ако $\triangle CEJ$ и $\triangle AKE$ имаат плоштини соодветно 20 и 14, определи ја плоштината на обоениот дел од цртежот.

24. На страната CD на паралелограмот $ABCD$ и избрана точка произволна точка M. Точката P припаѓа на отсечката AM, а отсечките

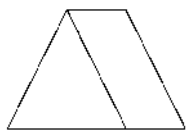
BM и CP се сечат во точката Q. Докажи дека плоштината на триаголникот BPQ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците DPM и CMQ.

25. Ромбот $A_0B_0C_0D_0$ се наоѓа внатре во ромбот $ABCD$ така што страните им се паралелни, а центрите им се совпаѓаат. Отсечките AA_0, BB_0, CC_0, DD_0 се поделени на пет еднакви отсечки. Добиените делбени точки се поврзани со отсечки паралелни со страните на дадените ромбови и така се добиени четири нови ромба. Плоштината на ромбот $ABCD$ е еднаква на $2250\,cm^2$, а плоштината на ромбот $A_0B_0C_0D_0$ е еднаква на $810\,cm^2$. Колкава е плоштината на обоената површина на цртежот десно?

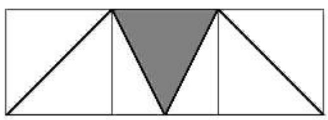


26. Во паралелограмот $ABCD$, со плоштина S, точката M е средина на страната AB, а точката N е средина на страната BC. Отсечките AN и CM се сечат во точката O. Определи ја плоштината на триаголникот AMO.

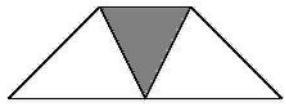
27. Трапез е поделен на паралелограм и триаголник, кои имаат еднакви плоштини (цртеж десно). Ако должината на големата основа на трапезот е еднаква на $36\,cm$, определи ја должината на малата основа.



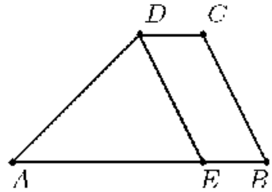
28. Во квадратна мрежа е конструиран рамнокрак трапез, како што е прикажано на цртежот десно. Ако плоштината на обоениот триаголник е еднаква на $18\,cm^2$, определи ги плоштината и периметарот на трапезот.



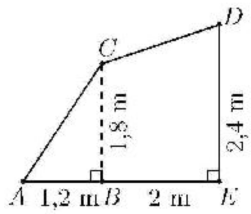
29. Во рамнокракиот трапез на цртежот десно основите се однесуваат како $1:3$. Колку проценти од плоштината на трапезот е плоштината на сивиот триголник?



30. Трапезот $ABCD$ прикажан на цртежот десно има плоштина $18\,cm^2$ и основа $\overline{CD}=4\,cm$. Точката E од основата AB е таква што $BCDE$ е паралелограм и $\overline{AE}=\frac{3}{4}\overline{AB}$. Определи ја должината на поголемата основа AB, висината на трапезот и плоштината на паралелограмот $BCDE$.



31. Користејќи ги податоците на цртежот пресметај ја плоштината на дадената фигура.



32. Даден е трапез со основи $50\,cm$ и $14\,cm$, а краци $25\,cm$ и $29\,cm$. Определи ја плоштината на овој трапез.

33. Даден е трапез $ABCD$ со поголема основа AB. Правата низ C, паралелна на AD, ги сече дијагоналата BD во точката M и основата AB во точката N. Докажи дека $P_{AMD}=P_{DBC}$.

34. Периметарот на трапезот е еднаков на $135\,cm$. Подолгиот крак има должина $36\,cm$ и со пократката основа зафаќа агол еднаков на 150°. Пократкиот крак е еднаков на пократката основа и неговата должина е еднаква на 60% од должината на подолгата основа. Определи ја плоштината на овој трапез.

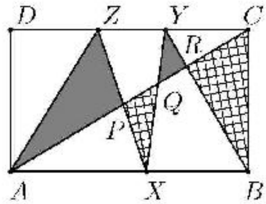
35. Даден е трапез $ABCD$ во кој е впишана кружница која подолгата основа AB ја допира во точката G така што $\overline{AG}=15\,cm$ и $\overline{BG}=10\,cm$, а пократката основа е $\overline{CD}=8\,cm$. Пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$.

36. Правоаголникот $ABCD$ има плоштина $2015\,cm^2$. На страната AB е

избрана точка X, а на страната CD се избрани точките Y и Z (цртеж десно).

а) Определи ја плоштината на трапезот $ABYZ$, ако плоштината на триаголникот XYZ е еднаква на $201{,}5\,cm^2$.

б) Докажи дека вкупната плоштина на сивите триаголници на цртежот е еднаква на вкупната плоштина на штрафираните триаголници.



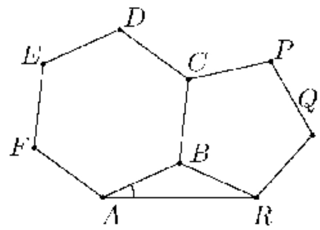
37. Аглите на поголемата основа на трапезот се по 60°, а неговиот периметар е $200\,cm$. Определи ја должината на поголемата основа така што плоштината на трапезот ќе биде најголема можна.

38. Во четириаголникот $ABCD$ важи $\overline{AB}=6\,cm, \overline{AD}=4\,cm$, $\measuredangle ADC=90^\circ$ и $\measuredangle DAB=\measuredangle ABC=60^\circ$. Определи ги должините на дијагоналите и плоштината на четириаголникот $ABCD$.

39. Точката O од внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ е таква, што растојанијата од O до четирите темиња на $ABCD$ се еднакви (во некој редослед) на 1, 2, 4 и 7 сантиметри. Определи ја најголемата можна плоштина на четириаголникот $ABCD$.

10. МНОГУАГОЛНИК

1. Дадени се правилен шестаголник $ABC\,DEF$ и правилен петаголник $BCPQR$ кои се наоѓаат од различни страни на правата BC. Определи го $\measuredangle BAR$.



2. Даден е правилен осумаголник $ABCDEFGH$. Симетралата на $\measuredangle ABC$ и дијагоналата AD се сечат во точката S. Определи го $\measuredangle ASB$.

3. а) Колку темиња има правилен многуаголник, кај кој бројот на дијагоналите е 1004 пати поголем од бројот на страните?
   б) Дали постои правилен многуаголник, кај кој бројот на дијагоналите е за 1004 поголем од бројот на страните?

4. Нека $ABCD$ е квадрат, а точките E и F се средини на страните BC и CD. Дијагоналата BD на квадратот $ABCD$ ги сече отсечките AE и AF редоследно во точките G и H. Докажи дека плоштината на петаголникот $CFHGE$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците ABG и AHD.

5. Плоштината на правилниот шестаголник $ABCDEF$ е еднаква на 1. Определи ја плоштината на четириаголникот $ACDE$.

6. Правилниот шестаголник $ABCDEF$ има плоштина $60\,cm^2$. Ако G е пресекот на дијагоналите AC и BE, определи ја плоштината на триагоникот ABG.

7. Нека $ABCDEF$ е правилен шестаголник со страна $1cm$. Со X,Y,Z редоследно да ги означиме средините на страните AB,CD,EF. Пресметај ги периметарот и плоштината на шестаголникот кој се добива како пресек на триаголниците ACE и XYZ.

8. Најкратката дијагонала на правилниот дванаесетаголник $A_1A_2...A_{12}$ е со должина $\sqrt{6-\sqrt{3}}\ cm$. Определи ја плоштината на петаголникот $A_1A_4A_5A_6A_9$.

11. КРУЖНИЦА И КРУГ

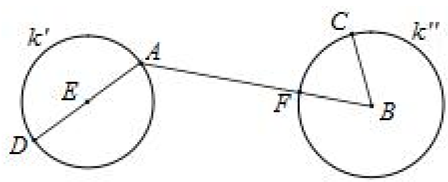
1. Паровите точки A и A_1, B и B_1 се симетрични во однос на правата l. Докажи, дека овие четири точки или лежат на една кружница или лежат на една права.

2. На страната AB на триаголникот ABC, $\overline{AB} > \overline{BC}$ се избрани точките D и E такви што $\overline{DE} = \overline{BC}$ и $\overline{AD} = \overline{BE}$ (D е меѓу A и E). Ако F е средината на страната AC, докажи дека $\measuredangle DFE = 90^\circ$.

3. На тетивата AB на кружницата k е земена точка C таква што $\overline{AC} = 2\overline{CB}$. Тетивата DE минува низ точката C и е нормална на тетивата AB. Точката F е средина на отсечката AC. Докажи дека $DF \perp AE$ и $EF \perp AD$.

4. Дадени се отсечките AB и CD. Отсечката AB се гледа од точките C и D под агол од 30°. Отсечката CD се гледа од точките A и B под агол од 60°. Определи ја должината на отсечката AB, ако должината на отсечката CD е еднаква на $10\sqrt{3}\,cm$.

5. На дадениот цртеж точката E е центар на кружницата k', а точката B е центар на кружницата k''. Ако радиусот на кружницата k' е еднаков на $13\,cm$, отсечката AB е долга $53\,cm$ и искршената линија $DABC$ е долга $1\,m$, определи ја должината на отсечката AF.



6. На дијаметарот AB на кружницата k избрана е произволна точка C. Точките P и Q на кружницата k се од иста страна на дијаметарот AB и се такви што $\measuredangle ACP = \measuredangle PCQ = \measuredangle QCB = 60^\circ$. Докажи дека должината на тетивата PQ не зависи од изборот на точката C.

7. Две кружници со еднакви радиуси се сечат во точките A и B. Низ точката A е повлечена права која не е нормална на AB и која по втор пат ги сече кружниците во точките C и D, а низ точката B е повлечена права нормална на CD, која ги сече кружниците во точките E и F. Докажи дека точките C,D,E,F се темиња на делтоид.

8. Две кружници со еднакви радиуси се сечат во точките A и B. Низ A е повлечена права која по втор пат ги сече кружниците во точките C и D, а низ B права нормална на CD која ги сече кружниците во точките E и F. Докажи дека точките C,D,E,F се темиња на ромб.

9. Дадени се $\triangle ADC$ со страна $\overline{AC}=1$ и кружници $k_1(A)$ и $k_2(C)$, кои се сечат во точката D. Произволна права низ точката D по втор пат ги сече кружниците k_1 и k_2 соодветно во точките M и N.

   а) Докажи дека симетралите на отсечките MN минуваат низ една иста точка.

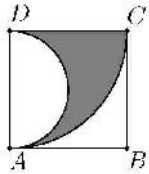
   б) Определи ја најголемата можна должина на отсечката MN.

10. Нека A и B се две точки на кружницата $k_1(C,r)$ кои не се дијаметрално спротивни. Правата p минува низ точката C и е паралелна на правата AB, а правата q минува низ точката A и е паралелна на правата BC. Нека D е пресечната точка на правата q и кружницата $k_2(A,\overline{AB})$. Докажи дека p и DB се сечат на кружницата k_1.

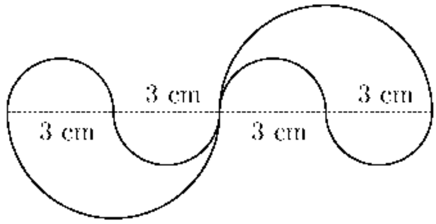
11. Матеа од лист хартија со димензии $148\,mm \times 210\,mm$ исекла два круга со дијаметар $10\,cm$ и четири круга со дијаметар $4\,cm$. Останатиот дел од листот останал неискористен. Колку проценти од листот искористила Матеа?

12. Во рамнокрак правоаголен триаголник ABC со катети $\overline{AC}=\overline{BC}=1\,cm$ е вписана полукружница k со центар на катетата AC. Оваа полукружница го содржи темето C и ја допира хипотенузата AB. Определи ја должината на радиусот r на k.

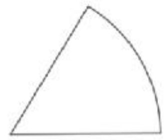
13. Во квадрат $ABCD$ со страна се конструирани лак со центар D и радиус $2\,dm$ и полукружница со дијаметар AD, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ги периметарот и плоштината на обоениот дел од квадратот.



14. Определи ја плоштината на фигурата прикажана на цртежот десно.

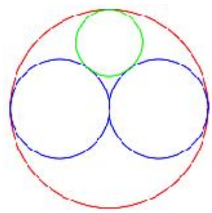


15. На училишното игралиште е нацртан голем круг. Средината на кругот е точката O, а на работ се означени точките A, B и C. Притоа аглите $\measuredangle AOB$ и $\measuredangle BOC$ се остри, а отсечките OA и OB се заемно нормални. Делот од кругот ограничен со отсечките OA, OB и кружниот лак $\overset{\frown}{AB}$ е обоен зелено, а делот ограничен со отсечките OB, OC и кружниот лак $\overset{\frown}{BC}$ е обоен портокалово. Андреј со своите стапала измерил дека периметарот на кругот е 240 стапала и дека периметарот на зелениот дел е за 18 стапала поголем од периме-тарот на портокаловиот дел. Ако плоштината на целиот круг е $72\,m^2$, колкава е плоштината на портокаловиот дел?

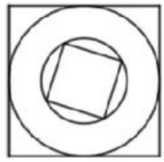


16. Даден е квадрат $ABCD$ околу кој е опишана кружница. Конструираме нов квадрат $EFGH$ така што темињата E и F се наоѓаат на страната AB на квадратот $ABCD$, а темињата G и H на лакот $\overset{\frown}{AB}$ на опишаната кружница. Определи го односот на плоштините на двата квадрати.

17. На цртежот десно се прикажани четири кружници такви што секоја од нив ги допира преостанатите три кружници. Најголемата кружница има радиус $2\,cm$, а секоја од двете средни кружници има радиус $1\,cm$. Определи го радиусот на најмалата од четирите кружници.



18. Дадени се две концентрични кружници k_1 и k_2 со радиуси R и r ($R > r$). Околу поголемата кружница е опишан квадрат, а во помалата кружница е впишан квадрат како на цртежот десно. Односот на плоштините на кружниот прстен и квадратниот прстен (геометриската фигура меѓу двата квадрати) е $\frac{\circledR}{10}$.



а) Пресметај го односот на плоштините на помалиот и поголемиот круг.

б) Докажи дека постои правилен многуаголник таков што k_1 и k_2 се соодветно неговите опишана и вписана кружница.

19. Во внатрешноста на $\measuredangle AOB = 90^\circ$ е земена точка P. Конструирани се две еднакви кружници $k_2(O_2)$ и $k_1(O_1)$ така, што k_2 ги допира полуправите OA и OP соодветно во точките K и M, а k_1 ги допира полуправите OB и OP соодветно во точките N и Q. Нека $\overline{O_1M} \cap \overline{OA} = T$. Ако $O_2 \in KQ$ и $\overline{QM} : \overline{MO_1} = q$, определи го односот $\overline{QT} : \overline{O_2O_1}$.

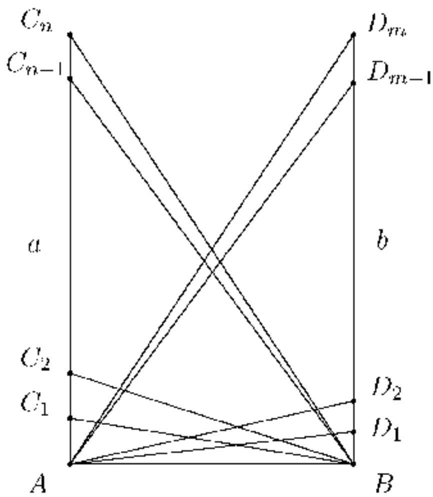
12. ПРЕБРОЈУВАЊЕ НА ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

1. Колку отсечки постојат на отсечка на која заедно со крајните точки се означени $n+1$ точка?

2. На цртежот десно полуправите a и b се нормални на правата AB. Нека $C_1, C_2, ..., C_n$ и $D_1, D_2, ..., D_m$ се такви точки соодветно на a и b, што

$$\measuredangle ABC_1 = \measuredangle C_1BC_2 = ... = \measuredangle C_{n-1}BC_n = 5^\circ,$$

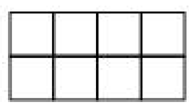
$$\measuredangle BAD_1 = \measuredangle D_1AD_2 = ... = \measuredangle D_{m-1}AD_m = 3^\circ,$$



каде n и m се најголемите природни броеви, за кои тоа е можно. Определи го бројот на триаголниците со темиња A и B и некои од пресечните точки на полуправите AD_j и BC_i, $j = 1, 2, ..., m$, $i = 1, 2, ..., n$. Колку од овие триаголници се рамнокраки со основа AB, а колку се правоаголни со хипотенуза AB.

3. На страната AB на правоаголникот $ABCD$ се избрани неколку точки, на страните BC и DA се избрани по четири точки, а на страната CD се избрани 5 точки. Ниту една од избраните точки не е теме на дадениот правоаголник. Користејќи ги избраните точки како темиња може да се нацртаат точно 4040 четириаголници такви што најмногу едно теме припаѓа на страната AB. Колку точки се избрани на страната AB.

4. Осум еднакви квадрати се наредени во правоаголни (цртеж десно). Збирот на плоштините на сите квадрати кои може да се забележат на цртежот е $80\, cm^2$.



Определи го збирот на плоштините на сите правоаголници, кои не се квадрати, а кои може да се воочат на дадениот цртеж.

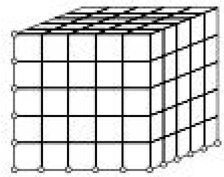
5. Колку правоаголници се определени со правоаголна $m\times n$ мрежа?

6. Колку правоаголници се определени со квадратна $n\times n$ мрежа?

7. Колку квадрати се определени во квадратна $n\times n$ мрежа?

8. Колку квадрати се определени во правоаголна $m\times n$ мрежа?

9. Колку коцки се определени во коцкаста $n\times n\times n$ мрежа. (На цртежот десно е прикажана коцкаста $5\times 5\times 5$ мрежа.)



10. Колку квадари се определени со тридимензионална правоаголна $m\times n\times r$ мрежа?

11. Колку квадари се определени со коцкаста $n\times n\times n$ мрежа?

13. ГЕОМЕТРИСКИ ЗАДАЧИ ВО ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

1. Во правоаголен координатен систем е даден $\triangle ABC$ чии темиња се $A(-20,0)$, $B(20,0)$ и $C(0,40)$. Определи го бројот на точките со целобројни координати кои лежат внатре или на страните на $\triangle ABC$.

2. Во координатен систем се означени точките $A(-1,-4)$ и $B(11,1)$. Точката $M(1,1)$ е средина на отсечката AC. Определи ги координатите на точката C и пресметај ја плоштината на триаголникот ABC.

3. Во правоаголен координатен систем во рамнина со должина на единичната отсечка $2\,cm$ е нацртан квадрат. Определи ги периметарот и плоштината на квадратот ако точката $(8,2)$ е едно негово теме, а точката $(2,-4)$ е пресекот на неговите дијагонали.

4. Во правоаголен координатен систем се дадени точките $A(1,5)$, $B(9,5)$ и $C(1,k)$,при што отсечките AB и AC имаат еднакви должини. Ако D е симетричната точка на точката B во однос на апсцисната оска, определи ја плоштината на четириаголникот $CDBA$.

5. Во кординатен систем со единечна отсечка $a\,cm$ се дадени точки M,N,P,Q,T како што е прикажано на долниот цртеж. Плоштината на петаголникот $MNPQT$ е $98\,cm^2$. Определи ја a и пресметај ја плоштината на четириаголникот чии темиња се точките: $A(-4a,-2a)$, $B(4a,-2a), C(6a,7a), D(-2a,7a)$.

6. Дадени се точки $A(0,4)$ и $B(-1,5)$. На правата $y=-x$ определи точка P таква што збирот на должините на отсечките AP и BP ќе биде најмал.

7. Точките A_1, B_1 и C_1 се симетрични во однос на ординатната оска

соодветно на точките $A(5;2), B(1;4)$ и $C(3;6)$. Точката V припаѓа на ординатната оска и нејзината ордината е збир од аритметичките средини на координатите на секоја од точките A, B и C. Определи ја плоштината на многуаголникот $OABCVCC_1BC_1AC_1$, каде O е координатниот почеток на Декартовиот координатен систем.

8. Во координатна рамнина е даден рамнокрак $\triangle ABC$ со темиња $A(2,1)$, $B(6,1)$ и $C(4,5)$. Определи ги равенките на сите прави кои се паралелни со некој од краците и го делат триаголникот на два дела со еднакви плоштини.

14. СТЕРЕОМЕТРИЈА

1. Паралелните прави a и b се разминувачки со правата c. Точките A, B, C припаѓаат соодветно на правите a, b, c. Кој е најголемиот можен број рамнини определен со овие три прави и три точки?

2. Марија се игра со модели на геометриски тела потопувајќи ги во сад во форма на квадар полн со вода. Таа има по еден модел на коцка, цилиндар и пирамида. Ако во садот ги стави коцката и цилиндарот, нивото на водата се подигнува за $5\,cm$ повеќе отколку ако ја стави само пирамидата. Ако во садот ги стави коцката и пирамидата, нивото на водата се подигнува дури за $10\,cm$ повеќе отколку ако го стави само цилиндарот. Кога во садот ќе ги стави пирамидата и цилиндарот, нивото на водата останува исто како и кога во садот ќе ја стави само коцката. За колку сантиметри ќе се подигне нивото на водата во садот ако Марија во него ги стави коцката, пирамидата и цилиндарот?

3. Точките A и B се наоѓаат од различни страни на рамнината $\sim$. Точката A од рамнината $\sim$ е оддалечена $4\,cm$, а точката B од рамнината $\sim$ е оддалечена $8\,cm$. Определи ја должината на отсечката AB, ако должината на нејзината ортогонална проекција на рамнината $\sim$ е еднаква на $9\,cm$.

4. Дали може правоаголник со димензии $4\,cm$ и $1{,}5\,cm$ да се расече на два дела, од кои може да се состави мрежа на коцка?

5. Во аквариум во форма на коцка со раб $6\,dm$ е ставена коцка со раб $3\,dm$. Аквариумот е наполнет со вода, по што е извадена металната коцка. Определи ја висината на водата во аквариумот.

6. Базен има форма на правоаголен паралелопипед со димензии $9\,m, 16\,m$ и $2\,m$. Базенот се полни од цевка, која има капацитет од $12\,m^3$ на час. За колку часа ќе се наполни базенот?

7. Илија расекол мермерна коцка со волумен $1\,m^3$ на помали коцки со волумен $1\,dm^3$ и добиените коцки ги наредил по должината на неговата градина така што направил патека широка $4\,dm$. Колку метри била долга градината на Илија?

8. Дрвен квадар со рабови 72 *dm*, 96 *dm* и 120 *dm* е поделен на еднакви коцки, со најголем раб, при што должината на работ е природен број. Добиените коцки се наредени една врз друга, во столб. Колку метри е висок така добиениот столб?

9. Од паралелопипеди со димензии $4\,cm$, $6\,cm$ и $2\,cm$ е составена коцка. Определи го најмалиот можен волумен на ваква коцка?

10. Кутија има форма на правоаголен паралелопипед. Периметрите на три нејзини ѕида се $14\,cm$, $10\,cm$ и $20\,cm$. Определи го волуменот на кутијата.

11. Должините на рабовите на правоаголен паралелопипед, изразени во сантиметри, се три последователни природни броеви. Волуменот на паралелопипедот и збирот на должините на трите различни раба се изразени со еден ист број. Кој е тој број?

12. Фирма произведува комплети од 12 еднакви коцки со должина на раб $5\,cm$. Коцките од секој комплет треба да се спакуваат во картонска кутија во форма на паралелопипед. Колкава е најмалата плоштина на кутија за пакување на еден комплет?

13. Аквариум има форма на правоаголен паралелопипед со висина $5\,dm$, а основата му е квадрат. Колу литри собира аквариумот ако околната површина е со плоштина $0,6\,m^2$?

14. Од три дрвени коцки е составен правоаголен паралелопипед со волумен $375\,cm^3$. Определи ја плоштината на овој паралелопипед.

15. Андреј и Горјан направиле картонски кутии во форма на правоаголни паралелопипеди. Дното на кутијата на Андреј е квадрат со страна

$4\,cm$, а дното на кутијата на Горјан е квадрат со страна $5\,cm$. Кутијата на Андреј е висока $5\,cm$ и има иста околна плоштина како кутијата на Горјан. Кое момче направило кутија со поголем волумен?

16. Должините на рабовите на дрвен квадар се $8\,cm, 10\,cm$ и $15\,cm$. Од две негови темиња е исечена по една коцка чии должини на рабови се природни броеви изразени во сантиметри. Прво од квадарот е исечена една коцка со најголем можен волумен, а потоа е исечена една коцка со најмал можен волумен. Колкав процент од волуменот на квадратот е исечен?

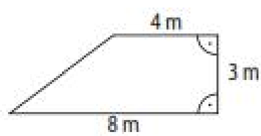
17. Должините на страните на еден квадар изразени во сантиметри се различни природни броеви, а неговиот волумен е еднаков на $70\,cm^3$. Колкава е најголемата можна плоштина на овој квадар?

18. На коцка со раб долг $10\,cm$ е поставена правилна четиристрана призма така што темињата на основата се средините на рабовите на еден од ѕидовите на коцката. Определи го волуменот на добиеното тело ако висината на призмата е еднаква на работ на коцката.

19. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со должина на раб $1\,cm$. Точката P е на просторната дијагонала AC_1 и е таква што $BP \perp AC_1$. Определи ги плоштината и волуменот на пирамидата $ABCDP$.

20. Основата на права призма е правоаголен триаголник со катети $3\,cm$ и $4\,cm$. Ако плоштината на омотачот на призмата е еднаква на $72\,cm^2$, определи го волуменот на оваа призма.

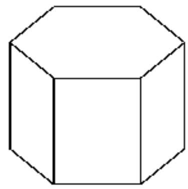
21. За основа на бетонски столб кој има форма на права призма, треба да се ископа дупка длабока $1,5\,m$ (основата е прикажана на цртежот десно). За колку часови дупката ќе ја ископаат три работници ако секој од нив копа по $0,75\,m^3$ на час.



22. Основата на права четиристрана призма е ромб со должина на страна

$12\,cm$ и остар агол 60°. Определи го волуменот на оваа призма ако нејзината висина е еднаква на половина од подолгата дијагонала на основата.

23. Периметарот на основата на правилна шестстрана призма е за 20% поголем од периметарот на еден од ѕидовите на омотачот. Плоштината на омотачот на призмата е $225\,cm^2$. Определи го волуменот на оваа призма.



24. Дадена е правилна тристрана призма $ABCA'B'C'$. Нека D е точка на работ AA' таква што $\overline{AD}:\overline{DA'}=4:1$. Нека E и F се точките осно-симетрични на темињата B' и C' во однос на правата BC. Во кој однос рамнината DEF го дели волуменот на призмата.

25. Бочниот ѕид на правилна тристрана пирамида е рамнокрак триаголник со агол при врвот еднаков на 30°. Должината на бочниот раб е еднаква на $8\,cm$. Пресметај ја плоштината на пирамидата.

26. Основата на тристрана пирамида $ABCS$ е рамнокрак правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето B, а врвот S со нормална проекција на рамнината на основата се проектира во точката D, која е средина на работ AC. Ако бочниот ѕид ACS е правоаголен триаголник со прав агол во темето S и $\overline{SD}=\sqrt{2}\ cm$, пресметај ја плоштината на пирамидата $ABCS$.

27. Основниот раб на правилна тристрана пирамида е со должина x, а бочниот ѕид зафаќа со рамнината на основата агол од 60°. Определи го x ако мерниот број на плоштината на пирамидата е еднаков на мерниот број на волуменот на пирамидата.

28. Во сад во форма на квадар има $1,2\,l$ млеко. Висината на млекото во квадарот е $24\,cm$. Ако може да се постави да лежи на вториот ѕид, висината на млекото ќе се намали за 75%, а ако може да се постави да лежи на третиот ѕид, висината на млекото ќе се намали уште за 12,5%.

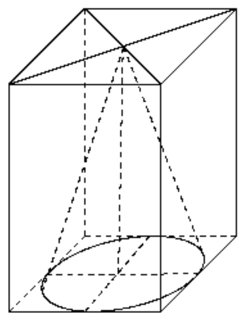
а) Колку млеко треба да се налее за да се дополни квадарот?
б) Дали млекото ќе прелее, ако во садот се стави метален цилиндар со најголем можен волумен?

29. Две свеќи со цилиндрична форма имаат еднаков волумен. Едната свеќа има дијаметар $6\,cm$ и висина $8\,cm$. Колку е висока другата свеќа, ако нејзиниот дијаметар е $4\,cm$.

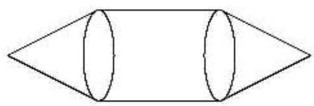
30. Срцето ја пумпа крвта во аортата, чиј внатрешен радиус е $1{,}2\,cm$. Аортата се разгранува на 32 главни артерии. Ако брзината на крвта во аортата е $25\,cm/s$, определи ја брзината на крвта во 32-те главни артерии. Крвта не го менува волуменот и внатрешниот радиус на секоја главна артерија е $0{,}2\,cm$.

31. Бочната површина на еден конус е полукруг со дијаметар $12\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на овој конус.

32. Прав кружен конус е поставен во правилна четириаголна призма како што е прикажано на цртежот десно. Волуменот на призмата е еднаков на $60\,cm^3$. Определи го волуменот на конусот.



33. Картонски круг со радиус $12\,cm$ е поделен по еден негов дијаметар. Секој од добиените делови со селотејп е залепен во конус без основа така што картонот не се препокрива. На ист начин конусите се залепени за цилиндар, како што е прикажано на цртежот десно. Ако волуменот на цилиндарот е еднаков на 180® cm^3. Определи ја плоштината на ова тело.



РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. ОТСЕЧКИ И АГЛИ

1. Што може да биде пресек на две полуправи? За секој од случаите скицирај по еден пример.
Решение. Пресек на две полуправи може да биде:
а) полуправа, б) отсечка, в) точка, г) празно множество

2. Борко сакал да закова шајка на $2\frac{1}{2}\,dm$ од крајот на штица долга $9\frac{1}{4}\,dm$. По грешка тој ја заковал шајката на $2\frac{1}{2}\,dm$ од другиот крај на штицата. На кое растојание од саканото место е закована шајката?
Решение. Растојанието меѓу местото каде што шајката е закована и местото каде истата требало да биде закована е еднакво на
$$9\frac{1}{4}-(2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2})=9\frac{1}{4}-5=4\frac{1}{4}\,dm.$$

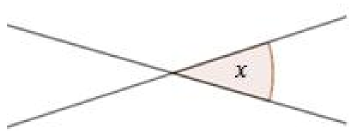
3. Точките A, B и C лежат на една права, така што B е меѓу A и C. Ако $\overline{AC}=24\,cm$ и $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$, определи го растојанието меѓу средините на отсечките AB и AC.
Решение. Од $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$, следува $\overline{BC}=2\overline{AB}$, па затоа
$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AB}+2\overline{AB}=3\overline{AB},$$
т.е. $\overline{AB}=\frac{1}{3}\overline{AC}=8\,cm$ и $\overline{BC}=2\cdot 8=16\,cm$. Средината на AB е на $4\,cm$ од A, а средината на AC е на $12\,cm$ од A. Растојанието меѓу двете средини е еднакво на $12-4=8\,cm$.

4. Точките C и D на отсечката AB се такви што $\overline{AC}:\overline{BC}=4:5$ и $\overline{AD}:\overline{DB}=2:1$. Растојанието меѓу средините на отсечките AC и CD е еднакво на $12\,cm$. Определи го растојанието меѓу средините на отсечките CD и DB.
Решение. Отсечката AB да ја поделиме на девет еднакви дела. Од

$\overline{AC}:\overline{BC}=4:5$ следува $\overline{AC}=4x, \overline{BC}=5x$, а од $\overline{AD}:\overline{DB}=2:1$ следува $\overline{AD}=6x, \overline{DB}=3x$. Затоа, $\overline{CD}=\overline{AD}-\overline{AC}=2x$. Сега, растојанието меѓу средините на AC и CD е $2x+x=3x$, па затоа $3x=12$, т.е. $x=4\,cm$. Конечно, растојанието меѓу средините на CD и DB е еднакво на $x+\frac{3x}{2}=\frac{5x}{2}=10\,cm$.

5. Збирот на три од четирите агли кои се формираат при пресекот на две дадени прави е еднаков на 332°. Определи ја големината на секој од четирите агли.

Решение. Нека големината на четвртиот агол е x. Тогаш $x=360^\circ-332^\circ=28^\circ$, што значи дека четвртиот агол е еден од двата остри агли (цртеж десно). Сега, големината на тапиот агол е $180^\circ-28^\circ=152^\circ$. Значи, големините на четирите агли се $18^\circ, 152^\circ, 28^\circ, 152^\circ$.



6. Аголот $\sim$ е поголем од својот комплементен агол за колку што е помал од својот суплементен агол. Пресметај го аголот $\sim$.

Решение. Комплементниот агол на аголот $\sim$ е еднаков на $90^\circ-\sim$, а неговиот суплементен агол е еднаков на $180^\circ-\sim$. Од условот на задачата последователно следува

$$\sim-(90^\circ-\sim)=(180^\circ-\sim)-\sim,$$

$$2\sim-90^\circ=180^\circ-2\sim,$$

$$4\sim=270^\circ,$$

$$\sim=67^\circ\,30'.$$

7. Збирот на аглите $\sim$, и ¥ е еднаков на 180°. Аглите $\sim$ и се комплементни, аглите 5 и ¥ се суплементни.Определи ги мерките на аглите $\sim$, и ¥ .

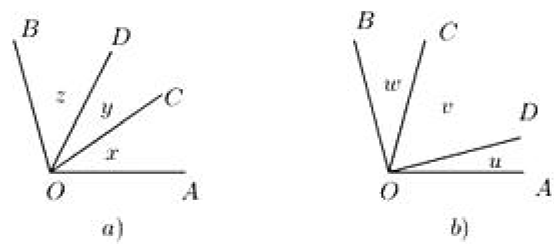
Решение. Имаме, $\sim+\ +$¥ $=180^\circ$ и како $\sim$ и се комплементни , т.е. $\sim+\ =90^\circ$, добиваме ¥ $=90^\circ$. Понатаму аглите 5 и ¥ се суплементни, односно $5\ \ +¥=180^\circ$, па затоа $5\ \ =90^\circ$, односно $\ \ =18^\circ$. Конечно, $\sim\ =72^\circ$.

8. Аглите ~ и се суплементни, а аглите и ¥ се комлементни. Збирот на аглите ~ и ¥ е еднаков на 123°. Определи ги зглите ~ , и ¥ .

Решение. Од условот на задачата следува $\sim+\ \ =180^\circ$, $\ \ +¥=90^\circ$ и $\sim+¥=123^\circ$. Ги собираме првите две равенки и потоа ја одземаме третата раввенка и добиваме $\sim+\ \ +(\ \ +¥)-(\sim+¥)=180^\circ+90^\circ-123^\circ$, т.е. $2\ \ =147^\circ$, од каде наоѓаме $\ \ =73^\circ30'$. Сега, од првата равенка следува $\sim=180^\circ-\ \ =180^\circ-73^\circ30'=106^\circ30'$, а од втората равенка следува $¥=90^\circ-\ \ =90^\circ-73^\circ30'=16^\circ30'$.

9. Нека се C и D точки во внатрешноста на $\measuredangle AOB$ такви што важи $5\measuredangle COD=4\measuredangle AOC$ и $3\measuredangle COD=2\measuredangle DOB$. Ако $\measuredangle AOB=105^\circ$, определи го $\measuredangle COD$.

Решение. Полуправите OC и OD се наоѓаат во внатрешноста на $\measuredangle AOB$, па затоа разликуваме два случаја:



а) полуправата OC лежи во внатрешноста на $\measuredangle AOD$,

б) полуправата OD лежи во внатрешноста на $\measuredangle AOC$.

а) Нека полуправата OC лежи во внатрешноста на $\measuredangle AOD$ и да означиме $\measuredangle AOC=x$, $\measuredangle COD=y$ и $\measuredangle DOB=z$ (цртеж а)). Од условот на задачата следува $5y=4x$, $3y=2z$ и $x+y+z=105^\circ$. Ако последната равенка ја помножиме со 4 добиваме $4x+4y+4z=420^\circ$, па ако замениме од првите две равенки наоѓаме $5y+4y+6y=420^\circ$, од каде следува $y=28^\circ$. Значи, $x=35^\circ$ и $z=42^\circ$. Значи, $\measuredangle COD=y=28^\circ$.

б) Нека полуправата OD лежи во внатрешноста на $\measuredangle AOC$ (цртеж b)).

Да означиме $\measuredangle AOD = u, \measuredangle DOC = v$ и $\measuredangle COB = w$. Од условот на задачата следува $5v = 4(u+v)$, $3v = 2(u+w)$ и $u+v+w=105^\circ$. Оттука следува $v = 4u$ и $v = 2w$, па затоа $v = 4u$ и $w = 2u$. Со замена во $u+v+w=105^\circ$ добиваме $u=15^\circ$, па сега $v = 60^\circ$ и $w = 30^\circ$. Значи, $\measuredangle COD = v = 60^\circ$.

2. КВАДРАТ И ПРАВОАГОЛНИК

1. Периметарот на еден квадрат е еднаков на $12,8\,m$. Правоаголник, кај кој едната страна е со должина $6,4\,m$ има еднаква плоштина како квадратот. Определи го периметарот на правоаголникот. Која фигура има поголем периметар, квадратот или правоаголникот?

Решение. Должината на страната на квадратот е $12,8:4=3,2\,m$. Според тоа, плоштината на квадратот е $P=3,2\cdot 3,2=10,24\,cm^2$. Правоаголникот има еднаква плоштина со квадратот и како должината на едната негова страна е $6,4\,m$, добиваме дека должината на другата страна на правоаголникот е $10,24:6,4=1,6\,m$. Според тоа, периметарот на правоаголникот е $L=2\cdot 1,6+2\cdot 6,4=16\,cm$ и тој е поголем од периметарот квадратот.

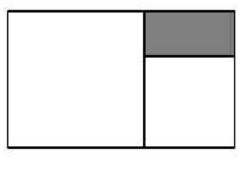
2. Доротеа сака да сошие чаршав за маса во правоаголна форма со димензии $1,5\,m$ и $1\,m$. Чаршавот треба да виси по $23\,cm$ од секоја страна, а за подвиткување се потребни по $2\,cm$. Колкава е плоштината на материјалот од кој Доротеа ќе го сошие чаршавот?

Решение. Правоаголното платно, потребно да се сошие чаршавот треба да има димензии

$$1,5+2\cdot 0,23+2\cdot 0,02=2\,m \text{ и } 1+2\cdot 0,23+2\cdot 0,02=1,5\,m.$$

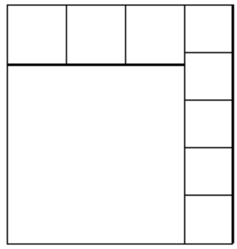
Според тоа, неговата плоштина ќе биде $P=2\cdot 1,5=3\,m^2$.

3. Правоаголник со димензии $22,5\,cm$ и $15,6\,cm$ е поделен на два квадрати и еден сив правоаголник, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на сивиот правоаголник.



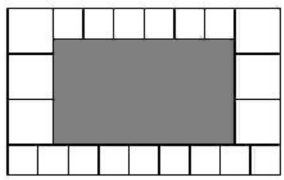
Решение. Должината на страната на поголемиот квадрат е $15,6\,cm$, а на помалиот квадрат е $22,5-15,6=6,9\,cm$. Според тоа, страните на сивиот правоаголник се $6,9\,cm$ и $15,6-6,9=8,7\,cm$. Конечно, плоштината на сивиот правоаголник е еднаква на $6,9\cdot 8,7=60,03\,cm^2$.

4. Правоаголникот на цртежот десно е составен од 9 квадрати. Периметарот на правоаголникот е еднаков на $234\,cm$. Определи ја неговата плоштина.



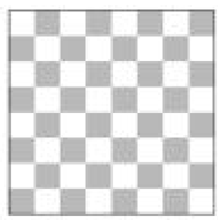
Решение. Страната на еден од трите еднакви квадрати да ја означиме со a. Тогаш страната на најголемиот квадрат е еднаква на $3a$, па затоа пократката страна на правоаголникот е еднаква на $4a$. Оттука следува дека страната на најмалите квадрати е $\frac{4a}{5}$, а поголемата страна на правоаголникот е $3a+\frac{4a}{5}=\frac{19a}{5}$. Значи, $2(4a+\frac{19a}{5})=234$, од каде добиваме $a=15\,cm$. Според тоа, должините на страните на правоаголникот се $4\cdot 15=60\,cm$ и $\frac{19\cdot 15}{5}=57\,cm$, па неговата плоштина е еднаква на $60\cdot 57=3420\,cm^2$.

5. На цртежот десно е прикажан обоен во сиво правоаголник со периметар $76\,cm$. Правоаголникот е заобиколен со шара направена од два вида квадрати. Шарата и правоаголникот формираат нов правоаголник. Определи ја плоштината на шарата.



Решение. Страната на помалите квадрати да ја означиме со a. Должината на големиот правоаголник е еднаква на $9a$, а на сивиот е еднаква на $6a$. Според тоа, страната на поголемиот квадрат е еднаква на $(9a-6a):2=1{,}5a$. Сега, ширината на сивиот правоаголник е еднаква на $3\cdot 1{,}5a-a=3{,}5a$. Од условот на задачата имаме $2(3{,}5a+6a)=76$, т.е. $a=4\,cm$. Значи, страната на поголемиот квадрат е $1{,}5a=6\,cm$. Конечно, плоштината на патеката е $6\cdot 6^2+15\cdot 4^2=456\,cm^2$.

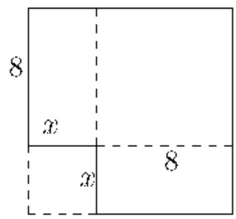
6. Шаховска табла 8×8 има плоштина $17\,dm^2$ и $64\,cm^2$. Определи ги плоштината и периметарот на секое поле на таблата, ако растојанието меѓу страните на шаховската табла и страните крајните полиња се еднакви на $1\,cm$.



Решение. Шаховската табла има форма на квадрат и нејзината плоштина е $17\,dm^2 + 64\,cm^2 = 1764\,cm^2$. Значи, должината на страната на тој квадрат е $\sqrt{1764} = 42\,cm$. Кога од $42\,cm$ ќе се одземат $2\,cm$, колку што изнесуваат двете растојанија меѓу страните на шаховската табла и страните крајните полиња, остануваат $40\,cm$, што е вкупната должина на сите 8 страни на шаховските полиња во еден ред (колона). Значи, должината на едно поле е $40:8 = 5\,cm$, па затоа периметарот на едно поле е $20\,cm$, а неговата плоштина е $25\,cm^2$.

7. Од квадрат е исечен квадрат со страна која е за $8\,cm$ помала од страната на дадениот квадрат. Плоштината на добиената фигура е еднаква на $144\,cm^2$. Определи ја плоштината на исечениот квадрат.

Решение. По сечењето на квадратот со страна x од дадениот квадрат се добива фигура која е составена од квадрат со страна $8\,cm$ и два правоаголници со страни $8\,cm$ и x. Затоа важи



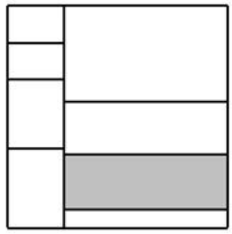
$$8 \cdot 8 + 2 \cdot 8x = 144,$$

од каде добиваме $x = 5\,cm$. Значи, плоштината на исечениот квадрат е $5 \cdot 5 = 25\,cm^2$.

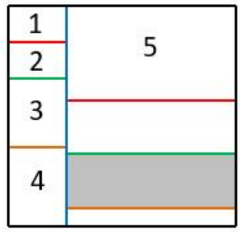
8. Должината на правоаголникот е еднаква на $\frac{6}{5}$ од неговата ширина. Должините на страните на правоаголникот изразени во сантиметри се двоцифрени огледални броеви. Определи ги периметарот и плоштината на овој правоаголник.

Решение. Ако $\overline{ab}$ е ширината на правоаголникот, тогаш неговата должина е $\frac{6}{5}\overline{ab}$. Бидејќи овие два броја се огледални важи $\frac{6}{5}\overline{ab} = \overline{ba}$, т.е. $\frac{6}{5}(10a + b) = 10b + a$, од каде добиваме $a = \frac{4}{5}b$. Но, $1 \le a \le 9$ и $1 \le b \le 9$, па затоа единствено решение е $a = 4, b = 5$. Значи, должините на страните на правоаголникот се $45\,cm$ и $54\,cm$, периметарот на правоаголникот е $L = 2(45 + 54) = 198\,cm$, а неговата плоштина е $P = 45 \cdot 54 = 2430\,cm^2$

9. Квадрат е поделен на осум правоаголници како на цртежот десно. Збирот на периметрите на овие правоаголници е еднаков на $288\,cm$. Определи ја плоштината на сивиот правоаголник, ако неговата подолга страна е три пати подолга од пократката, а пократката страна е четири пати пократка од страната на квадратот.



Решение. Нека должината на страната на квадратот е a. Збирот на должините на десните страни на правоаголниците 1, 2, 3 и 4 (цртеж десно) е еднаков на должината на страната на квадратот. Понатау, збирот на должините на левите страни на правоаголниците 1, 2, 3 и 4 е еднаков на должината на страната на квадратот, а истото важи и за збирот на десните и левите страни на делбените правоаголници во колоната во која е правоаголникот 5. Значи, збирот на вертикалните страни е еднаков на $4a$. Збирот на црвените страни на правоаголниците 1 и 5 е еднаков на должината на страната на квадратот и овој збир во збирот на сите периметри се јавува два пати. Истото важи и за паровите зелени и портокалови страни, а додека горната и долната страна на квадратот во збирот на периметрите учествуваат по еднаш. Според тоа, збирот на хоризонталните страни на делбените правоаголници е еднаков на $2a+3\cdot 2a=8a$. Значи, збирот на периметрите на делбените правоаголници е еднаков на $4a+8a=12a$, па затоа $12a=288$, т.е. $a=24\,cm$.



Нека b е должината на пократката, а c е должината на подолгата страна на сивиот правоаголник. Тогаш $b=a:4=24:4=6\,cm$ и $c=3b=3\cdot 6=18\,cm$. Значи, бараната плоштина е $6\cdot 18=108\,cm^2$.

10. Правоаголник со отсечки кои се паралелни на неговите страни е поделен на четири правоаголници. Плоштините на трите помали од овие четири правоаголници се еднакви на $240\,cm^2, 320\,cm^2$ и $480\,cm^2$. Определи ја плоштината на најголемиот од добиените правоаголници.

Решение. *Прв начин*. При ознаките како на цртежот десно имаме

$$ac=320, ad=240, bd=480 \text{ и } P=bc.$$

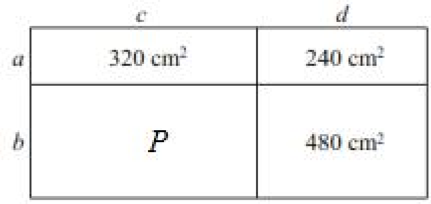
Според тоа,

$(ac)(bd) = 320 \cdot 480,$

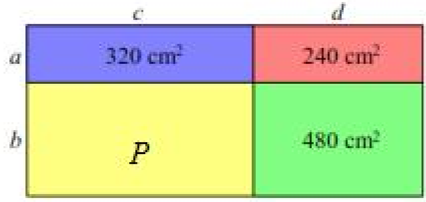
$(ad)(bc) = 320 \cdot 480,$

$240P = 320 \cdot 480,$

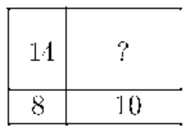
$P = 640\,cm^2.$



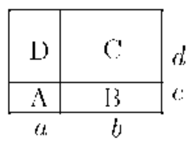
Втор начин. Бидејќи плоштината на зелениот правоаголник е два пати поголема од плоштината на црвениот правоаголник, а двата правоаголници имаат една заедничка страна, заклучуваме дека $b = 2a$. Сега, синиот и жолтиот правоаголник имаат една заедничка страна, а другата страна на жолтиот правоаголник е два пати поголема од друга страна на синиот правоаголник ($b = 2a$), па затоа плоштината на жолтиот правоаголник е два пати поголема од плоштината на синиот правоаголник, односно $P = 2 \cdot 320 = 640\,cm^2$.



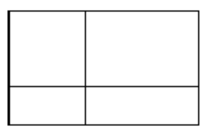
11. Правоаголник е поделен на четири правоаголници. Плоштините на три од нив се еднакви на $8\,cm^2$, $10\,cm^2$ и $14\,cm^2$ (цртеж десно). Определи ја плоштината на четвртиот правоаголник.



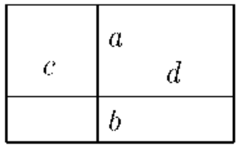
Решение. Ќе ги користиме ознаките како на цртежот десно. Производот на плоштините на правоаголниците A и C е $ac \cdot bd$, а производот на плоштините на правоаголниците B и D е $bc \cdot ad$. Значи, производот на плоштините на правоаголниците A и C е еднаков на производот на плоштините на правоаголниците B и D. Оттука, за плоштината x на правоаголникот C добиваме $8x = 14 \cdot 10$, односно $x = 17{,}5\,cm^2$.



12. Правоаголникот на цртежот десно е поделен на четири правоаголници. Ако плоштините на три од овие правоаголници се 4, 10 и $25\,cm^2$, колку може да биде плоштината на четвртиот правоаголник?



Решение. Ќе ги користиме ознаките на цртежот десно. Плоштините на правоаголниците се еднакви на ac, bc, ad и bd. Производот на две од четирите плоштини е еднаков на производот на другите две. Според тоа, за плоштината x на четвртиот правоаголник добиваме:



1) $25x = 4\cdot 10$, па затоа $x = 1,6\ cm^2$,

2) $10x = 4\cdot 25$, па затоа $x = 10\ cm^2$,

3) $4x = 10\cdot 25$, па затоа $x = 31,25\ cm^2$.

13. Еден правоаголен двор има ширина која е два пати помала од должината. Оградата на дворот е долга $162\ m$.

а) Кокава е плоштината на дворот?

б) Дрводелецот Ѓорѓи треба да направи ограда на дворот. Дали може секаде да стави столбови за оградата на растојание од $2\,m$? А на растојание од $3\,m$? Ако може, колку столбови му се потребни?

в) На колку квадрати со страна $3\,m$ може да се подели дворот?

Решение. Ако ширината на дворот е a, тогаш неговата должина е $2a$, па за должината на оградата добиваме $2(a+2a)=162$, од каде наоѓаме $a = 27\ m$ и $2a = 54\ m$.

а) Плоштината на дворот е $P = a\cdot 2a = 27\cdot 54 = 1458\ m^2$.

б) Бидејќи ширината на дворот е 27, а 27 не е делив со 2, не е можно да се постават столбови на растојание од $2\ m$ (во секое теме треба да има столб). Столбовите може да се постават на растојание од $3\,m$ и притоа се потребни $162:3=54$ столбови.

в) Дворот може да се подели на $(27:3)\cdot(54:3) = 9\cdot 18 = 162$ квадрати со должина на страна $3\,m$.

14. Даден е правоаголник со должини на страни $2023\,cm$ и $1309\,cm$. Правоаголникот е поделен на еднакви квадрати со најголема можна страна чија должина изразена во сантиметри е природен број. Определи го збирот на периметрите на делбените квадрати.

Решение. Јасно, должината на страната a на делбените квадрати мора да е делител на 2023 и на 1309. Но, должината на страната a треба да е најголема можна, па затоа $a = \mathrm{NZD}(2023,1309) = 119\,cm$. Понатаму, $2023:119=17$ и $1309:119=11$, што значи дека правоаголникот е поделен на $17\cdot 11 = 187$ квадрати со страна $a = 119\,cm$. Конечно, збирот на периметрите на делбените квадрати е

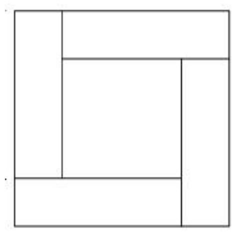
$$L = 187 \cdot 4a = 187 \cdot 4 \cdot 119 = 89012\ cm$$

15. Лим во форма на правоаголник треба да се расече без да има отпад на правоаголници со страни $25\,cm$ и $35\,cm$ или на квадрати со страни $15\,cm$. Кои се најмалите димензии на лимот за да е можно расекувањето?

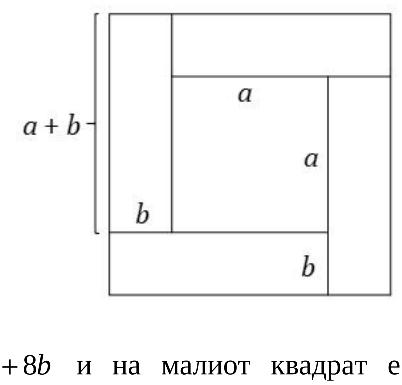
Решение. Двете расекувања се истовремено можни само ако должината на едната страна на лимот е заеднички содржател на 25 и 15, а должината на другата страна на лимот е заеднички содржател на 35 и 15. Притоа најмалите димензии се добиваат ако должините на страните се соодветните најмали заеднички содржатели. Значи, најмалите должини на страните на лимот се $\text{NZD}(15,25) = 75\,cm$ и $\text{NZD}(15,55) = 105\,cm$.

Притоа плоштината на лимот е $75 \cdot 105 = 7875\,cm^2$.

16. Голем квадрат е поделен на четири складни правоаголници и еден помал квадрат како што е прикажано на цртежот десно. Ако периметарот на големиот квадрат е за $40\,cm$ поголем од периметарот на помалиот квадрат, а периметарот на помалиот квадрат е за $8\,cm$ поголем од периметарот на секој од четирите складни правоаголници, колкава е разликата на плоштините на големиот и малиот квадрат?

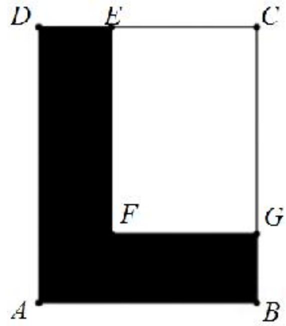


Решение. Нека a е должината на страната на малиот квадрат, а b е должината на пократката страна на правоаголникот. Тогаш должината на поголемата страна на правоаголникот е $a+b$, а поголемиот квадрат има страна со должина $a+2b$ (цртеж десно). Периметарот на секој правоаголник е $L = 2(a+a+b) = 2a+4b$, на големиот квадрат е $L' = 4(a+2b) = 4a+8b$ и на малиот квадрат е $L'' = 4a$. Сега, $L'' - L' = 40$, од каде добиваме $4a+8b-4a = 40$, т.е. $b = 5\,cm$. Понатаму, $L'' - L = 8$, па затоа $4a - 2a - 4b = 8$, односно $a = 14\,cm$.



Должината на страната на малиот квадрат е $14\,cm$, а на големиот е $24\,cm$. Разликата на плоштините на големиот и малиот квадрат е $P' - P'' = 24^2 - 14^2 = (24+14)\cdot(24-14) = 380\,cm^2$.

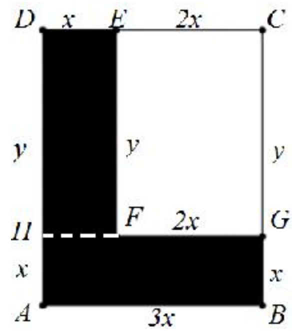
17. На страните BC и CD на правоаголникот $ABCD$ дадени се соодветно точки G и E такви што важи $\overline{DE} = \overline{BG}$ и $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{EC}$. Точката F е внатрешна за правоаголникот $ABCD$ и е таква што $CEFG$ е правоаголник. Ако плоштината на шестаголникот $ABGFED$ (обоениот дел на цртежот десно) е еднаква на плоштината на правоаголникот $CEFG$ (необоениот дел на цртежот десно), колку пати отсечката BC е подолга од отсечката DE?



Решение. Да означиме $\overline{DE} = \overline{BG} = x$. Тогаш $\overline{EC} = 2\overline{DE} = 2x$. Според тоа, $\overline{FG} = 2x$ и $\overline{DC} = \overline{AB} = x + 2x = 3x$. Понатаму, ако означиме $\overline{GC} = \overline{FE} = y$, тогаш $\overline{BC} = x + y$

Прв начин. Да ја продолжиме GF до пресекот со AD и пресечната точка да ја означиме со H. Тогаш $EDHF$ е правоаголник со должини на страни x и y, а исто така и $ABGH$ е правоаголник со должини на страни x и $3x$. Од условот на задачата следува дека

$$P_{ABGFED} = P_{GCEF},$$
$$P_{ABGH} + P_{EDHF} = P_{GCEF},$$
$$3x\cdot x + x\cdot y = 2x\cdot y,$$
$$x(3x+y) = 2xy$$
$$3x + y = 2y,$$
$$y = 3x.$$



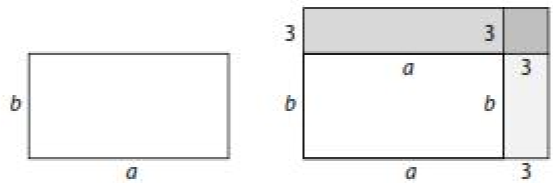
Според тоа, отсечката BC е 3 пати подолга од отсечката DE.

Втор начин. Бидејќи плоштините на обоената и необоената фигура се еднакви, заклучуваме дека плоштината на правоаголникот $ABCD$ е два пати поголема од плоштината на правоаголникот $GCEF$, односно $P_{ABCD} = 2P_{GCEF}$. Според тоа, $3x(x+y) = 2\cdot 2xy$, од каде добиваме $3x + 3y = 4y$, односно $y = 3x$.

Значи, отсечката BC е 3 пати подолга од отсечката DE.

18. Должините на страните на еден правоаголник се разликуваат за $2\,cm$. Ако секоја страна ја зголемиме за $3\,cm$, тогаш плоштината на правоаголникот се зголемува за $105\,cm^2$. Определи ги периметарот и плоштината на овој правоаголник.

Решение. Нека должините на страните на правоаголникот се a и b, $a>b$ (цртеж лево). Имаме $a-b=2$, т.е. $a=b+2$. По зголемувањето на должините на страните на правоаголникот неговата плоштина се зголемува за плоштината на обоените правоаголници на цртежот десно. Според тоа,



$$3a+3b+3\cdot 3=105,\text{ т.е. } 3(b+2)+3b+9=105,$$

од каде добиваме $b=15\,cm$. Значи, $a=17\,cm$, па периметарот на почетниот правоаголник е $L=2(a+b)=2\cdot(15+17)=64\,cm$, а неговата плоштина е $P=15\cdot 17=255\,cm^2$.

19. Ако збирот на периметрите на два квадрати е еднаков на 8, а разликата на нивните плоштини е еднаква на 3, определи ги должините на неговите страни.

Решение. Ако должините на страните на квадратите се x и y ($x>y$), тогаш од условот на задачата следува $4x+4y=8$ и $x^2-y^2=3$. Од првата равенка добиваме

$$x+y=2, \qquad (1)$$

а од втората равенка добиваме $(x+y)(x-y)=3$. Заменуваме од (1) во последната равенка и добиваме $2(x-y)=3$, т.е.

$$x-y=\frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Ако ги собереме равенките (1) и (2) добиваме $2x=2+\frac{3}{2}$, т.е. $x=\frac{7}{4}$, па затоа $y=2-x=2-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}$.

20. Определи ги сите правоаголници чии мерни броеви на страните се природни броеви и кај кои мерните броеви на плоштината и периметарот се еднакви.

Решение. Нека должините на страните на правоаголникот се a и b. Од условот на задачата следува $ab = 2(a+b)$, од каде последователно добиваме

$$a(b-2) = 2b,$$
$$a = \tfrac{2b-4+4}{b-2},$$
$$a = 2 + \tfrac{4}{b-2}.$$

Јасно, за да е a природен број потребно е $b-2$ да е делител на 4. Делители на 4 се: $4, 2, 1, -1, -2, -4$, од каде добиваме

$$b = 6, a = 3; b = 4, a = 4; b = 3, a = 6; b = 1, a = -2; b = 0, a = 0; b = -2, a = 1.$$

Но, должините на страните се природни броеви, па затоа единствени решенија на задачата се: $b = 6, a = 3; b = 4, a = 4; b = 3, a = 6.$ Според тоа, имаме три решенија, но првото и третото решение всушност е еден ист правоаголник, па заклучуваме дека постојат два правоаголници кои ги задоволуваат условите на задачата и тоа: квадратот со страна $a = 4$ и праваоголникот со страни $a = 6, b = 3$.

21. Пресметај го збирот на сите различни можни периметри кои може да го имаат правоаголниците со плоштина $144\, cm^2$ чии должини на страни изразени во сантиметри се природни броеви.

Решение. Имаме

$$144 = 1 \cdot 144 = 2 \cdot 72 = 3 \cdot 48 = 4 \cdot 36 = 6 \cdot 24 = 8 \cdot 18 = 9 \cdot 16 = 12 \cdot 12 .$$

Во долната табела се прикажани сите можности за димензиите на правоаголник $a \times b$ кој ги задоволува условите на задачата и периметарот на истиот.

a	1	2	3	4	6	8	9	12
b	144	72	48	36	24	18	16	12
$2(a+b)$	290	148	102	80	60	52	50	48

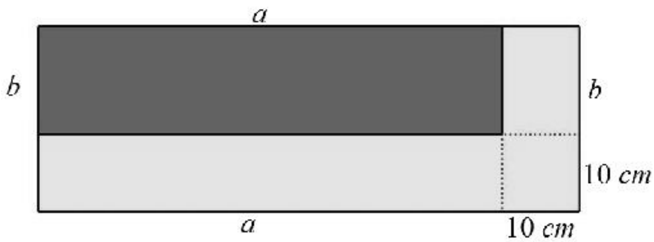
Според тоа, бараниот збир е:

$$290 + 148 + 102 + 80 + 60 + 52 + 50 + 48 = 830\, cm .$$

22. Должините на страните на еден правоаголник, изразени во сантиметри, се природни броеви. Ако страните на овој правоаголник ги

зголемиме за $10\,cm$, тогаш неговата плоштина се зголемува два пати. Определи ги димензиите на сите вакви правоаголници.

Решение. *Прв начин*. Нека должините на страните на дадениот правоаголник се a и b. По зголемувањето на должините на страните за по $10\,cm$ се добива правоаголникот прикажан на долниот цртеж.



Бидејќи плоштината на новиот правоаголник е два пати поголема од плоштината на почетниот правоаголник, последователно добиваме:

$$(a+10)(b+10)=2ab,$$
$$ab+10a+10b+100=2ab,$$
$$ab-10a=10b+100,$$
$$a(b-10)=10b+100,$$
$$a=\frac{10b+100}{b-100},$$
$$a=\frac{10b-100+200}{b-100},$$
$$a=10+\frac{200}{b-100}.$$

Според тоа, $b-10$ мора да е делител на бројот 200. За секој таков b наоѓаме соодветен број a, кои се дадени во долната табела:

$b-10$	1	2	4	5	8	10	20	25	40	50	100	200
b	11	12	14	15	18	20	30	35	50	60	110	210
a	210	110	60	50	35	30	20	18	15	14	12	11

Според тоа, имаме шест решенија за должините на почетниот правоаголник:

1) $11\,cm$ и $210\,cm$,
2) $12\,cm$ и $110\,cm$,
3) $14\,cm$ и $60\,cm$,
4) $15\,cm$ и $50\,cm$,
5) $18\,cm$ и $35\,cm$,
6) $20\,cm$ и $30\,cm$.

Втор начин. Како во првиот начин, ако со a и b ги означиме должините на почетниот правоаголник, наоѓаме

$$(a+10)(b+10)=2ab\ ,$$

од каде последователно добиваме

$$ab+10a+10b+100=2ab,$$
$$ab-10a-10b+100=200,$$
$$a(b-10)-10(b-10)=200,$$
$$(a-10)(b-10)=200.$$

Според тоа, $a-10$ и $b-10$ се комплементарни делители на бројот 200. Така ја добиваме следнава табела

$a-10$	1	2	4	5	8	10	20	25	40	50	100	200
$b-10$	200	100	50	40	25	20	10	8	5	4	2	1
a	**11**	**12**	**14**	**15**	**18**	**20**	30	35	50	60	110	210
b	**210**	**110**	**60**	**50**	**35**	**30**	20	18	15	14	12	11

Според тоа, имаме шест решенија за должините на почетниот правоаголник:

1) $11\,cm$ и $210\,cm$,

2) $12\,cm$ и $110\,cm$,

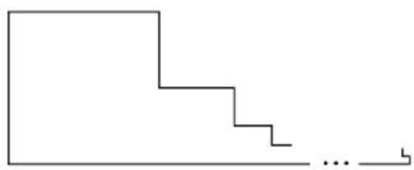
3) $14\,cm$ и $60\,cm$,

4) $15\,cm$ и $50\,cm$,

5) $18\,cm$ и $35\,cm$,

6) $20\,cm$ и $30\,cm$.

23. Во рамнината е даден квадрат со должина на страна $1024\,cm$. До дадениот квадрат е нацртан квадрат со два пати пократка страна и така се продолжува со цртање на квадрати се додека должините на страните изразени во сантиметри се природни броеви (види цртеж десно).



а) Определи го периметарот на фигурата добиена на погоре опишаниот начин.

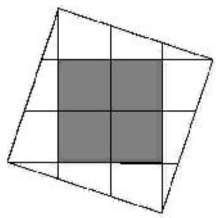
б) Пресметај ја плоштината на квадратот кој се наоѓа во средината на вака добиената низа квадрати.

Решение. а) Ако ги собереме должините на десните вертикални отсечки, ќе ја добиеме должината на страната на почетниот квадрат. Затоа периметарот на добиената фигура се состои од две должини на страната на почетниот квадрат и двојниот збир на должините на сите хоризонтални страни на квадратите кои се нацртани. Должините на страните на сите нацртани квадрати се: $1024\,cm, 512\,cm, 256\,cm,$ $128\,cm, 64\,cm, 32\,cm, 16\,cm,\ 8\,cm, 4\,cm, 2\,cm$ и $1\,cm$, па затоа периметарот на добиената фигура е

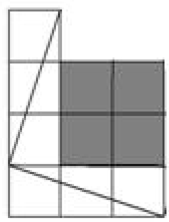
$$L = 2\cdot 1024 + 2(1024 + 512 + 256 + 128 + 68 + 32 + 16 + 8 + 4 + 3 + 2 + 1)$$
$$= 2048 + 2\cdot 2047 = 6142\,cm.$$

б) Во низата има нацртано 11 квадрати и должината на страната на средниот квадрат е еднаква на $32\,cm$. Според тоа, плоштината на средниот квадрат е $P = 32\cdot 32 = 1024\,cm^2$.

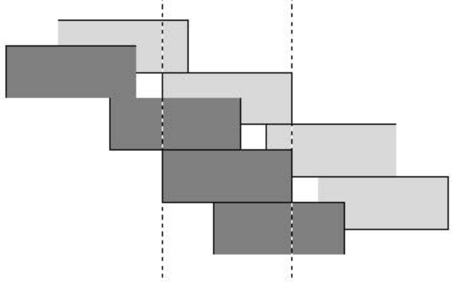
24. Секоја страна на квадрат со страна $10\,cm$ со точки е поделена на три еднакви дела. Некои од тие точки се поврзани меѓу себе или со темињата на квадратот како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на сивиот дел од квадратот.



Решение. Ако преместиме два правоаголни триаголника на дадената фигура, како што е прикажано на цртежот десно, заклучуваме дека плоштината на почетниот квадрат е еднаква на 10 еднакви квадратчиња, од кои 4 го сивиот дел од квадратот. Според тоа, плоштината на сивиот дел од квадратот е еднаква на 40% од плоштината на почетниот квадрат, т.е. на $\frac{4}{10}\cdot 10^2 = 40\,cm^2$.



25. Четири светлосиви и четири темносиви листови во форма на правоаголник имаат страни со исти должини кои, изразени во сантиметри, се природни броеви. Листовите се поставени на маса еден до друг така што секој се допира со едниот или двата соседни листа со иста боја долж дел од својата подолга страна. На тој начин светлосивата



и темносивата добиена фигура делумно се преклопуваат и притоа:

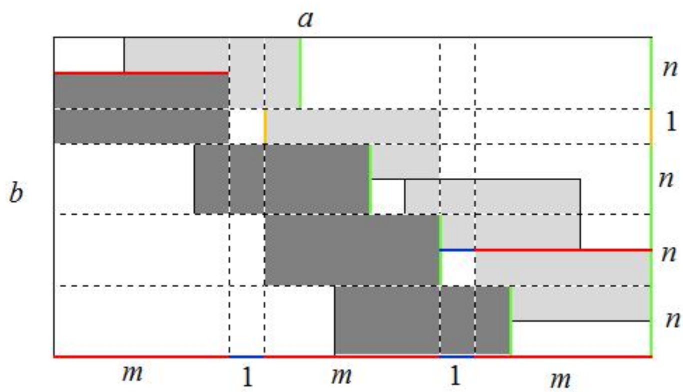
- на три места меѓу овие фигури има празнини во форма на квадрат со плоштина $1\,cm^2$,
- вториот светлосив и третиот темносив лист се поставени така што пократките страни им лежат на исти прави (цртеж горе десно).

Најмалиот правоаголник кој може да се опише околу поставените листови, а притоа неговите страни се паралелни со страните на листовите, има периметар $200\,cm$. Определи ги можните димензии на листовите. Која е најголемата можна плоштина на еден лист?

Решение. Нека a и b се должините на страните на најмалиот опишан правоаголник, а m и n се должините на страните на сивите листови, $m > n$ (цртеж долу).

Јасно, $a = 3m + 2$ и $b = 4n + 1$. Ако ги собереме добиените равенства наоѓаме $3m + 4n + 3 = a + b$. Но, $2(a + b) = 200$, т.е. $a + b = 100$, па затоа $3m + 4n + 3 = 100$, односно

$$3m + 4n = 97. \qquad (1)$$



Бидејќи $m > n$, од (1) добиваме $7m > 3m + 4n = 97$, па затоа $m > 13$. Понатаму, $3m < 3m + 4n = 97$, па затоа $m < 33$. Но, за $m = 2k$ од (1) следува $2(3k + 2n) = 97$, што не е можно. Значи, m е непарен број, т.е. $m \in \{15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}$. Да ги прикажеме овие можности во табела. Имаме:

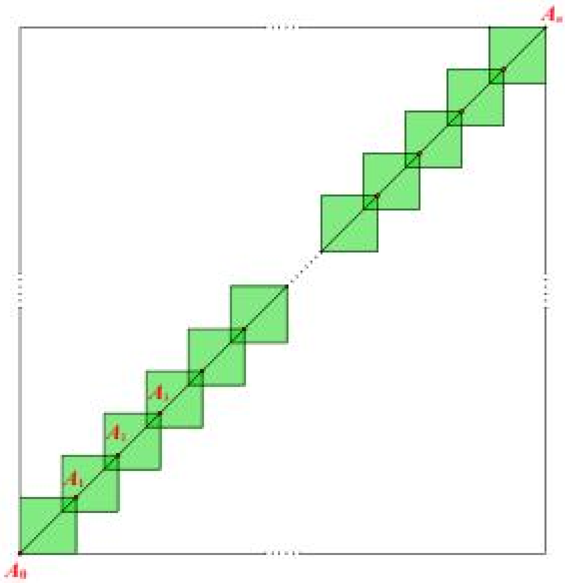
m	$3m$	$4n = 97 - 3n$	n	mn
15	45	52	13	195
17	51	46		
19	57	40	10	190
21	63	34		

23	69	28	7	161
25	75	22		
27	81	16	4	108
29	87	10		
31	93	4	1	31

Во некој од разгледуваните случаи не добиваме решение на равенката, бидејќи бројот $97-3m$ не е делив со 4. Според тоа, можните должини на листовите хартија се: $(m,n)=(13,15),(19,10),(23,7),(27,4),(31,1)$. Значи, имаме пет различни должини на страните, при што во случајот $(31,1)$ нема преклопување на листовите. Најголемата можна плоштина на листовите е $15\cdot 13=195\,cm^2$.

26. Дијагоналата на голем квадрат со должина на страна $2020\,cm$ Горјан ја покрил со низа зелени квадрати со должина на страна $4\,cm$. Дијагоналите на зелените квадрати лежат на дијагоналата на големиот квадрат, а пресекот на секои два последователни зелени квадрати е квадрат со должина на страна $1\,cm$. Пресметај го периметарот на фигурата која ја формираат зелените квадрати.

Решение. *Прв начин*. Ги цртаме квадратите од долниот лев кон горниот десен агол на големиот квадрат (види цртеж).

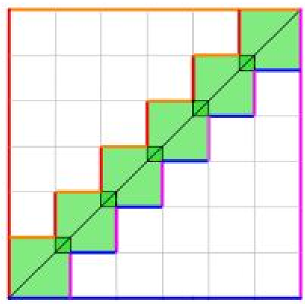


Долното лево теме на првиот квадрат да го означиме со A_0. Горното десно теме на првиот квадрат да го означиме со A_1, на вториот со A_2, на третиот со A_3 итн. Со првиот квадрат се поместуваме во десно и на горе за $4\,cm$. Со вториот квадрат се поместуваме во десно и на горе за $3\,cm$, со третиот квадрат повторно во десно и на горе се поместуваме за $3\,cm$ итн., со последниот квадрат се поместуваме во десно и на горе за $3\,cm$.

Сега, бидејќи треба во десно и на горе да се поместиме за $2020\,cm$ и $2020 = 4 + 3\cdot 672$, добиваме дека за да стасаме од долниот лев, до горниот десен агол треба да поставиме $1 + 672 = 673$ зелени квадрати. Понатаму периметарот на добиената фигура може да се пресмета кога од збирот на периметрите на сите поставени квадрати со страна $4\,cm$ се одземе збирот на малите квадрати со страна $1\,cm$ кои исчезнаа со преклопување на соседните квадрати. Значи, бараниот периметар е

$$L = 673\cdot 16 - 672\cdot 4 = 8080\,cm\,.$$

Втор начин. Да ги продолжиме страните на зелените квадрати така што горната и долната непокриена половина на големиот квадрат добиеме квадратна мрежа формирана од квадрати со должина на страна $3\,cm$ (на цртежот десно тоа е прикажано за помал квадрат чија дијагонала е покриена со 6 зелени квадрати). Сега, ако во долната половина сите хоризонтални (сини) отсечки ги проектираме на страната на големиот квадрат, добиваме дека нивната должина е еднаква на должината на страната на големиот квадрат. Ако истото го направиме за вертикалните отсечки на долната половина, а потоа за хоризонталните и вертикалните отсечки на горната половина, добиваме дека периметарот на добиената фигура е еднаков на периметарот на големиот квадрат, т.е. $L = 4\cdot 2020 = 8080\,cm$.



27. Дијагоналата на голем квадрат со должина на страна $2020\,cm$ Горјан ја покрил со низа зелени квадрати со должина на страна $4\,cm$. Дијагоналите на зелените квадрати лежат на дијагоналата на големиот квадрат, а пресекот на секои два последователни зелени квадрати е квадрат со должина на страна $1\,cm$. Пресметај ја плоштината на фигурата која ја формираат зелените квадрати.

Решение. *Прв начин*. Како во претходната задача добиваме дека на дијагоналата се поставени 673 квадрати со должина на страна $4\,cm$, од кои првиот е цел, а сите останати се квадрати со должина на страна $4\,cm$, од кои е исечен квадрат со должина на страна $1\,cm$. Затоа плоштината на добиената фигура е еднаква на $16+672\cdot 15=10096\,cm^2$.

Втор начин. Од плоштината на големиот квадрат со должина на страна $2020\,cm$ ќе ги одземеме плоштините на деловите кои не се обоени зелено (види го првиот цртеж во претходната задача). Имаме два складни дела. Секој од овие делови е составен од правоаголници кај кој едната страна е со должина $3\,cm$, а должините на другите страни се редоследно $3\,cm, 6\,cm, 9\,cm, 12\,cm, ..., 2013\,cm, 2016\,cm$. Збирот на нивните плоштини е

$$\begin{aligned}2\cdot(3\cdot 3+3\cdot 6+3\cdot 9+...+3\cdot 2016) &= 2\cdot 3\cdot 3\cdot(1+2+3+...+672)\\ &= 2\cdot 3\cdot 3\cdot \tfrac{672\cdot 673}{2}\\ &= 2016\cdot 2019\,cm^2.\end{aligned}$$

Според тоа, плоштината на добиената фигура е еднаква на

$$\begin{aligned}2020\cdot 2020-2016\cdot 2019 &= 2020\cdot 2020-(2020-4)\cdot(2020-1)\\ &= 2020\cdot 2020-2020\cdot 2020+4\cdot 2020+1\cdot 2020-4\\ &= 5\cdot 2020-4\\ &= 10096\,cm^2.\end{aligned}$$

3. АГЛИ, СТРАНИ И ПЕРИМЕТАР НА ТРИАГОЛНИК

1. Должините на две страни на триаголникот ABC се $a=5,6\,cm$ и $b=12,8\,cm$. Определи ја:

   а) најголемата, б) најмалата,

   можна вредност на периметарот на триаголникот, ако должината на неговата трета страна изразена во сантиметри е цел број.

   Решение. Од неравенството на триаголник имаме $b-a<c<b+a$, односно $7,2<c<18,4$, што значи $8\le c\le 18$.

   а) Периметарот е најмал за $c=8\,cm$ и тој е $L=26,4\,cm$.

   б) Периметарот е најголем за $c=18\,cm$ и тој е $L=36,4\,cm$.

2. Определи го збирот на периметрите на сите меѓусебно нескладни триаголници чиј периметар изразен во сантиметри е природен број, а должините на двете страни му се $7\,cm$ и $12\,cm$.

   Решение. Нека a е непознатата страна на произволен триаголник кој ги задоволува условите на задачата. Тогаш од неравенството на триаголник следува $|12-7|<a<12+7$, односно $5<a<19$. Сега, бидејќи мерниот број на периметарот изразен во сантиметри е природен број, добиваме дека должината на третата страна a е елемент од множеството $\{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$. Според тоа, збирот на сите периметри на нескладните триаголници е:

$$\begin{aligned}S&=(6+7+12)+(7+7+12)+(8+7+12)+...+(17+7+12)+(18+7+12)\\&=13\cdot(7+12)+(6+7+8+9+...+16+17+18)\\&=247+156=403\,cm.\end{aligned}$$

3. Правоаголник и рамнокрак триаголник имаат еднакви периметри. Ширината на правоаголникот е $6,9\,dm$, а должината му е поголема за $170\,mm$. Определи ја должината на кракот на триаголникот, кој е два пати подолг од основата.

   Решение. Ширината на правоаголникот е $6,9\,dm=69\,cm$, а неговата должина е $6,9\,dm+170\,mm=69\,cm+17\,cm=86\,cm$. Значи, perиметарот на правоаголникот е $2\cdot(69+86)=310\,cm$. Ако основата на триаголникот е a, тогаш кракот е $2a$, па како тој има еднаков периметар со правоаголникот, добиваме $a+2\cdot 2a=310$, од каде наоѓаме $a=62\,cm$. Значи, кракот на триаголникот е долг $2a=124\,cm$.

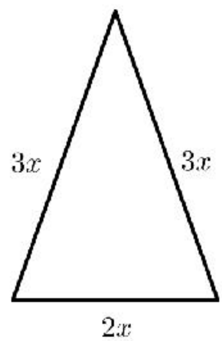
4. Горјан изработува црвени, зелени, сини и жолти знамиња во облик на рамнокраки триаголници. Сите знамиња имаат основа со еднаква должина. Кај црвеното знаме кракот е подолг од основата за $\frac{1}{2}$ од должината на основата. Зеленото знаме има крак кој е подолг од кракот на црвеното знаме за $\frac{1}{3}$ од должината на кракот црвеното знаме. Синото знаме има крак кој е подолг од кракот на зеленото знаме за $\frac{1}{4}$ од должината на кракот на зеленото знаме, а жолтото знаме има крак кој е подолг од кракот на синото знаме за $\frac{1}{4}$ од должината на кракот на синото знаме. Треба да се сошијат 50 знамиња од секоја боја и сите треба да се порабат со трака со сребрена боја. Колку метри сребрена трака се потребни ако се знае дека за работ на црвеното знаме се потребни $40\,cm$ трака?

Решение. Од условот следува дека периметарот на црвеното знаме е еднаков на $40\,cm$. Бидејќи кракот на црвеното знаме е подолг од неговата основа за $\frac{1}{2}$ од должината на основата, со $2x$ да ја означиме должината на основата. Тогаш кракот на црвеното знаме е долг

$$2x+2x:2=2x+x=3x.$$

Според тоа,

$$2x+3x+3x=40,$$
$$8x=40,$$
$$x=5\,cm.$$

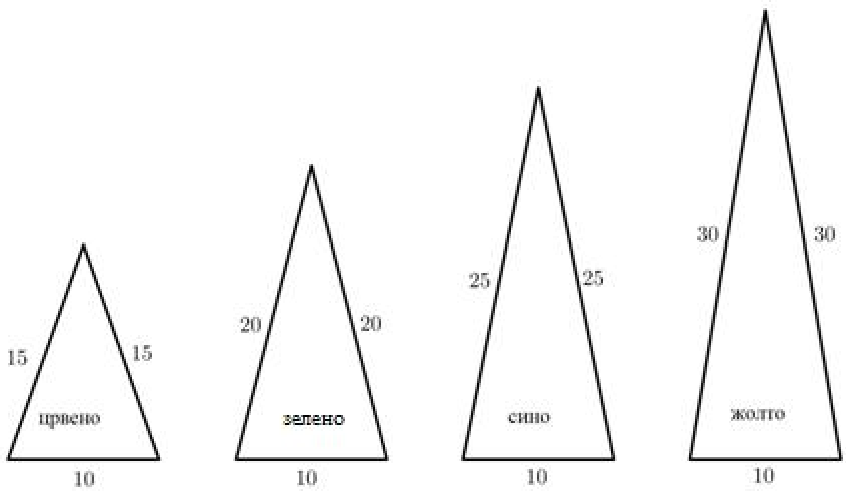


Значи, должината на основата на црвеното знаме, што значи и на другите знамиња е $2\cdot 5=10\,cm$, а должината на кракот на црвеното знаме е $3\cdot 5=15\,cm$.

Третина од 15 е 5, па должината на кракот на зеленото знаме е $15+5=20\,cm$, а основата е $10\,cm$.

Четвртина од 20 е 5, па должината на кракот на синото знаме е $20+5=25\,cm$, а основата е $10\,cm$.

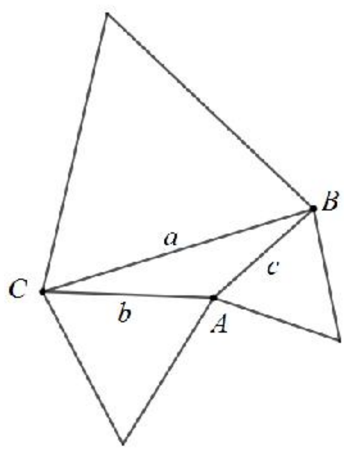
Петтина од 25 е 5, па должината на кракот на жолтото знаме е $25+5=30\ cm$, а основата е $10\ cm$.



Должината на сребрената трака потребна за порабување на сите знамиња е:

$$\begin{aligned} L &= 50\cdot(10+2\cdot 15+10+2\cdot 20+10+2\cdot 25+10+2\cdot 30) \\ &= 50\cdot(10+30+10+40+10+50+10+60) \\ &= 50\cdot 220 = 11000\ cm \\ &= 110\ m. \end{aligned}$$

5. Во триаголникот ABC должината на страната b е за $14\ cm$ помала од должината на страната a и за $4\ cm$ поголема од должината на страната c. Над секоја страна на триаголникот се нацртани рамнострани триаголници, како на цртежот десно. Периметарот на добиената фигура е еднаков на $140\ cm$. Определи ги должините на страните на триаголникот ABC.



Решение. За страните на триаголникот од условот на задачата следува

$$b=a-14 \text{ и } b=c+4,$$

од каде добиваме $a=b+14$ и $c=b-4$. Понатаму, периметарот на добиената фигура се состои од по две страни на триаголникот ABC, па затоа важи $2a+2b+2c=140$, односно $2(a+b+c)=140$, од каде добиваме $a+b+c=70$. Со замена за a и c последователно добиваме

$$\begin{aligned}&b+14+b+b-4=70,\\&3b+10=70,\\&3b=60,\\&b=20cm.\end{aligned}$$

Значи, $a=b+14=20+14=34\ cm$ и $c=b-4=20-4=16\ cm$.

6. За должините на страните a,b,c на $\triangle ABC$ е познато дека $c<b<a$, $b-c=2(a-b)$ и $a=2c$. Збирот на реципрочните вредности на должините на страните е $\frac{7}{20}$. Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$.

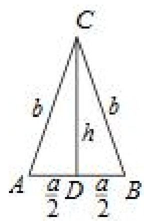
Решение. Имаме

$$\begin{cases}b-c=2(2c-b),\\ \frac{1}{2c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{7}{20}.\end{cases}$$

Оттука добиваме $c=6$ и $b=10$, па затоа $a=12$.

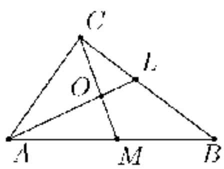
7. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AC}=\overline{BC}$. Точката O е средина на основата AB. Периметарот на триаголникот ABC е $50\,cm$, а периметарот на триаголникот ADC е $40\,cm$. Определи ја должината на отсечката CD.

Решение. Да означиме $\overline{AD}=\overline{DB}=\frac{a}{2}$ и $\overline{CD}=h$, цртеж десно. Од $a+2b=50$ следува $\frac{a}{2}+b=25$. Сега, од $\frac{a}{2}+b+h=40$, добиваме $h=40-25=15\,cm$, што и требаше да се определи.



8. Во $\triangle ABC$ симетралата $AL, (L\in BC)$ на $\measuredangle BAC$ ја преполовува тежишната линија CM. Докажи дека $\overline{AB}=2\overline{AC}$.

Решение. Нека O е пресечната точка на CM и AL. Бидејќи AO е симетрала на агол и тежишна линија во $\triangle MCA$, заклучуваме дека $\triangle MCA$ е рамнокрак со врв A, т.е. $\overline{AM}=\overline{AC}$. Според тоа, $\overline{AC}=\overline{AM}=\overline{MB}$, од каде следува



$\overline{AB} = 2\overline{AC}$.

9. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е еднаков на периметарот на правоаголник со должина $26\,cm$ и ширина $14\,cm$. Определи ги должините на страните на триаголникот, ако една од страните му е еднаква на една од страните на правоаголникот.

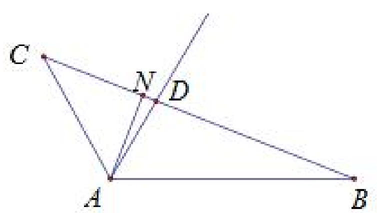
Решение. За страните на триаголникот имаме четири можности:

1) основата му е со должина $14\,cm$,
2) кракот му е со должина $14\,cm$,
3) основата му е со должина $26\,cm$,
4) кракот му е со должина $26\,cm$.

Во првиот случај кракот на триаголниот е $(80-14):2=33\,cm$; во вториот случај основата на триаголникот е $80-2\cdot 14=52\,cm$, но таков триаголник не постои, во третиот случај кракот на триаголникот е $(80-26):2=27\,cm$, во четвртиот случај основата на триаголникот е $80-2\cdot 26=28\,cm$. Според тоа, задачата има три решенија.

10. Даден е тапоаголен $\triangle ABC$ кај кој мерките на сите агли изразени во степени се природни броеви. Симетралата на тапиот агол $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точката D, а подножјето на висината повлечена од темето A е точката N. Точката D е меѓу точките N и B. Мерката на $\measuredangle CBA$ е десет пати поголема од мерката на $\measuredangle DAN$, која изразена во степени, исто така е природен број. Колкава е најголемата можна вредност на мерката на тапиот агол на овој триаголник изразена во степени?

Решение. Да означиме $\measuredangle BAC=\sim$ и $\measuredangle DAN=x$. Тогаш $\measuredangle ABC=10x$. Бидејќи $\triangle ABN$ е правоаголен, добиваме $\frac{\sim}{2}+x+10x=90^\circ$, односно



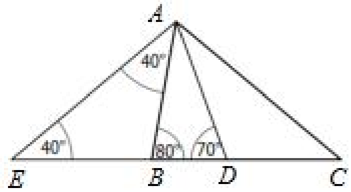
$$\sim +22x=180^\circ .$$

Бидејќи најмалата можна вредност за x е 1°, добиваме дека најголемата можна вредност за $\sim$ е $180^\circ-22^\circ=158^\circ$.

11. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle B=80^\circ$. Нека D е точка на страната

BC таква што $\measuredangle BDA = 70^\circ$ и $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC}$. Определи ја мерката на $\measuredangle ACB$.

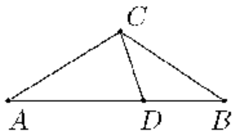
Решение. Нека E е точка на правата CB таква што $\overline{AB} = \overline{EB}$ и B е меѓу C и E (цртеж десно). Тогаш од $\triangle BAD$ следува $\measuredangle BAD = 180^\circ - 80^\circ - 70^\circ = 30^\circ$, па е $\measuredangle EAD = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ = \measuredangle EAD$ и



$\triangle AED$ е рамнокрак со $\overline{AE} = \overline{DE}$. Сега $\overline{AE} = \overline{EB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC}$, па затоа $\triangle AEC$ е рамнокрак, што значи

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ACE = \measuredangle AEC = \measuredangle AEB = 40^\circ.$$

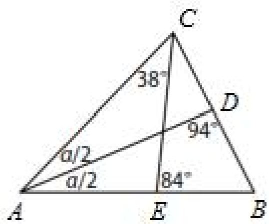
12. На страната AB на рамнокракиот $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$, постои точка D таква што $\overline{AD} = \overline{AC}$ и $\overline{DB} = \overline{DC}$. Определи ја мерката на $\measuredangle ACB$.



Решение. Триаголникот $\triangle ABC$ е рамнокрак со врв C, па затоа $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = \alpha$. Потоа $\triangle BCD$ е рамнокрак со врв D, па затоа $\measuredangle DCB = \alpha$. Понатаму, $\measuredangle ADC = 2\alpha$, како надворешен агол во темето D за $\triangle BCD$. Сега $\triangle ADC$ е рамнокрак со врв A, па затоа $\measuredangle ACD = 2\alpha$. Сега, збирот на аглите на $\triangle ADC$ е $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, од каде добиваме $\alpha = 36^\circ$. Конечно, $\measuredangle ACB = \measuredangle ACD + \measuredangle DCB = 2\alpha + \alpha = 3\alpha = 108^\circ$.

13. Симетралата на внатрешниот агол кај темето A на $\triangle ABC$ ја сече страната BC во точка A. Нека E е внатрешна точка на страната AB таква што $\measuredangle ADB = 94^\circ, \measuredangle ACE = 38^\circ$ и $\measuredangle CEB = 84^\circ$. Определи која е најкратка, а која е најдолга страна на $\triangle ABC$.

Решение. Од триаголникот AEC следува дека $\alpha + 38^\circ = 84^\circ$, па затоа $\alpha = 46^\circ$. Од триаголникот ABD следува $\quad = 180^\circ - (\frac{\alpha}{2} + 94^\circ) = 63^\circ$, а од триаголникот ABC добиваме дека $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \quad) = 71^\circ$. Значи, најкратка страна е BC, а најдолга е AB.

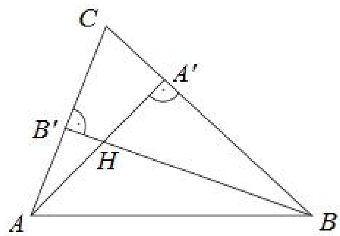


14. Петтината на остриот агол $\sim$ на правоаголниот триаголник ABC е еднаква на третината на остриот агол на овој триаголник. Спореди ги должините на страните на овој триаголник.

Решение. Бидејќи $\frac{\sim}{5}=\frac{\ }{3}$, заклучуваме дека $\sim >\ $. Но, во секој триаголник спроти поголем агол лежи поголема страна, па затоа $a>b$. Конечно, $c>a>b$.

15. Во остроаголниот $\triangle ABC$ аголот $\sim$ е 80°, а висините h_a и h_b се сечат во точката H. Ако $\measuredangle AHB=126^\circ$, која страна е најкратка, а која е најдолга во $\triangle ABC$.

Решение. Нека подножните точки на висините h_a и h_b се A' и B', соодветно. Тогаш $\measuredangle A'HB'=\measuredangle AHB=126^\circ$ и $\measuredangle A'HB=\measuredangle AHB'=54^\circ$. Оттука следува $\measuredangle A'AC=\measuredangle B'BC=36^\circ$. Сега, од $\triangle B'BC$ добиваме



$$\measuredangle ACB=\text{¥}=90^\circ-\measuredangle B'BC=90^\circ-36^\circ=54^\circ.$$

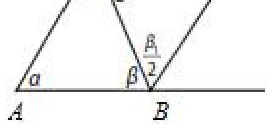
Бидејќи $\sim=80^\circ$, важи

$$=\measuredangle ABC=180^\circ-(54^\circ+80^\circ)=46^\circ.$$

Конечно, од $\ <\text{¥}<\sim$, од својството дека наспроти поголем агол во триаголникот лежи подолга страна, следува $b<c<a$. Значи, во $\triangle ABC$ најдолга е страната $a=\overline{BC}$, а најкратка е страната $b=\overline{AC}$.

16. Даден е триаголник ABC. Аголот кој го градат симетралите на надворешните агли во темињата B и C е еднаков на внатрешниот агол во темето A и за 7° е поголем од внатрешниот агол при темето C. Спореди ги должините на страните на триаголникот ABC.

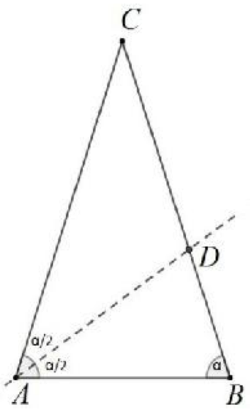
Решение. Нека S е пресекот на симетралите на надворешните агли при темињата B и C (цртеж десно). Според условот на задачата $\measuredangle CSB=\sim$, $\sim=\text{¥}+7^\circ$, $\measuredangle SCB=\frac{\text{¥}_1}{2}=\frac{\sim+\ }{2}$ и $\measuredangle SBC=\frac{\ _1}{2}=\frac{\sim+\text{¥}}{2}=\frac{2\sim-7^\circ}{2}$. Понатаму, за вна-



трешннте агли на триаголникот BSC важи $\sim + \frac{\sim +}{2} + \frac{2\sim - 7^\circ}{2} = 180^\circ$, од каде следува $5\sim + \quad = 367^\circ$. За внатрешните агли на триаголникот ABC важи $\sim + \quad + \sim - 7^\circ = 180^\circ$, од каде следува $2\sim + \quad = 187^\circ$. Според тоа, $5\sim + \quad - (2\sim + \quad) = 367^\circ - 187^\circ$, од каде добиваме $\sim = 60^\circ$. Сега е јасно дека $¥ = 53^\circ$ и $\quad = 67^\circ$. Конечно, од $\quad > \sim > ¥$ следува $b > a > c$.

17. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа AB која е пократка од кракот. Нека D е пресечната точка на кракот BC и симетралата на $\measuredangle BAC$. Определи ги аглите на триаголникот ABC ако триаголникот ABD е рамнокрак.

Решение. Нека $\measuredangle BAC = \measuredangle CBA = \sim < 90^\circ$. Тогаш $\measuredangle BAD = \measuredangle DAC = \frac{\sim}{2}$. Бидејќи $\measuredangle CDA$ е надворешен агол за триаголникот ABD добиваме дека $\measuredangle CDA = \sim + \frac{\sim}{2} = \frac{3\sim}{2}$. Според условот на задачата триаголникот ABD е рамнокрак. Да разгледаме кои страни може да се краци на триаголникот ABD. Имаме три случаи.



1) Нека $\overline{AD} = \overline{BD}$. Од $\measuredangle DBA = \sim > \frac{\sim}{2} = \measuredangle BAD$ следува дека $\overline{AD} > \overline{BD}$, па страните AD и BD не може да се краци на триаголникот ABD.
2) Нека $\overline{AB} = \overline{BD}$. Тогаш $\measuredangle ADB = \measuredangle BAD = \frac{\sim}{2}$. Аглите $\measuredangle CDA$ и $\measuredangle ADB$ се суплементни, па затоа
$$180^\circ = \measuredangle CDA + \measuredangle ADB = \frac{3\sim}{2} + \frac{\sim}{2} = 2\sim \text{, т.е. } \sim = 90^\circ,$$
што противречи на $\sim < 90^\circ$.
3) Нека $\overline{AB} = \overline{BD}$. Тогаш $\measuredangle DBA = \measuredangle ADB = \sim$, па затоа
$$\sim + \sim + \frac{\sim}{2} = 180^\circ \text{, т.е. } \sim = 72^\circ.$$

Значи, $\measuredangle CAB = \measuredangle CBA = 72^\circ$ и $\measuredangle ACB = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$.

Конечно, големините на внатрешните агли на триаголникот ABC се $72^\circ, 72^\circ$ и 36°.

18. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C. Со α' и β' да ги означиме надворешните агли во темињата A и B, соодветно. Ако важи $\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{4}{5}$, определи ги внатрешните агли на триаголникот ABC.

Решение. Со α и β да ги означиме внатрешните агли во темињата A и B, соодветно. Тогаш $\alpha'=180^\circ-\alpha$ и $\beta'=180^\circ-\beta$. Меѓутоа, $\beta=90^\circ-\alpha$, па затоа важи

$$\beta'=180^\circ-\beta=180^\circ-(90^\circ-\alpha)=90^\circ+\alpha .$$

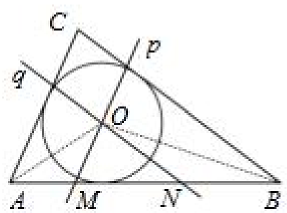
Значи,

$$\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{4}{5},$$
$$5\alpha'=4\beta',$$
$$5(180^\circ-\alpha)=4(90^\circ+\alpha),$$
$$9\alpha=540^\circ,$$
$$\alpha=60^\circ.$$

Конечно, $\alpha=60^\circ$ и $\beta=90^\circ-\alpha=30^\circ$.

19. Во разностран триаголник ABC е впишана кружница k со центар O. Конструирани се прави p и q, кои минуваат низ точката O, такви што $p\,||\,AC$ и $q\,||\,BC$. Правата p ја сече страната AB во точката M, а правата q ја сече страната AB во точката N. Докажи дека периметарот на триаголникот OMN е еднаков на должината на страната AB.

Решение. Правата AO е симетрала на $\measuredangle BAC$, па затоа $\measuredangle MAO=\measuredangle CAO=\measuredangle AOM$, што значи дека триаголникот AOM е рамнокрак, па затоа $\overline{AM}=\overline{OM}$. На потполно ист начин се докажува дека триаголникот BON е рамнокрак и $\overline{BN}=\overline{ON}$. Според тоа,



$$\overline{AB}=\overline{AM}+\overline{MN}+\overline{NB}=\overline{OM}+\overline{MN}+\overline{NO}=L_{MNO},$$

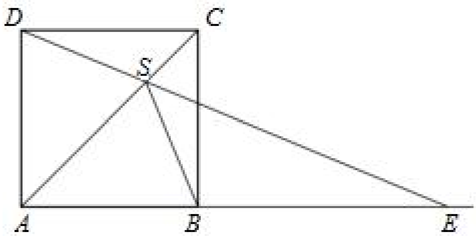
што и требаше да се докаже.

20. Даден е квадрат $ABCD$. Нека E е точка од полуправата AB таква

што $\measuredangle AED = 22^\circ 30'$. Ако отсечките AC и DE се сечат во точката S, определи ја мерката на $\measuredangle BSE$.

Решение. Имаме:

$\measuredangle EDA = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'$. Понатаму, бидејќи AC е дијагонала на квадратот $ABCD$, важи $\measuredangle DAS = \measuredangle DAC = 45^\circ$. Затоа од триаголникот ADS добиваме $\measuredangle DSA = 67^\circ 30'$.

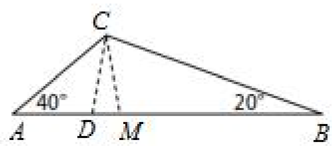


Според тоа, триаголникот ADS е рамнокрак и $\overline{AD} = \overline{AS}$. Но, $\overline{AD} = \overline{AB}$, па затоа $\overline{AB} = \overline{AS}$, т.е. и триаголникот ABS е рамнокрак. Но, $\measuredangle BAS = 45^\circ$ па затоа $\measuredangle BSA = \measuredangle SBA = 67^\circ 30'$. Конечно,

$$\measuredangle BSE = 180^\circ - 2 \cdot 67^\circ 30' = 45^\circ .$$

21. За $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC = 40^\circ$, $ABC = 20^\circ$ и $\overline{AB} - \overline{BC} = 10\, cm$. Симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката M . Определи ја должината на отсечката CM .

Решение. Нека D е точка од страната AB таква што $\overline{BD} = \overline{BC}$. Тогаш $\triangle CDB$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle BCD = \measuredangle CDB = 80^\circ$. Сега, $\measuredangle CDB$ е надворешен за триаголникот CAD, па затоа $\measuredangle ACD = \measuredangle BDC - \measuredangle CAD = 40^\circ = \measuredangle CAD$, па затоа $\overline{AD} = \overline{CD}$. Понатаму, CM е симетрала на $\measuredangle ACB$, па затоа $\measuredangle ACM = \frac{\measuredangle ACB}{2} = 60^\circ$. Сега,



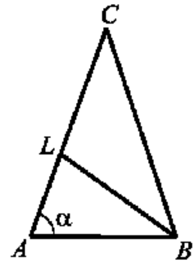
$$\measuredangle AMC = 180^\circ - (\measuredangle MAC + \measuredangle ACM) = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ .$$

Значи, триаголникот CMD е рамнокрак, па затоа

$$\overline{CM} = \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD} = \overline{AB} - \overline{BC} = 10\, cm .$$

22. Во триаголникот ABC е повлечена симетралата $BL\,(L \in AC)$ на $\measuredangle ABC$. Ако $\overline{AB} = \overline{BL} = \overline{LC}$, определи ги аглите на триаголникот ABC .

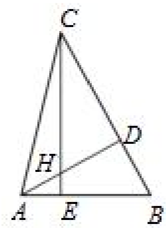
Решение. Да означиме $\measuredangle BAC = \sim$. Триаголникот ALB е рамнокрак, па затоа $\measuredangle ALB = \sim$. Понатаму, триаголникот BCL е рамнокрак и за



него $\measuredangle ALB$ е надворешен агол при темето L. Според тоа, $\measuredangle LBC = \measuredangle BCL = \frac{\sim}{2}$. Но, BL е симетрала на $\measuredangle ABC$ и затоа $\measuredangle ABC = \sim$. Сега од триаголникот ABC наоѓаме $\sim + \sim + \frac{\sim}{2} = 180^\circ$, т.е. $\sim = 72^\circ$. Конечно,

$$\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 72^\circ, \measuredangle ACB = 36^\circ .$$

23. Во остроаголниот триаголник ABC разликата на внатрешните агли во темињата A и C е еднаква на 50° и висините повлечени во темињата A и C се сечат во точката H така што $\measuredangle AHC = 110^\circ$. Определи ги големините на аглите на овој триаголник.

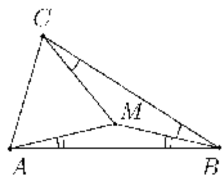


Решение. Со $\sim$, ,¥ соодветно да ги означиме внатрешните агли во темињата A, B, C (цртеж десно). Тогаш $\sim -$ ¥ $= 50^\circ$. Бидејќи AD и CE се висини во триаголникот ABC, триаголниците ADC и AEC се правоаголни и важи $\measuredangle ACE = 90^\circ - \sim$ и $\measuredangle DAC = 90^\circ -$ ¥ . Сега

$$110^\circ = \measuredangle AHC = 180^\circ - \measuredangle ACE - \measuredangle DAC = \sim + ¥ .$$

Од $\sim -$ ¥ $= 50^\circ$ и $\sim +$ ¥ $= 110^\circ$ следува $\sim = 80^\circ$ и ¥ $= 30^\circ$, па затоа $= 70^\circ$.

24. Даден е $\triangle ABC$ и точка M во неговата внатрешност. Познато е дека $\overline{AM} = \overline{AC}$ и триаголниците ABM, BCM и CAM се рамнокраки. Определи го $\measuredangle ABC$.



Решение. Точката M е внатрешна за $\triangle ABC$, па затоа важи

$$\measuredangle AMB + \measuredangle BMC + \measuredangle CMA = 360^\circ .$$

Според тоа, не е можно два од аглите $\measuredangle AMB$, $\measuredangle BMC$ и $\measuredangle CMA$ да се остри (во спротивно збирот ќе биде помал од 360°). Но, аглите при основата на рамнокрак триаголник се остри, а по услов $\measuredangle AMC$ е агол при основата во рамнокракиот триаголник MCA. Според тоа, $\measuredangle AMB$ и $\measuredangle BMC$ се тапи агли, т.е. тие се агли при врвовите на соодветните рамнокраки триаголници. Тоа значи дека

$$\overline{AM}=\overline{BM},\ \measuredangle MAB=\measuredangle MBA=\sim \text{ и } \overline{BM}=\overline{CM},\ \measuredangle MBC=\measuredangle MCB=\quad .$$

Освен тоа, според условот $\overline{AM}=\overline{AC}$, па затоа $\triangle ACM$ е рамностран, односно $\measuredangle MAC=\measuredangle MCA=60^\circ$.

Конечно, од збирот на аглите на $\triangle ABC$ добиваме

$$(\sim +60^\circ)+(\sim +\quad)+(\quad +60^\circ)=180^\circ \text{, т.е. } \sim +\quad =30^\circ,$$

односно, $\measuredangle ABC=\sim +\quad =30^\circ$.

25. Даден е триаголник, во кој збирот на двата агли е еднаков на третиот агол, а најголемиот агол се однесува кон еден од другите два агли како $5:1$. Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Бидејќи најголемиот агол е еднаков на збирот на другите два агли, заклучуваме дека тој е еднаков на половина од збирот на аглите во триаголникот, односно на $180^\circ:2=90^\circ$. Нека x е големината на аголот спрема кој најголемиот агол се однесува како $5:1$. Тогаш имаме $90^\circ:x=5:1$, од каде добиваме $x=90^\circ:5=18^\circ$. Конечно, третиот агол на триаголникот е еднаков на $90^\circ-18^\circ=72^\circ$.

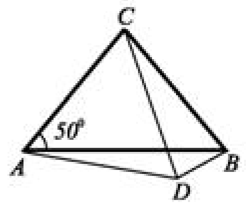
26. Висината повлечена во темето C го дели $\measuredangle C$ во однос $3:5$, а другите два агли на триаголникот се однесуваат как $7:5$. Определи го $\measuredangle C$.

Решение. Нека висината го дели $\measuredangle C$ на агли $3x$ и $5x$. Тогаш $\measuredangle C=8x$, а другите два агли се $90^\circ-3x$ и $90^\circ-5x$. Но овие агли се однесуваат како $7:5$, па затоа $(90^\circ-3x):(90^\circ-5x)=7:5$, од каде добиваме $x=9^\circ$. Според тоа, $\measuredangle C=8\cdot 9^\circ=72^\circ$.

27. Еден од надворешните агли на $\triangle ABC$ е еднаков на 156° и е за толку поголем од разликата меѓу двата внатрешни несоседни со него агли, за колку што таа разлика е поголема од третиот агол на $\triangle ABC$. Определи го најмалиот агол на $\triangle ABC$.

Решение. Внатрешниот агол соседен на дадениот надворешен агол е еднаков на $180^\circ-156^\circ=24^\circ$. Ако разликата на другите два внатрешни агли е x, тогаш $156^\circ-x=x-24^\circ$, па затоа $x=90^\circ$. Внатрешните агли на триаголникот со разлика 90° имаат збир 156°, па затоа тие се еднакви на $\frac{156^\circ - 90^\circ}{2} = 33^\circ$ и $\frac{156^\circ + 90^\circ}{2} = 123^\circ$. Според тоа, најмалиот агол на $\triangle ABC$ е еднаков на 24°.

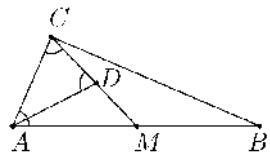
28. Даден е рамнокрак триаголник ABC со агол при основата еднаков на 50°. Точката D е надворешна за триаголникот и е таква што $\measuredangle DBA = 30^\circ$ и $\measuredangle DCB = 20^\circ$. Определи го $\measuredangle DAB$.



Решение. Од $\triangle DCB$ наоѓаме $\measuredangle BDC = \measuredangle DBC = 80^\circ$, па затоа $\overline{DC} = \overline{BC} = \overline{AC}$, т.е. $\triangle ADC$ е рамнокрак. Во $\triangle ADC$ имаме $\measuredangle ACD = 60^\circ$ и $\measuredangle CAD = \measuredangle ADC = 60^\circ$. Оттука следува

$$\measuredangle DAB = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ.$$

29. Даден е правоаголен триаголник $ABC, \measuredangle ACB = 90^\circ$. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече тежишната линија повлечена од темето C во точката D. Ако $\overline{AC} = \overline{AD}$, определи го $\measuredangle ABC$.



Решение. Средината на AB да ја означиме со M. Бидејќи CM е тежишна линија на правоаголен триаголник повлечена кон хипотенузата, важи $\overline{AM} = \overline{CM}$, што значи дека $\triangle AMC$ е рамнокрак и

$$\measuredangle MAC = \measuredangle ACM = \sim.$$

Според условот AD е симетрала на $\measuredangle BAC$, па затоа $\measuredangle CAD = \frac{\sim}{2}$.

Сега, од равенството $\overline{AC} = \overline{AD}$ следува дека $\triangle ADC$ е рамнокрак и

$$\measuredangle ADC = \measuredangle ACD = \sim.$$

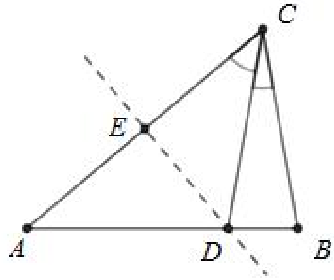
Понатаму, збирот на аглите во $\triangle ADC$ е еднаков на 180°, па затоа $\sim + \sim + \frac{\sim}{2} = 180^\circ$, од каде добиваме $\sim = 72^\circ$.

Конечно, $\measuredangle ABC = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

30. Во триаголникот ABC со агол во темето C еднаков на 60°, симетралата на страната AC ја сече страната AB во точката D. Ако $\measuredangle ACD = 2\measuredangle DCB$, определи ги големините на другите два агли на овој

триаголник.

Решение. Нека $\measuredangle DCB =$ ¨ . Тогаш важи $\measuredangle ACD = 2$¨ . Сега, од $\measuredangle ACB = 60^\circ$ следува ¨ $+ 2$¨ $= 60^\circ$, односно ¨ $= 20^\circ$, па затоа $\measuredangle DCB = 20^\circ$ и $\measuredangle ACD = 40^\circ$.



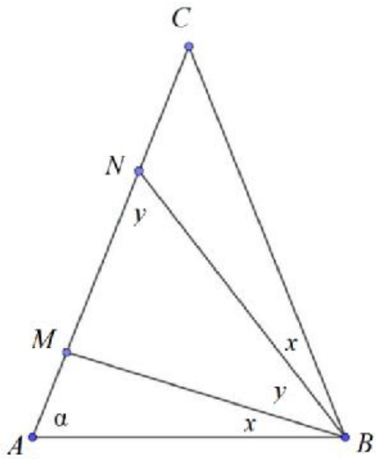
Точката D припаѓа на симетралата на страната AC, па затоа таа е еднакво оддалечена од точките A и C, т.е. $\overline{AD} = \overline{CD}$. Значи, $\triangle ACD$ е рамнокрак, и затоа $\measuredangle BAD = \measuredangle ACD = 40^\circ$.

Конечно, $\measuredangle ABC = 180^\circ - (\measuredangle BCA + \measuredangle CAB) = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ$.

31. Даден е рамнокрак триаголник ABC, при што $\overline{AC} = \overline{BC}$. На кракот AC се избрани точки M и N такви што $\measuredangle MBA = \measuredangle CBN$ и $\overline{MN} = \overline{BM}$, при што точката M е меѓу точките A и N. Определи го $\measuredangle NBA$.

Решение. Нека $\measuredangle BAC = \measuredangle CBA =$ ~ , $\measuredangle MBA = \measuredangle CBN = x$ и $\measuredangle NBM = y$. Тогаш ~ $= 2x + y$. Триаголникот BNM е рамнокрак, па затоа

$$\measuredangle NBM = \measuredangle MNB = y.$$



Понатаму, аглите на триаголникот ABN се $2x + y, x + y$ и y, па затоа

$$2x + y + x + y + y = 180^\circ,$$

од каде добиваме $x + y = 60^\circ$.

Конечно, $\measuredangle NBA = x + y = 60^\circ$.

32. Во рамнокрак $\triangle ABC$ симетралата на кракот AC и симетралата на $\measuredangle BAC$ се сечат во точка D која припаѓа на кракот BC. Определи ја големината на $\measuredangle CDA$.

Решение. Од условот на задачата следува дека $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC =$.

Понатаму, AD е симетрала на $\measuredangle BAC$, па затоа $\measuredangle BAD = \measuredangle DAC = \frac{}{2}$.

Но, точката D припаѓа на симетралата на кракот AC, па затоа $\overline{AD} = \overline{CD}$, т.е. триаголникот CAD е рамнокрак, со основа AC. Значи,

$$\measuredangle CAD=\measuredangle DAC=\frac{\ }{2}.$$

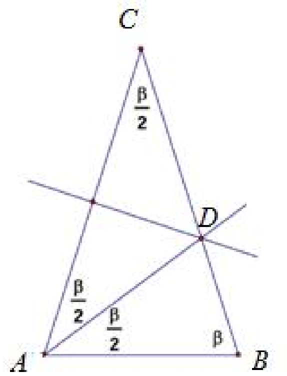
Според тоа, за збирот на аглите на $\triangle ABC$ добиваме

$$\ +\ +\frac{\ }{2}=180^\circ,\text{ т.е. }\ =72^\circ.$$

Конечно, од $\triangle CAD$ наоѓаме

$$\measuredangle CDA=180^\circ-2\cdot\frac{\ }{2}=180^\circ-\ .$$

$$=180^\circ-72^\circ=108^\circ.$$



33. Во $\triangle ABC$ е повлечена симетралата $BL, L\in AC$ на $\measuredangle ABC$. Ако е познато дека $\measuredangle ALB:\measuredangle CLB=13:23$, да се определи разликата на $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle CAB$.

Решение. Од условот следува $\measuredangle ALB=13x$ и $\measuredangle CLB=23x$. Но, овие два агли се суплементни, па затоа важи $13x+23x=180^\circ$, т.е. $x=5^\circ$. Понатаму,

$$\measuredangle BAC=\measuredangle CLB-\measuredangle ABL \text{ и } \measuredangle ACB=\measuredangle ALB-\measuredangle CBL.$$

Последните две равенства ги одземаме и ако земеме предвид дека $\measuredangle ABL=\measuredangle CBL=\frac{1}{2}\measuredangle ABC$, за бараната разлика добиваме

$$\measuredangle CAB-\measuredangle ACB=\measuredangle CLB-\measuredangle ABL-(\measuredangle ALB-\measuredangle CBL)$$

$$=\measuredangle CLB-\measuredangle ALB=10x=50^\circ.$$

34. Даден е триаголник ABC. Симетралата AP, ($P\in BC$) на $\measuredangle BAC$ ја сече висината CH $(H\in AB)$ во точка D. Ако

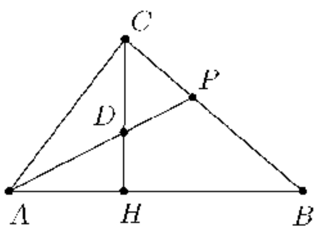
$$\measuredangle ABP:\measuredangle APB:\measuredangle BCH=4:7:2,$$

а) определи го видот на триаголникот DPC,

б) најди ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. а) Од условот на задачата следува $\measuredangle ABP=4x, \measuredangle APB=7x$, $\measuredangle BCH=2x$. Сега, од правоаголниот триаголник BCH наоѓаме $4x+2x=90^\circ$, т.е. $x=15^\circ$. Затоа

$$\measuredangle ABP=60^\circ, \measuredangle APB=105^\circ, \measuredangle BCH=30^\circ.$$



Сега,

$$\measuredangle CPD=180^\circ-\measuredangle APB=180^\circ-105=75^\circ \text{ и}$$

$$\measuredangle CDP = 180^\circ - \measuredangle CPD - \measuredangle PCD = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ,$$

што значи дека триаголникот DPC е рамнокрак.

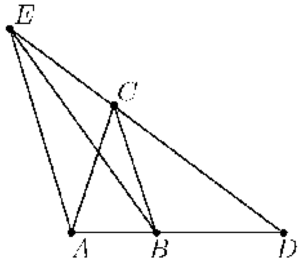
б) Имаме, $\measuredangle ADH = \measuredangle CDP$, како накрсни агли, па затоа важи

$\measuredangle ABC = \measuredangle ABP = 60^\circ$,

$\measuredangle BAC = 2\measuredangle BAP = 2(90^\circ - \measuredangle ADH) = 2(90^\circ - \measuredangle CDP) = 2(90^\circ - 75^\circ) = 30^\circ$,

$\measuredangle ACB = 180^\circ - \measuredangle ABC - \measuredangle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.

35. Даден е рамнокрак триаголник ABC $(\overline{AC} = \overline{BC})$. Точката D лежи на правата AB и $\overline{BD} = \overline{BC}$, а точката E лежи на правата DC и $\overline{CE} = \overline{CA}$ (цртеж десно).



а) Ако $\measuredangle ACB = 20^\circ$, определи ги $\measuredangle ADE$, $\measuredangle AED$, $\measuredangle BEC$ и $\measuredangle ABE$.

б) Ако правите BC и AE се паралелни, докажи дека триаголникот ADE е рамнокрак.

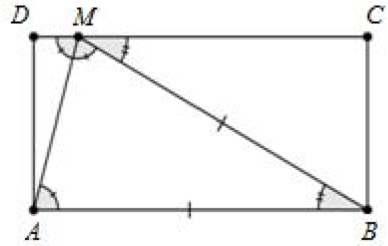
Решение. а) Аглите при основата на рамнокракиот триаголник ABC се $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = \frac{1}{2}(180^\circ - 20^\circ) = 80^\circ$. Оттука, аглите при основата на рамнокракиот $\triangle BCD$ се $\measuredangle BDC = \measuredangle BCD = \frac{1}{2}\measuredangle ABC = 40^\circ$. Тогаш $\measuredangle ACE = 180^\circ - (20^\circ + 40^\circ) = 120^\circ$ и аголот при врвот на рамнокракиот $\triangle ECB$ е $\measuredangle BCE = 120^\circ + 20^\circ = 140^\circ$. Значи,

$$\measuredangle CEB = \measuredangle CBE = \frac{1}{2}(180^\circ - 140^\circ) = 20^\circ \text{ и } \measuredangle ABE = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ.$$

б) Во рамнокракиот $\triangle BCD$ имаме $\measuredangle BDC = \measuredangle BCD$. Бидејќи $BC \parallel AE$, важи $\measuredangle AEC = \measuredangle BCD$. Според тоа, $\measuredangle AEC = \measuredangle BDC$, т.е. триаголникот ADE е рамнокрак.

36. Даден е правоаголик $ABCD$ каде $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. На страната CD е избрана точката M, така што симетралата на $\measuredangle DMB$ минува низ темето A. Определи ја големината на $\measuredangle AMB$.

Решение. Нека $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$. Тогаш $\overline{AB} = 2b$. Бидејќи AM е симетрала на $\measuredangle DMB$, добиваме $\measuredangle DMA = \measuredangle AMB$. Од друга страна, $\measuredangle DMA = \measuredangle BAM$, како наизменични агли. Значи, $\measuredangle BAM = \measuredangle AMB$, па затоа триаголникот AMB е рамнокрак и $\overline{BM} = \overline{AB} = 2b$. Според тоа, во правоаголниот триаголник BMC едната катета е $\overline{BC}=b$, а другата е $\overline{BM}=2b$, па затоа тој е половина од рамностран триаголник со страна $\overline{BM}=2b$. Оттука добиваме $\measuredangle CBM=60^\circ$, што значи $\measuredangle BMC=30^\circ$. Оттука следува дека

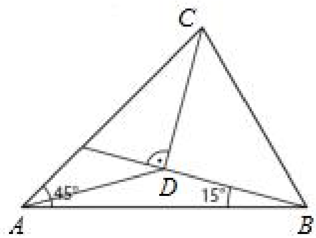


$\measuredangle DMB=180^\circ-\measuredangle BMC=180^\circ-30^\circ$,
па затоа

$$\measuredangle AMB=\frac{1}{2}\measuredangle DMB=\frac{150^\circ}{2}=75^\circ.$$

37. Во триаголникот ABC е $\measuredangle BAC=45^\circ$. Нека точката M на страната AC е таква што $\overline{MC}=2\overline{AM}$ и $\measuredangle ABM=15^\circ$. Определи ја мерката на $\measuredangle ACB$.

Решение. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од темето C на MB. Од $\triangle ABM$ следува дека $\measuredangle AMB=120^\circ$. Затоа $\measuredangle CMD=60^\circ$, т.е. $\triangle MCD$ е половина од рамностран триаголник, што значи дека $\overline{DM}=\frac{1}{2}\overline{MC}=\overline{AM}$. Според тоа, $\triangle AMD$ е



рамнокрак, па затоа $\measuredangle MAD=\measuredangle MDA=30^\circ$. Сега од $\triangle ADC$ добиваме $\measuredangle ACD=180^\circ-\measuredangle CAD-\measuredangle ADC=180^\circ-30^\circ-(30^\circ+90^\circ)=30^\circ$, што значи дека овој триаголник е рамнокрак, т.е. $\overline{AD}=\overline{DC}$. Понатаму, важи $\measuredangle DAB=45^\circ-30^\circ=15^\circ$, што значи дека и $\triangle ABD$ е рамнокрак, па затоа $\overline{BD}=\overline{AD}=\overline{CD}$. Значи, правоаголниот $\triangle CBD$ е рамнокрак, од каде следува дека $\measuredangle DCB=45^\circ$. Конечно,

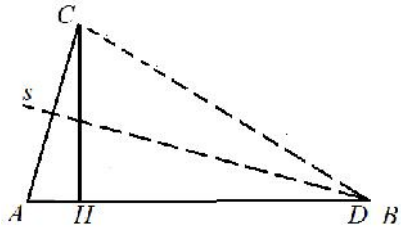
$$\measuredangle ACB=\measuredangle BCD+\measuredangle DCA=45^\circ+30^\circ=75^\circ.$$

38. Даден е $\triangle ABC$. Нека H е подножјето на висината повлечена од темето C. Ако $\overline{CH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ и $\measuredangle BAC=75^\circ$, определи ја мерката на $\measuredangle ABC$.

Решение. Нека симетралата s на страната AC ја сече правата AB во точката D. Тогаш $\overline{AD}=\overline{DC}$ и $\measuredangle ACD=75^\circ$. Значи,

$$\measuredangle ADC=180^\circ-2\cdot 75^\circ=30^\circ.$$

Триаголникот CHD е правоаголен со еден остар агол $\measuredangle HDC = 30^\circ$, што значи дека е половина од рамнostран триаголник. Според тоа, катетата наспроти $\measuredangle HDC = 30^\circ$ е половина од хипотенузата, т.е. $\overline{CH} = \frac{1}{2}\overline{CD}$. Од последното равенство и од равенството $\overline{CH} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ следува равенството $\overline{CD} = \overline{AB}$, па како $\overline{AD} = \overline{DC}$, добиваме $\overline{AD} = \overline{AB}$. Според тоа, точките A и D се совпаѓаат, па затоа $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 30^\circ$.



39. Триаголникот ABC е рамнокрак и симетралата на надворешниот агол во темето B зафаќа со правата AC агол од 15°. Определи ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. Рамнокракиот $\triangle ABC$ може да биде со $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AB} = \overline{BC}$ или $\overline{AC} = \overline{AC}$. Нека $\overline{AC} = \overline{BC}$.

а) Симетралата l на надворешниот агол при темето B ја сече AC во точката D таква, што точката C е меѓу A и D. Да означиме

$$\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = \sim .$$

Тогаш

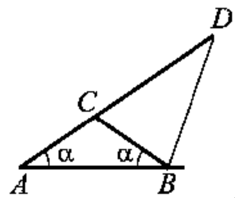
$$\measuredangle ACB = 180^\circ - 2\sim, \measuredangle CBD = 90^\circ - \frac{\sim}{2}.$$

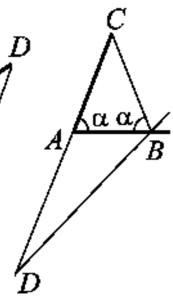
Од $\triangle CBD$ имаме

$$\measuredangle ACB = \measuredangle CDB + \measuredangle CBD,$$

т.е.

$$180^\circ - 2\sim = 15^\circ + 90^\circ - \frac{\sim}{2},$$





од каде добиваме $\sim = 50^\circ$. Значи, аглите на триаголникот се $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = 50^\circ$ и $\measuredangle ACB = 80^\circ$.

б) Симетралата l на надворешниот агол при темето B ја сече AC во точката D таква, што точката A е меѓу C и D. Ако земеме предвид дека $\measuredangle BAC = \sim$ и $\measuredangle ABD = 90^\circ - \frac{\sim}{2}$, од $\triangle ABD$ наоѓаме

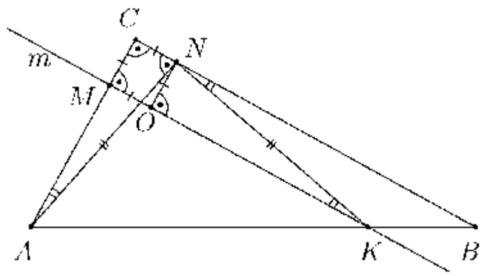
$$\measuredangle CAB = \measuredangle ABD + \measuredangle ADB, \text{ т.е. } \sim = 15^\circ + 90^\circ - \frac{\sim}{2},$$

па затоа $\sim = 70^\circ$. Значи, аглите на триаголникот се $\measuredangle ACB = 40^\circ$ и $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 70^\circ$.

Во преостанатите случаи се разгледува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

40. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ ($\measuredangle C = 90^\circ$) и точка O во неговата внатрешност. Низ точката O е повлечена права m, паралелна на BC, која ги сече AC во точка M и AB во точка K. Ако $ON \perp BC$ ($N \in BC$), $\overline{OM} = \overline{ON}$ и $\measuredangle CAN = \measuredangle BNK$, определи ги аглите на $\triangle ANK$.

Решение. Од $m \| BC$ следува $\measuredangle CMO = 90^\circ$. Од $\measuredangle MCN = \measuredangle ONC = \measuredangle OMC = 90^\circ$ следува дека $MONC$ е правоаголник и како $\overline{OM} = \overline{ON}$ заклучуваме дека тоа е квадрат и $\overline{CM} = \overline{CN}$.

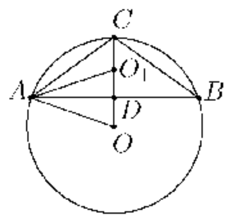


Од $m \| BC$ следува $\measuredangle OKN = \measuredangle KNB = \sim$. Сега, од $\triangle ANC$ добиваме дека $\measuredangle ANC = 90^\circ - \measuredangle CAN = 90^\circ - \measuredangle BNK = 90^\circ - \sim$, т.е. $\measuredangle ANK = 90^\circ$.

Понатаму, $\overline{ON} = \overline{CN}$, $\measuredangle CAN = \measuredangle OKN = \sim$ и $\measuredangle ACN = \measuredangle KON = 90^\circ$, па затоа $\triangle ACN \cong \triangle KON$. Според тоа, $\overline{AN} = \overline{NK}$, т.е. $\triangle ANK$ е рамнокрак правоаголен, па затоа $\measuredangle NAK = \measuredangle NKA = 45^\circ$.

41. Центрите на впишаната и опишаната кружница на рамнокракиот триаголник ABC се симетрични во однос на основата AB. Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Нека O и O_1 се соодветно центрите на опишаната и впишаната кружница на рамнокракиот $\triangle ABC$. Нека AB и CO се сечат во точката D (цртеж десно). Бидејќи AO_1 е симетрала на $\measuredangle BAC = \sim$ и точките O и O_1 се симетрични во однос на AB добиваме



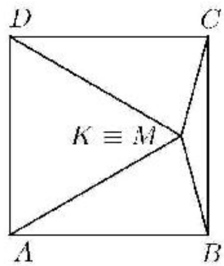
$$\measuredangle OAD = \measuredangle DAO_1 = \measuredangle O_1AC = \frac{\sim}{2}.$$

Сега $\triangle CAO$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle ACO = \measuredangle OAC = \frac{3\sim}{2}$. Конечно, од правоаголниот $\triangle ADC$ следува $\sim + \frac{3\sim}{2} = 90^\circ$, т.е. $\sim = 36^\circ$. Значи,

$$\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 36^\circ \text{ и } \measuredangle ACB = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 108^\circ.$$

42. Точката M е внатрешна за квадратот $ABCD$ и $\measuredangle MAD = 60^\circ, \measuredangle MCB = 15^\circ$. Определи ја големината на $\measuredangle MDC$.

Решение. На полуправата AM наоѓаме точка K таква што $\overline{AK} = \overline{AB}$. Ќе докажеме дека $K \equiv M$.

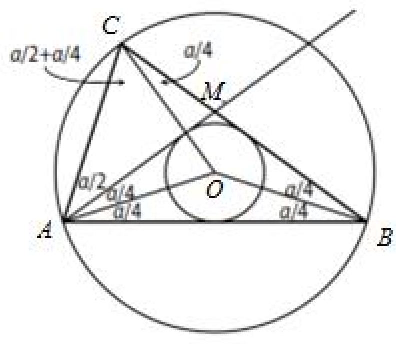


Од $\overline{AB} = \overline{AD}$ следува дека $\overline{AK} = \overline{AD}$, па затоа $\triangle AKD$ е рамностран. Според тоа, $\overline{DK} = \overline{DC}$, т.е. $\triangle DKC$ е рамнокрак. Но, $\measuredangle KDC = 30^\circ$, па затоа $\measuredangle DKC = 75^\circ$. Оттука следува дека $\measuredangle BCK = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$. Но, по услов $\measuredangle BCM = 15^\circ$ и затоа важи $\measuredangle BCK = \measuredangle BCM$. Последното значи дека полуправите CM и CK се совпаѓаат, што значи дека точките K и M се совпаѓаат. Според тоа, $\measuredangle MDC = \measuredangle KDC = 30^\circ$.

43. Нека M е пресекот на симетралата на внатрешниот агол во темето A и страната BC на триагоникот ABC. Ако центарот на впишаната кружница на триаголникот AMB истовремено е и центар на опишаната кружница околку триаголникот ABC, определи ги мерките на аглите на триаголникот ABC.

Решение. Со $\sim$, ,¥ да ги означиме аглите на триаголникот ABC, а со O заедничкиот центар на впишаната во триаголникот AMB и опишаната кружница околу триаголникот ABC. Бидејќи AM е симетрала на аголот $\sim$, добиваме

$$\measuredangle CAM = \measuredangle MAB = \frac{\sim}{2}.$$



Понатаму, AO е симетрала на $\measuredangle MAB$, па затоа

$$\measuredangle MAO = \measuredangle OAB = \frac{\sim}{4}.$$

Сега, отсечките OA, OB, OC се радиуси на опишаната кружница околу триаголникот ABC, па затоа три-

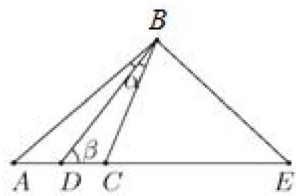
аголниците ABO, BCO, CAO се рамнокраки. Оттука следува
$\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = \measuredangle OBC = \measuredangle OCB = \frac{\sim}{4}$ и $\measuredangle OCA = \measuredangle OAC = \frac{\sim}{4} + \frac{\sim}{2} = \frac{3\sim}{4}$.

Според тоа, $\quad = \frac{\sim}{2}$ и $¥ = \sim$, па ако замениме во $\sim + \quad + ¥ = 180^\circ$, добиваме $\sim = 72^\circ$, $\quad = 36^\circ, ¥ = 72^\circ$.

4. КАРАКТЕРИСТИЧНИ ТОЧКИ И ЛИНИИ НА ТРИАГОЛНИК

1. За $\triangle ABC$ е дадено $\measuredangle ACB = \measuredangle CAB + 90^\circ$. Нека BD и BE (D, E лежат на правата AC) се соодветно внатрешната и надворешната симетрала на $\measuredangle ABC$. Докажи дека $\overline{BD} = \overline{BE}$.

   Решение. Внатрешната и надворешната симетрала се заемно нормални, односно $\measuredangle DBE = 90^\circ$. Да означиме $\measuredangle BDC = \quad$ и $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD = \sim$. Од $\triangle BDC$ добиваме $\measuredangle ACB = 180^\circ - \sim - \quad$. Понатаму, бидејќи $\measuredangle BDC$ е надворешен за $\triangle ADB$, важи $\measuredangle CAB = \quad - \sim$. Сега, од ра-венството $\measuredangle ACB = \measuredangle CAB + 90^\circ$ добиваме $180^\circ - \sim - \quad = \quad - \sim + 90^\circ$, па затоа $\quad = 45^\circ$. Според тоа, правоаголниот $\triangle BDE$ е рамнокрак, па затоа $\overline{BD} = \overline{BE}$.



2. Внатре во $\triangle ABC$, на симетралата l на $\measuredangle ABC$, е земена точка M таква што симетралите на отсечките AM и MC се сечат на l. Ако $s_{AM} \cap AB = P$ и $s_{CM} \cap CB = N$, докажи дека $\overline{BP} : \overline{BN} = \overline{BA} : \overline{BC}$.

   Решение. Ако $O \in s_{AM} \cap s_{CM} \cap l$, тогаш $O \in s_{AC} \cap l$ (во случајов O лежи на опишаната кружница на $\triangle ABC$). Тогаш OP и ON се симе-трали на агли во $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$, соодветно. Сега, од својствата на симетралата на агол следува

$$\overline{BN} : \overline{NC} = \overline{BO} : \overline{OC} = \overline{BO} : \overline{OA} = \overline{BP} : \overline{PA}.$$

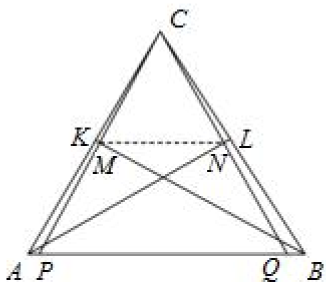
   Оттука следува $\overline{BN} : \overline{BC} = \overline{BP} : \overline{BA}$.

3. Должините на страните на триаголникот ABC се $\overline{AB} = 125\,cm$, $\overline{AC} = 117\,cm$ и $\overline{BC} = 120\,cm$. Симетралата на внатрешниот агол во темето A ја сече страната BC во точката L, а симетралата на внатрешниот агол во темето B ја сече страната AC во точката K. Нека M и N се

подножјата на нормалите повлечени од темето C на правите BK и AL, соодветно. Определи ја должината на отсечката MN.

Решение. Нека полуправите CM и CN ја сечат AB во точките P и Q. Триаголниците CPB и CQA се рамнокраки, бидејќи $\overline{CB}=\overline{PB}$ и $\overline{CQ}=\overline{QA}$, па затоа

$\overline{PQ}=\overline{BP}+\overline{AQ}-\overline{AB}=\overline{BC}+\overline{AC}-\overline{AB}=112\ cm$.

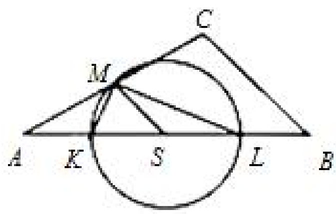


Но, M и N се средини на CP и CQ, соодветно, што значи дека MN е средна линија (отсечка) на триаголникот PQC, па затоа $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=56\ cm$.

4. Точките K и L се на страната AB на триаголникот ABC, такви што $\overline{KL}=\overline{BC}$ и $\overline{AK}=\overline{LB}$. Нека M е средина на AC. Докажи дека $\measuredangle KML=90^\circ$.

Решение. Нека S е средината на страната AB. Тогаш

$$\overline{SK}=\overline{SA}-\overline{AK}=\overline{SB}-\overline{LB}=\overline{SL},$$

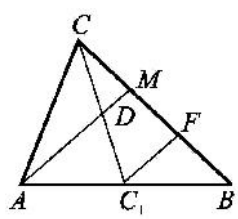


што значи дека S е средина на отсечката KL. Значи, $\overline{SK}=\overline{SL}=\frac{\overline{KL}}{2}=\frac{\overline{BC}}{2}$.

Од друга страна, SM е средна линија во триаголникот ABC, па затоа $\overline{SM}=\frac{\overline{BC}}{2}=\overline{SK}=\overline{SL}$. Според тоа, точките K,L,M припаѓаат на иста кружница со центар S и радиус $\frac{\overline{BC}}{2}$. Бидејќи KL е дијаметар на оваа кружница, следува $\measuredangle KML=90^\circ$.

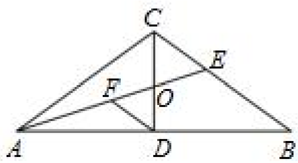
5. Нека D е средината на тежишната линија CC_1 на $\triangle ABC$. Правата AD ја сече страната BC во точката M. Ако $\overline{BC}=a$, определи ги должините на отсечките BM и CM.

Решение. Конструираме $C_1F \parallel AM$ ($F\in BC$). Бидејќи C_1F е средна отсечка за $\triangle ABM$, важи $\overline{BF}=\overline{FM}$. Понатаму, DM е средна отсечка во $\triangle CC_1F$, па затоа $\overline{CM}=\overline{FM}$.



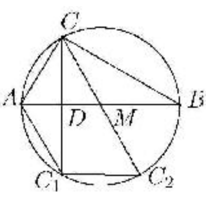
Според тоа, $\overline{CM} = \overline{MF} = \overline{FB}$, па затоа $\overline{CM} = \frac{a}{3}$ и $\overline{BM} = \frac{2a}{3}$.

6. Во рамнокрак триаголник ABC $(\overline{AC} = \overline{BC})$ мерката на аголот при врвот се 108°. Нека E е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle BAC$ и страната BC. Ако D е подножјето на висината повлечена од темето C, докажи дека $\overline{AE} = 2\overline{CD}$.



Решение. Нека $CD \cap AE = \{O\}$. Од $\measuredangle ACB = 108^\circ$, следува $\measuredangle ABC = \measuredangle CAB = 36^\circ$, па затоа $\measuredangle CAE = 18^\circ$. Оттука добиваме $\measuredangle AEC = 54^\circ$. Сега, висината CD е симетрала на $\measuredangle ACB$, па затоа важи $\measuredangle OCE = 54^\circ$, што значи дека триаголникот OCE е рамнокрак ($\overline{OC} = \overline{OE}$). Нека отсечката DF е средна линија на триаголникот ABE ($F \in AE$). Тогаш $DF \parallel BE$ и затоа $\measuredangle ODF = \measuredangle OFD = 54^\circ$. Според тоа, триаголникот OFD е рамнокрак и затоа $\overline{OF} = \overline{OD}$. Сега $\overline{CD} = \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{OE} + \overline{OF} = \overline{EF}$. Бидејќи DF е средна линија на триаголникот ABE, точката F е средина на страната AE, па затоа $\overline{AE} = 2\overline{EF}$, т.е. $\overline{AE} = 2\overline{CD}$.

7. Во триаголникот ABC се повлечени висината CD $(D \in AB)$ и тежишната линија CM $(M \in AB)$ и $D \neq M$. Ако $\measuredangle ACD = \measuredangle BCM$, докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.

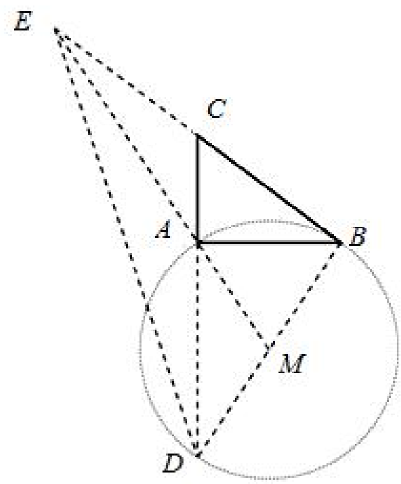


Решение. Нека правите CD и CM ја сечат кружницата k, опишана околу $\triangle ABC$, соодветно во точките C_1 и C_2. Да означиме $\measuredangle BAC = \sim$. Тогаш $\measuredangle ACD = 90^\circ - \sim = \measuredangle MCB$. Според тоа,
$\measuredangle CC_1C_2 = \measuredangle CC_1B + \measuredangle BC_1C_2 = \sim + 90^\circ - \sim = 90^\circ$.
Значи, тетивата CC_2 е дијаметар на k. Бидејќи AB не е нормална на дијаметарот CC_2 и се полови во точката M, заклучуваме дека AB исто така е дијаметар на k. Според тоа, $\triangle ABC$ е правоаголен.

8. Даден е $\triangle ABC$. На правата AC е избрана точка D таква што $\overline{CD} = 3\overline{CA}$ (точката A е меѓу точките C и D), а на правата BC е из-

брана точка E, различна од B, таква што $\overline{CE}=\overline{BC}$. Ако $\overline{BD}=\overline{AE}$, докажи дека $\measuredangle BAC=90^\circ$.

Решение. Точката C е средина на BE, па затоа во $\triangle BED$ отсечката DC е тежишна линија и како по услов $\overline{CD}=3\overline{CA}$, заклучуваме дека A е тежиште на $\triangle BED$. Нека $M=BD\cap AE$. Тогаш EM е тежишна линија во $\triangle BED$, па затоа M е средина на отсечката BD. Имаме

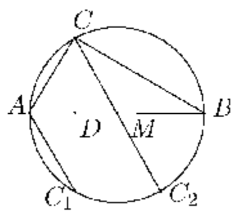


$$\overline{AM}=\frac{\overline{AE}}{2}=\frac{\overline{BD}}{2}=\overline{BM}=\overline{DM},$$

што значи дека M е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABD$. Според тоа, $\measuredangle BAD=90^\circ$, како периферен агол над дијаметар, па затоа $\measuredangle BAC=90^\circ$.

9. Во правоаголниот триаголник ABC $(\measuredangle ACB=90^\circ)$ се повлечени висината $CD\,(D\in AB)$ и тежишната линија CM $(M\in AB)$. Докажи дека $\measuredangle ACD=\measuredangle BCM$.

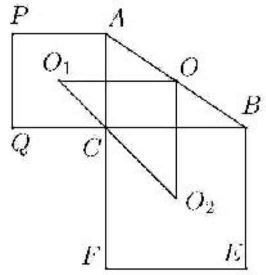
Решение. Ја конструираме опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Правите CD и CM ја сечат кружницата соодветно во точките C_1 и C_2 (цртеж десно). Точката D е средина на отсечката CC_1 и $\overline{AC}=\overline{AC_1}$. Триаголникот BCM е рамнокрак и како $\overline{AC}=\overline{AC_1}$, а периферните агли на еднакви тетиви се еднакви, добиваме



$$\measuredangle MCB=\measuredangle MBC=\measuredangle ABC=\measuredangle ACC_1=\measuredangle ACD.$$

Според тоа, $\measuredangle ACD=\measuredangle BCM$.

10. Над катетите AC и BC на правоаголниот триаголник ABC, надвор од триаголникот се конструирани соодветно квадратите $ACPQ$ и $BEFGC$, со центри O_1 и O_2. Нека O е средината на AB. Докажи дека $\triangle OO_2O_1$ е правоаголен и точката C припаѓа на O_2O_1.

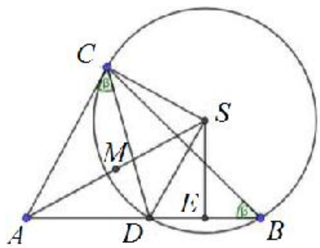


Решение. Бидејќи

$$\measuredangle O_1CO_2 = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ,$$

точките O_2, O_1 и C се колинеарни. Понатаму, точката O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Затоа O_1O е симетрала на AC и O_2O е симетрала на BC. Според тоа, $O_1O \parallel BC$ и $O_2O \parallel AC$, од што следува дека $\measuredangle O_2OO_1 = \measuredangle ACB = 90^\circ$.

11. Во триаголникот ABC важи $\overline{AB} > \overline{AC}$. Нека D е точка на страната AB таква што важи $\measuredangle ACD = \measuredangle ABC$. Нека точката E е средината на отсечката DB, а точката S е центарот на опишаната кружница околу триаголникот BDC. Ако точката M е средината на отсечката AS, докажи дека важи $\overline{ME} = \overline{MC}$.



Решение. Бидејќи S е центар на опишаната кружница околу триаголникот BDC, важи $\overline{SB} = \overline{SD}$, па како во рамнокрак триаголник тежишната линија кон основата воедно е и висина, добиваме $SE \perp AB$. Според тоа, триаголникот AES е правоаголен, па бидејќи точката M е средина на хипотенузата AS, заклучуваме дека M е центар на опишаната кружница околу триаголникот AES. Според тоа,

$$\overline{ME} = \overline{MA} = \overline{MS}. \qquad (1)$$

Да означиме $\measuredangle ACD = \measuredangle ABC =$. Бидејќи S е центар на опишаната кружница околу триаголникот BDC, важи $\measuredangle CSD = 2\measuredangle CBD = 2$. Но, $\overline{SB} = \overline{SD}$, па затоа $\measuredangle SCD = \frac{180^\circ - \measuredangle CSD}{2} = \frac{180^\circ - 2}{2} = 90^\circ -$. Според тоа, $\measuredangle ACS = \measuredangle ACD + \measuredangle DCS = \; + 90^\circ - \; = 90^\circ$. Значи, триаголникот ASC е правоаголен, па затоа точката M е центар на опишаната околу него кружница, т.е.

$$\overline{MC} = \overline{MA} = \overline{MS}. \qquad (2)$$

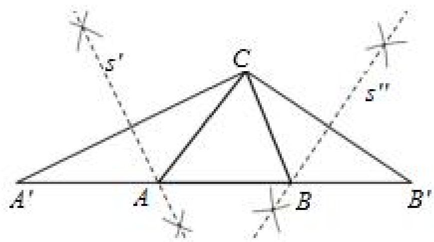
Конечно,од (1) и (2) следува $\overline{ME} = \overline{MC}$.

12. Конструирај триаголник ABC со периметар $14\,cm$ а мерките на двата внатрешни агли се $52^\circ 30'$ и $67^\circ 30'$.

Решение. *Анализа*. Нека е даден триаголникот ABC во кој $\measuredangle BAC =$ $\sim = 52^\circ 30'$ и $\measuredangle ABC = \quad = 67^\circ 30'$. Ја продолжуваме страната AB преку точката A до точка A' и преку точката B до точка B' така што $\overline{AA'} = \overline{AC}$ и $\overline{BB'} = \overline{BC}$. Тогаш должината на отсечката $A'B'$ е еднаква на периметарот на триаголникот ABC. Понатаму, триаголниците ACA' и BCB' се рамнокраки, со основи $A'C$ и $B'C$ и надворешни агли при темињата при врвот $\sim$ и , па затоа $\measuredangle AA'C = \frac{1}{2}\sim = 26^\circ 15'$ (четвртина од агол од 105°) и $\measuredangle BB'C = \frac{1}{2} \quad = 33^\circ 45'$ (четвртина од агол од 135°). Темињата A и B припаѓаат на симетралите на страните $A'C$ и $B'C$.

Конструкција. 1) На произволна права p нанесуваме отсечка $A'B'$ со должина $14\,cm$.

2) Над правата p во точката A' нанесуваме агол од $26^\circ 15'$, а во точката B' агол од $33^\circ 45'$.
3) Во пресекот на краците, кои не лежат на правата p, на овие два агли е темето C.
4) Во пресекот на симетралата на отсечката $A'C$ и правата p е темето A.



5) Во пресекот на симетралата на отсечката $B'C$ и правата p е темето B.

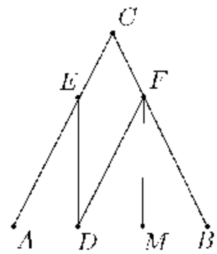
Доказ. Следува непосредно од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност.

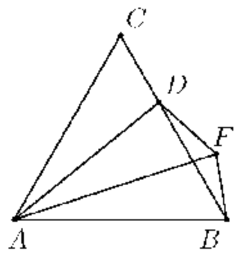
5. СКЛАДНИ И СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

1. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, ($\overline{AC}=\overline{BC}$). На основата AB е земена точка D таква што $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{DB}$. Нормалата на AB во точката D ја сече AC во точката E, а правата низ D паралелна со AC ја сече BC во точката F. Докажи дека $\overline{CE}=\overline{CF}$.

Решение. Од $DF \parallel AC$ следува $\measuredangle BDF=\measuredangle BAC$, т.е. $\triangle DBF$ е рамнокрак. Според тоа, висината FM е и тежишна линија. Значи, M е средина на DB. Но, $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{DB}$, па затоа $\overline{AD}=\overline{BM}$. Сега, од $\overline{AD}=\overline{BM}$, $\measuredangle ADE=\measuredangle BMF=90^\circ$ и $\measuredangle DAE=\measuredangle MBF$ следува $\triangle ADE \cong \triangle BMF$. Затоа $\overline{AE}=\overline{BF}$, од каде следува $\overline{CE}=\overline{CF}$.



2. На цртежот десно е даден рамностран триаголник ABC. Точката F е таква што $\overline{AF}=\overline{BC}$ и $\measuredangle CAF=42^\circ$, а точката D пресечната точка на страната BC и симетралата на $\measuredangle CAF$. Определи го $\measuredangle DFB$.



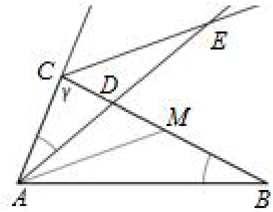
Решение. Бидејќи $\overline{AF}=\overline{BC}$ и $\measuredangle CAD=\measuredangle FAD$, заклучуваме дека $\triangle AFD \cong \triangle ACD$. Според тоа, $\measuredangle AFD=\measuredangle ACD=60^\circ$.

Од друга страна, $\measuredangle BAF=60^\circ-42^\circ=18^\circ$. Но, $\triangle ABF$ е рамнокрак со врв A, па затоа $\measuredangle AFB=90^\circ-\frac{1}{2}\measuredangle BAF=81^\circ$. Конечно,

$$\measuredangle DFB=\measuredangle AFD+\measuredangle AFB=60^\circ+81^\circ=141^\circ.$$

3. Во триаголникот ABC важи $\overline{BC}=2\overline{AC}$. Нека D е точка на страната BC таква што важи $\measuredangle CAD=\measuredangle ABC$. Симетралата на надворешниот агол кај темето C ја сече полуправата AD во точка E. Докажи дека $\overline{AE}=\overline{AB}$.

Решение. Нека M е средина на страната BC. Тогаш $\overline{AC} = \overline{CM} = \overline{MB}$. Ако $\measuredangle ACM = ¥$, тогаш $\measuredangle AMC = \measuredangle CAM = 90^\circ - \frac{¥}{2}$, од каде следува $\measuredangle AMB = 90^\circ + \frac{¥}{2}$. Исто така,

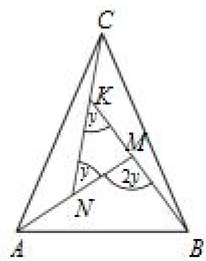


$$\measuredangle ACE = ¥ + \frac{180^\circ - ¥}{2} = 90^\circ + \frac{¥}{2} = \measuredangle AMB .$$

Сега од признакот АСА следува $\triangle ACE \cong \triangle BMA$, па затоа $\overline{AE} = \overline{AB}$.

4. Во внатрешноста на рамнокрак триаголник ABC $(\overline{AC} = \overline{BC})$ дадена е точка M таква што $\measuredangle AMB = 2\measuredangle ACB$. На отсечката AM е избрана точка N таква што $\measuredangle CNM = \measuredangle ACB$. Докажи дека $\overline{CN} = \overline{BM} + \overline{MN}$.

Решение. Нека K е пресечната точка на правите BM и CN. Тогаш



$$\begin{aligned}\measuredangle NKM &= \measuredangle AMB - \measuredangle CNM \\ &= 2\measuredangle ACB - \measuredangle ACB \\ &= \measuredangle ACB = \measuredangle KNM ,\end{aligned}$$

па затоа $\triangle KNM$ е рамнокрак, т.е. $\overline{MN} = \overline{MN}$. Понатаму, $\measuredangle CKB = \measuredangle CNA$, како надворешни агли на рамнокрак триаголник. Да означиме $\measuredangle BCK = x$. Имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle CAN &= 180^\circ - (180^\circ - y) - (y - x) \\ &= x = \measuredangle BCK\end{aligned}.$$

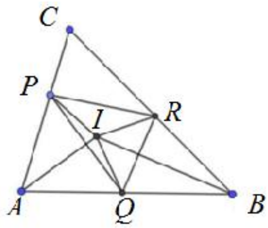
Сега, во триаголниците BCK и CAN двата пара агли се еднакви, па затоа е еднаков и третиот пар агли, па како $\overline{AC} = \overline{BC}$, од признакот АСА следува дека овие триаголници се складни. Конечно, од докажаната складност добиваме

$$\overline{CN} = \overline{BK} = \overline{BM} + \overline{MK} = \overline{BM} + \overline{MN} .$$

5. Нека I е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC и нека P, Q, R се точки соодветно на страните AC, AB, BC такви што важи $\overline{AP} = \overline{AQ}, \overline{BQ} = \overline{BR}$. Ако $\measuredangle RIQ = \measuredangle BAC$, докажи дека $RP \perp AC$.

Решение. Бидејќи I е центар на впишаната кружница, AI и BI се симетралите на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ABC$. Нека $\measuredangle RIQ = \measuredangle BAC = \sim$. Од $\overline{AP} = \overline{AQ}$ следува

$$\measuredangle AQP = \measuredangle APQ = 90^\circ - \frac{\sim}{2}. \qquad (1)$$



Понатаму, бидејќи $\overline{AP} = \overline{AQ}$, $\measuredangle PAI = \measuredangle QAI$ и $\overline{AI} = \overline{AI}$, од признакот САС следува дека триаголниците API и AQI се складни, па затоа $\overline{IP} = \overline{IQ}$. Слично се докажува дека триаголниците BQI и BRI се складни, па затоа важи $\overline{IR} = \overline{IQ}$. Значи, $\overline{IP} = \overline{IQ} = \overline{IR}$, па затоа I е центар на опишаната кружница околу триаголникот PQR. Затоа важи

$$\measuredangle QRP = \frac{\measuredangle QIR}{2} = \frac{\sim}{2}. \qquad (2)$$

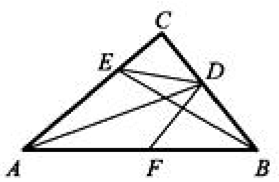
Сега, од (1) и (2) следува

$$\measuredangle APR = \measuredangle APQ + \measuredangle QRP = 90^\circ - \frac{\sim}{2} + \frac{\sim}{2} = 90^\circ,$$

односно $RP \perp AC$.

6. Во остроаголниот триаголник ABC симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точката D. Низ D е повлечена права, која ја сече страната AC во точката E така што $\measuredangle CDE = \measuredangle BAC$. Докажи дека $\measuredangle BAC = 2\measuredangle DBE$.

Решение. Нека точката $F \in AB$ е таква што $\overline{AE} = \overline{AF}$. Триаголниците ADE и AFD се складни. Затоа $\overline{DE} = \overline{DF}$ и



$\measuredangle DFB = \measuredangle DEC = 180^\circ - (\measuredangle EDC + \measuredangle ACB)$,

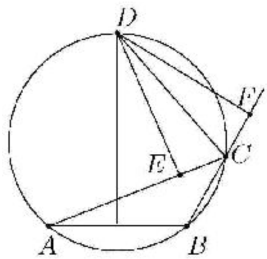
$\measuredangle ABC = 180^\circ - (\measuredangle ACB + \measuredangle BAC)$.

Според тоа, $\triangle DFB$ е рамнокрак и $\overline{DB} = \overline{DF} = \overline{DE}$, од каде следува дека $\triangle DEB$ е рамнокрак. Тогаш $\measuredangle ABD = \frac{1}{2}\measuredangle EDC = \frac{1}{2}\measuredangle BAC$.

7. Околу $\triangle ABC$ $(\overline{AC} > \overline{BC})$ е опишана кружница. Симетралата на AB ја сече кружницата во точката D која е на лакот $\overset{\frown}{AC}$ кој не ја содржи точката B. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од точката D на правата AC. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{BC} + \overline{CE}$.

Решение. На полуправата BC нанесуваме отсечка CF таква што $\overline{CF} = \overline{CE}$ (цртеж долу десно). За триаголниците DEC и DCF важи

$\overline{CF}=\overline{CE}$, CD е заедничка страна и $\measuredangle ECD=\measuredangle ACD=\measuredangle ABD=\measuredangle BAD=\measuredangle DCF$, па затоа $\triangle DEC \cong \triangle DCF$. Сега, за триаголниците AED и BFD важи $\overline{AD}=\overline{BD}$, $\overline{DF}=\overline{DE}$ и $\measuredangle AED=\measuredangle BFD=90^\circ$, па затоа тие се складни. Според тоа,

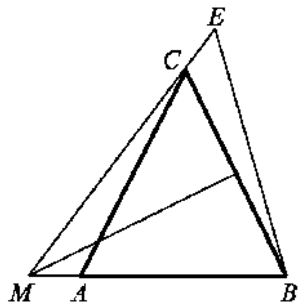


$$\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{BC}+\overline{CF}=\overline{BC}+\overline{CE}.$$

8. Даден е остроаголен рамнокрак триаголник ABC, ($\overline{AC}=\overline{BC}$). Симетралата на кракот BC ја сече полуправата AB во точката M. Нека E е точка на полуправата MC таква што C е меѓу M и E и $\overline{CE}=\overline{MA}$. Докажи дека триаголникот MBE е рамнокрак.

Решение. Бидејќи M припаѓа на симетралата на BC, важи $\overline{MB}=\overline{MC}$. За триаголниците MAC и ECB важи $\overline{MA}=\overline{CE}$ (по услов), $\overline{AC}=\overline{BC}$ (по услов) и

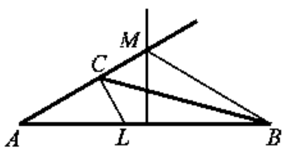
$$\measuredangle MAC=180^\circ-\measuredangle BCA=180^\circ-\measuredangle MBC$$
$$=180^\circ-\measuredangle BCM=\measuredangle BCE,$$



па затоа тие се складни. Според тоа, $\overline{BE}=\overline{MC}=\overline{MB}$, што значи дека $\triangle MBE$ е рамнокрак.

9. Даден е триаголник ABC, во кој $\measuredangle BAC=30^\circ$ и $\measuredangle ABC=15^\circ$. Точката L припаѓа на страната AB и $\measuredangle ALC=60^\circ$. Ако M е пресечната точка на симетралата на AB и правата AC, докажи дека $\overline{AL}=2\overline{CM}$.

Решение. Триаголникот ABM е рамнокрак со $\measuredangle BAM=\measuredangle ABM=30^\circ$. Понатаму, триаголниците BMC и BCL имаат заедничка страна BC, $\measuredangle BMC=\measuredangle BLC=120^\circ$

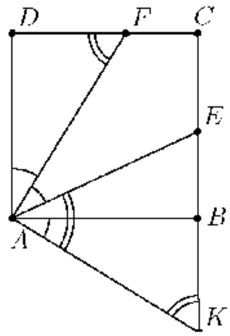


и $\measuredangle LBC=\measuredangle MBC=15^\circ$, па затоа тие се складни. Од складноста следува $\overline{CL}=\overline{CM}$. Понатаму, триаголникот ACL е половина од рамностран триаголник, па затоа важи $\overline{AL}=2\overline{CL}=2\overline{CM}$.

10. Даден е квадрат $ABCD$. На страните BC и CD соодветно се земени

точки E и F така, што AF е симетрала на $\measuredangle EAD$. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{DF} + \overline{BE}$.

Решение. Да означиме $\measuredangle DAF = \measuredangle FAE = \alpha$. На продолжението на страната CB преку точката B земаме точка K таква, што $\overline{BK} = \overline{DF}$ (цртеж десно). Триаголниците ABK и ADF се правоаголни и имаат еднакви катети, па затоа тие се складни. Значи, $\measuredangle KAB = \measuredangle DAF = \alpha$ и затоа важи $\measuredangle AKB = 90^\circ - \alpha$. Освен тоа,



$\measuredangle KAE = \measuredangle KAB + \measuredangle BAE = \alpha + (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$.

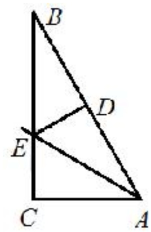
Од претходните разгледувања следува равенството $\measuredangle KAE = \measuredangle AKE$, што значи дека $\triangle AKE$ е рамнокрак. Значи,

$$\overline{AE} = \overline{KE} = \overline{BK} + \overline{BE} = \overline{DF} + \overline{BE}.$$

11. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C и агол од 60° во темето A. Ако D е средина на хипотенузата AB и E е пресекот на симетралата на $\measuredangle CAB$ и катетата BC, докажи дека триаголниците AEC, ADE и BED се складни меѓу себе.

Решение. Јасно, $\measuredangle ABC = 30^\circ$, па затоа бидејќи AE е симетрала на $\measuredangle BAC = 60^\circ$ важи

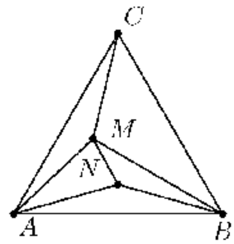
$$\measuredangle CAE = \measuredangle EAD = \measuredangle EBD = 30^\circ.$$



Понатаму, бидејќи D е средина AB и триаголникот ABE е рамнокрак, добиваме дека ED е висина во овој триаголник, што значи дека триаголниците AEC, AED и BED се правоаголни и кај сите три вториот остар агол е еднаков на 60°. Конечно, ED е заедничка страна за триаголниците AED и BED па од признакот АСА следува $\triangle AED \cong \triangle BED$, а како AE е заедничка страна за триаголниците AED и AEC, повторно од признакот АСА следува $\triangle AED \cong \triangle AEC$. Но складноста е транзитивна релација, па затоа важи $\triangle AEC \cong \triangle BED$.

12. Во внатрешноста на рамностран $\triangle ABC$ се избрани точки M и N такви што $\measuredangle ACM = \measuredangle CAM = \measuredangle ABN = \measuredangle BAN = 18^\circ$. Определи го $\measuredangle BMN$.

Решение. Јасно, $\triangle ACM \cong \triangle ABN$, па затоа важи $\overline{AM} = \overline{AN}$. Во рамнокракиот $\triangle AMN$ имаме



$$\measuredangle MAN = 60^\circ - 2\cdot 18^\circ = 24^\circ,$$

па затоа важи

$$\measuredangle AMN = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\cdot 24^\circ = 78^\circ.$$

Понатаму, од $\triangle AMN$ следува

$$\measuredangle AMC = 180^\circ - 2\cdot 18^\circ = 144^\circ$$

и како тој е рамнокрак добиваме дека $\triangle ABM \cong \triangle BCM$. Според тоа,

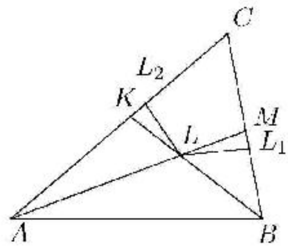
$$\measuredangle AMB = \frac{360^\circ - 144^\circ}{2} = 108^\circ,$$

па затоа

$$\measuredangle BMN = \measuredangle AMB - \measuredangle AMN = 108^\circ - 78^\circ = 30^\circ.$$

13. Во $\triangle ABC$, со $\measuredangle ACB = 60^\circ$, симетралата AM ($M \in BC$) на $\measuredangle BAC$ и симетралата BK $(K \in AC)$ на $\measuredangle ABC$ се сечат во точката L. Докажи дека $\overline{LM} = \overline{LK}$.

Решение. Нека $LL_1 \perp BC$ $(L_1 \in BC)$ и $LL_2 \perp AC$ $(L_2 \in AC)$. Тогаш $\measuredangle L_2LL_1 = 120^\circ$. Но, и $\measuredangle KLM = 120^\circ$, па затоа



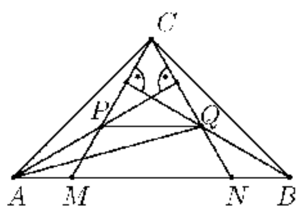
$\measuredangle KLL_2 = \measuredangle KLL_1 - \measuredangle L_2LL_1 = \measuredangle KLL_1 - 120^\circ$,

$\measuredangle L_1LM = \measuredangle KLL_1 - \measuredangle KLM = \measuredangle KLL_1 - 120^\circ$,

што значи $\measuredangle KLL_2 = \measuredangle L_1LM$. Сега, ако земеме предвид дека $\overline{LL_2} = \overline{LL_1}$ и $\measuredangle KL_2L = \measuredangle ML_1L = 90^\circ$, добиваме дека $\triangle KL_2L \cong \triangle ML_1L$. Конечно, од добиената складност следува $\overline{LM} = \overline{LK}$.

14. Даден е рамнокрак правоаголен $\triangle ABC$, $\measuredangle C = 90^\circ$. Точките M и N од страната AB се такви што $\measuredangle ACM = \measuredangle BCN = 15^\circ$. Ако нормалата од A повлечена на CN ја сече CM во точката P, а нормалата повлечена од B кон CM ја сече CN во точката Q, докажи дека $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$ и $\overline{AQ} = \overline{BC}$.

Решение. Од условот на задачата следува дека $\measuredangle MCN = 90^\circ - 2\cdot 15^\circ = 60^\circ$. Понатаму, $\measuredangle MNC$ е надворешен за $\triangle BCN$, па



затоа $\measuredangle MNC = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$. Според тоа, $\triangle MNC$ е рамностран. Бидејќи $AP \perp CN$, добиваме $\measuredangle PAC = 90^\circ - \measuredangle ACN = 15^\circ$, што значи дека $\triangle APC$ е рамнокрак и $\overline{AP} = \overline{PC}$. Аналогно, $\triangle BQC$ е рамнокрак и $\overline{BQ} = \overline{QC}$. Сега, $\triangle APC \cong \triangle BQC$, па затоа $\overline{PC} = \overline{QC}$. Но, $\measuredangle PCQ = \measuredangle MCN = 60^\circ$, па $\triangle PQC$ е рамностран и затоа важат равенствата $\overline{AP} = \overline{PC} = \overline{PQ} = \overline{CQ} = \overline{QB}$.

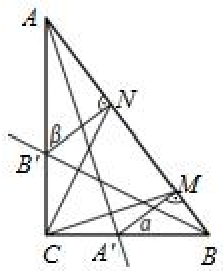
Триаголниците APC и APQ се складни, и бидејќи

$$\overline{AP} = \overline{PC} = \overline{PQ},\ \ \measuredangle APC = 180^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 150^\circ \text{ и}$$

$$\measuredangle APQ = 360^\circ - (\measuredangle APC + \measuredangle CPQ) = 360^\circ - (150^\circ + 60^\circ) = 150^\circ.$$

Според тоа, $\overline{AQ} = \overline{AC} = \overline{BC}$.

15. Во правоаголен триаголник ABC, $\measuredangle ACB = 90^\circ$, симетралите на острите агли ги сечат спротивните катети во точките A' и B'. Нека M и N се подножјата а нормалите повлечени соодветно од точките A' и B' кон хипотенузите. Определи ја големината на $\measuredangle MCN$.



Решение. Нека $\measuredangle BAC = \sim$ и $\measuredangle ABC =$. Триаголниците MBA' и $NB'A$ се правоаголни, па како $\sim + \ = 90^\circ$, добиваме $\measuredangle BA'M = \sim$ и $\measuredangle AB'N =$. Триаголниците ACA' и AMA' се складни (АСА), па затоа $\overline{A'C} = \overline{A'M}$. Триаголниците $BB'C$ и $BB'N$ се складни (АСА), па затоа $\overline{B'C} = \overline{B'N}$. Триаголниците MCA' и NCB' се рамнокраки, па како $\measuredangle BA'M$ и $\measuredangle AB'N$ се соодветно надворешни агли за овие триаголници, добиваме дека важи $\measuredangle A'CM = \frac{\sim}{2}$ и $\measuredangle B'CN = \frac{}{2}$. Конечно, добиваме

$$\measuredangle MCN = 90^\circ - (\measuredangle A'CM + \measuredangle B'CN) = 90^\circ - \frac{\sim +}{2} = 45^\circ.$$

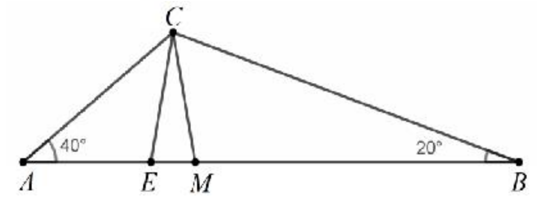
16. Во триаголникот ABC важи

$$\measuredangle BAC = 40^\circ, \measuredangle CBA = 20^\circ \text{ и } \overline{AB} - \overline{BC} = 10\ cm.$$

Симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката M. Определи ја должината на отсечката CM.

Решение. *Прв начин.* Нека E е точка на страната AB таква што $\overline{BE}=\overline{BC}$. Важи

$\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{BE}=\overline{AB}-\overline{BC}$
$=10\ cm.$



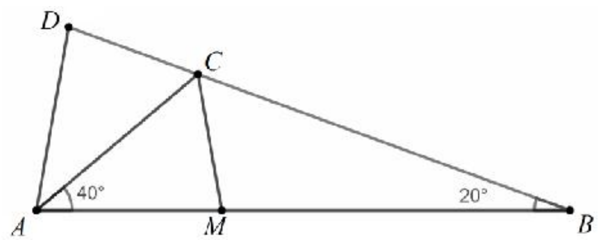
Понатаму, од триаголникот ABC наоѓаме $\measuredangle ACB=120^\circ$. Сега, CM е симетрала на $\measuredangle ACB$, па затоа $\measuredangle ACM=\measuredangle MCB=60^\circ$. Од $\overline{BE}=\overline{BC}$ следува дека триаголникот EBC е рамнокрак, што значи дека $\measuredangle BEC=\measuredangle ECB=80^\circ$. Сега,

$$\measuredangle ECM=\measuredangle ECB-\measuredangle MCB=20^\circ \text{ и } \measuredangle CME=80^\circ.$$

Од $\measuredangle CME=\measuredangle MEC$ следува дека триаголникот EMC е рамнокрак, па затоа $\overline{CE}=\overline{CM}$. Исто така, $\measuredangle ACE=\measuredangle ACM-\measuredangle ECM=40^\circ$, односно $\measuredangle ACE=\measuredangle EAC$. Затоа триаголникот AEC е рамнокрак и важи $\overline{CE}=\overline{AE}$. Конечно, $\overline{CM}=\overline{CE}=\overline{AE}=10\ cm$.

Втор начин. Нека D е точка на полуправата BC таква што $\overline{DB}=\overline{AB}$. Тогаш важи

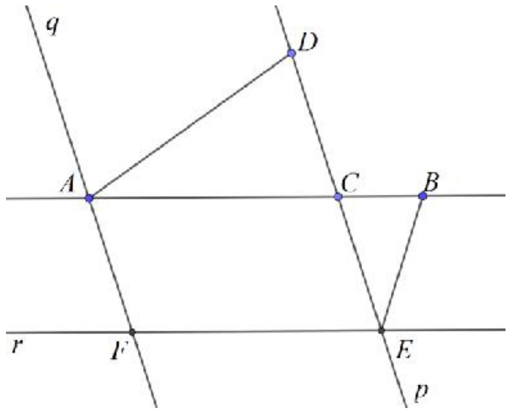
$\overline{CD}=\overline{BD}-\overline{BC}$
$=\overline{AB}-\overline{BC}$
$=10\ cm.$



Триаголникот ABD е рамнокрак, па затоа $\measuredangle BAD=\measuredangle BDA=80^\circ$. Понатаму, $\measuredangle DCA$ е надворешен за триаголникот ABC, па затоа $\measuredangle DCA=40^\circ+20^\circ=60^\circ$, од каде следува дека $\measuredangle ACB=120^\circ$. Но CM е симетрала на овој агол, па затоа $\measuredangle ACM=\measuredangle MCB=60^\circ$. За аглите на триаголникот ACD имаме $\measuredangle DCA=60^\circ$ и $\measuredangle ADC=80^\circ$, па затоа $\measuredangle CAD=40^\circ$. Сега, $\measuredangle CAD=\measuredangle MAC$, $\measuredangle DCA=\measuredangle ACM$ и $\overline{AC}=\overline{AC}$, па од признакот ACA следува дека триаголниците ACD и AMC се складни. Конечно, од оваа складност следува $\overline{CM}=\overline{CD}=10\ cm$.

17. Правата p ја сече отсечката AB во точката C. Точката D припаѓа на

правата p, различна е од C и важи $\overline{AC}=\overline{AD}$. Точката E припаѓа на правата p (C е меѓу E и D) и важи $\overline{EC}=\overline{EB}$. Правата q паралелна на правата p која минува низ точката A и правата r паралелна на правата AB која минува низ точката E се сечат во точката F. Докажи дека $\overline{FB}=\overline{FD}$.

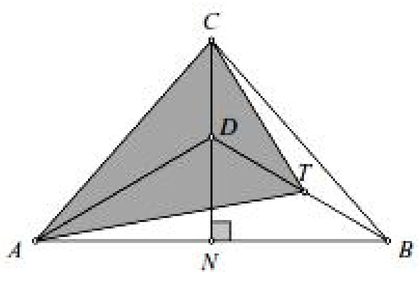


Решение. Според условот $\overline{AC}=\overline{AD}$ и $\overline{EC}=\overline{EB}$, што значи дека триаголниците ACD и ABC се рамнокраки. Од $\measuredangle DCA=\measuredangle ECB$ (накрсни агли), следува дека аглите при основите на триаголниците ACD и ABC се еднакви, па затоа се еднакви и нивните агли при врвовите, т.е. $\measuredangle CAD=\measuredangle CEB$. Понатаму, $AB\,||\,r$ и $p\,||\,q$, па затоа четириаголникот $ACEF$ е паралелограм. Според тоа, $\overline{AC}=\overline{FE}$, $\overline{EC}=\overline{AF}$ и $\measuredangle CAF=\measuredangle FEC$.

Од досега изнесеното следува дека $\overline{AD}=\overline{AC}=\overline{FE}$, $\overline{BE}=\overline{EC}=\overline{AF}$ и $\measuredangle DAF=\measuredangle DAC+\measuredangle CAF=\measuredangle FEC+\measuredangle CEB=\measuredangle FEB$, па затоа од признакот САС следува дека триаголниците FAD и BEF се складни. Од докажаната складност следува $\overline{FB}=\overline{FD}$.

18. Во рамнокрак триаголник ABC аголот наспроти основата AB е еднаков на 80°. На висината над основата на триаголникот избрана е точка D таква што $\measuredangle DBA=30^\circ$. На отсечката BD е избрана точка T таква што $\measuredangle TAD=20^\circ$. Определи ја мерката на $\measuredangle TCA$.

Решение. Бидејќи AB е основа на рамнокракиот триаголник ABC заклучуваме дека $\measuredangle ACB=80^\circ$, $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=50^\circ$. Нека N е подножјето на висината повлечена од темето C (цртеж десно). Бидејќи висината CN над



основата AB воедно е симетрала на основата и $D \in CN$ заклучуваме дека $\overline{AD} = \overline{BD}$, што значи дека $\triangle ABD$ е рамнокрак. Затоа важи $\measuredangle BAD = \measuredangle ABD = 30^\circ$ и $\measuredangle ADB = 120^\circ$. Сега, од $\triangle ADT$ следува дека $\measuredangle DTA = 180^\circ - (120^\circ + 20^\circ) = 40^\circ$. Понатаму, $\measuredangle BAT = \measuredangle BAD - \measuredangle TAD$, т.е. $\measuredangle BAT = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ$. Висината повлечена над основата во рамнокрак триаголник е симетрала на аголот наспроти основата, па затоа $\measuredangle ACD = 80^\circ : 2 = 40^\circ$, а за другите два агли на $\triangle ADC$ добиваме

$$\measuredangle DAC = \measuredangle BAC - \measuredangle BAD = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ \text{ и}$$

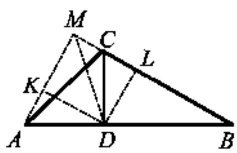
$$\measuredangle CDA = 180^\circ - (40^\circ + 20^\circ) = 120^\circ.$$

Сега, $\triangle ADT \cong \triangle ADC$, бидејќи AD и заедничка страна и двата агли над неа се еднакви (признак САС). Од оваа складност следува дека $\overline{AC} = \overline{AT}$, па затоа $\triangle ATC$ е рамнокрак, во кој $\measuredangle TAC$ е аголот наспроти основата. Сега, од $\measuredangle TAC = \measuredangle BAC - \measuredangle BAT = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$ следува $\measuredangle TCA = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$.

19. Во тапоаголен триаголник $ABC\ (\measuredangle C > 90^\circ)$, CD и AM се висини и $\measuredangle A = 45^\circ$.

а) Докажи, дека MD е симетрала на $\measuredangle AMB$.

б) Ако $DL\ (L \in BC)$ е висина во триаголникот BCD, определи ја должината на BL, ако $\measuredangle MDC = 15^\circ$ и $\overline{CL} = a$.



Решение. а) Нека $DK \perp AM$ и $DL \perp BC$, каде $K \in AM$ и $L \in BC$. Од $\measuredangle AKD = \measuredangle CLD = 90^\circ$, $\measuredangle DAK = \measuredangle DCL = 90^\circ - \measuredangle B$ и $\overline{CD} = \overline{AD}$, следува дека триаголниците ADK и CDL се складни. Според тоа, $\overline{DK} = \overline{DL}$. Значи, точката D е еднакво оддалечена од краците на $\measuredangle AMB$, па затоа MD е симетрала на $\measuredangle AMB$.

б) Во $\triangle DCM$ имаме $\measuredangle MDC = 15^\circ$ и $\measuredangle DMC = 45^\circ$. Затоа $\measuredangle DCB = 60^\circ$ како надворешен агол за $\triangle DCM$. Триаголникот DLC е правоаголен и $\measuredangle DCL = 60^\circ$, па затоа тој е половина од рамностран триаголник, и како $\overline{CL} = a$, добиваме $\overline{DC} = 2a$. Понатаму, триаголникот CDB е правоаголен и $\measuredangle DCB = 60^\circ$, па затоа тој е половина од рамностран триаголник е $\overline{BC} = 2\overline{DC} = 4a$. Конечно, добиваме

$$\overline{BL} = \overline{BC} - \overline{CL} = 4a - a = 3a .$$

20. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C . Нека M, N, P се соодветно средините на страните AB, BC, CA . Над отсечката AP е конструиран рамностран триаголник APK , а над отсечката BN е конструиран рамностран триаголник BNL така што точките B и K се на различни страни од правата AC , а точките A и L се на различни страни од правата BC .

а) Докажи дека триаголникот MKL е рамнокрак.

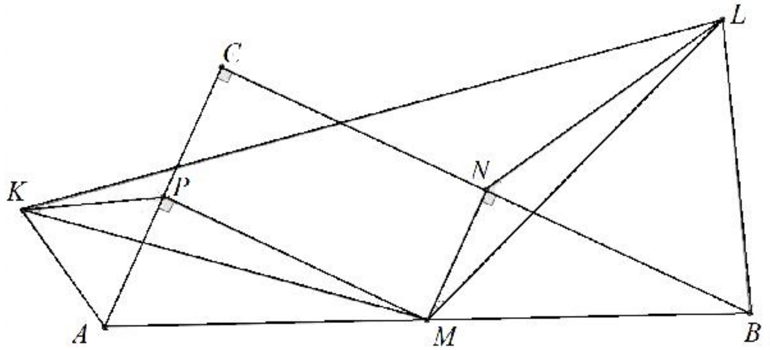
б) Определи ја мерката на $\measuredangle MKL$.

Решение. а) Отсечката MN е средна линија за триаголникот ABC , па затоа $MN \parallel AC$ и $\overline{MN} = \frac{\overline{AC}}{2}$. Сега, од $\measuredangle BCA = 90^\circ$ следува дека $AC \perp BC$, па затоа $MN \perp BC$. Аналогно добиваме дека $\overline{MP} = \frac{\overline{BC}}{2}$ и $MP \perp AC$. Значи,четириаголникот $MNCP$ е правоаголник, па затоа важи $\measuredangle MNC = \measuredangle NCP = \measuredangle CPM = \measuredangle PMN = 90^\circ$.

Понатаму, триаголникот APK е рамностран, па затоа $\measuredangle APK = 60^\circ$ и $\overline{PK} = \overline{AP} = \frac{\overline{AC}}{2}$. Слично, триаголникот BLN е рамностран па затоа важи $\measuredangle BNL = 60^\circ$ и $\overline{NL} = \overline{BN} = \frac{\overline{BC}}{2}$. Сега, да ги разгледаме триаголниците KPM и MNL . Имаме

$$\overline{PK} = \frac{\overline{AC}}{2} = \overline{MN} , \ \overline{NL} = \frac{\overline{BC}}{2} = \overline{MP} \text{ и } \measuredangle KPM = 90^\circ + 60^\circ = \measuredangle MNL ,$$

па од признакот САС следува $\triangle KPM \cong \triangle MNL$. Од оваа складност следува $\overline{KM} = \overline{ML}$, што значи дека триаголникот MKL е рамнокрак.



б) Од $\overline{KM} = \overline{ML}$ следува $\measuredangle MKL = \measuredangle MLK$. Да означиме $\measuredangle PKM = x$.

Од триаголникот KPM следува

$$\measuredangle PMK = 180^\circ - \measuredangle KPM - \measuredangle PKM = 180^\circ - 150^\circ - x = 30^\circ - x .$$

Од $\triangle KPM \cong \triangle MNL$ следува

$$\measuredangle NML = \measuredangle PKM = x \text{ и } \measuredangle NLM = \measuredangle PMK = 30^\circ - x ,$$

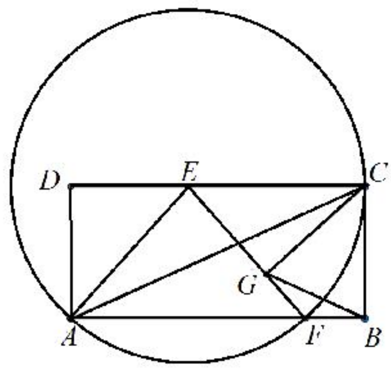
па затоа

$$\measuredangle KML = \measuredangle KMP + \measuredangle PMN + \measuredangle NML = x + 90^\circ + 30 - x = 120^\circ .$$

Конечно, од рамнокракиот триаголник KLM следува

$$\measuredangle MKL = \frac{180^\circ - \measuredangle KML}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ .$$

21. Даден е правоаголник $ABCD$ $(\overline{AB} > \overline{BC})$. Симетралата на дијагоналата AC ја сече страната CD во точката E. Кружницата $k(E, \overline{EA})$ по вторпат ја сече страната AB во точката F. Нека G е подножјето на нормалата повлечена од точката C на правата EF. Докажи дека точката G припаѓа на дијагоналата BD.



Решение. Бидејќи E припаѓа на симетралата на дијагоналата AC важи $\overline{EC} = \overline{EA}$, па затоа $C \in k$, т.е. E е центар на опишаната кружница околу триаголникот AFC. Да означиме $\measuredangle CAB = \measuredangle DCA = x$.

Сега, од $\overline{EC} = \overline{EA}$ следува $\measuredangle EAC = \measuredangle ECA = x$, од каде добиваме дека $\measuredangle AEC = 180^\circ - 2x$, што значи дека $\measuredangle AED = 2x$. Од друга страна, важи $\measuredangle CEG = \measuredangle EFA$ (агли со паралелни краци), а како $\measuredangle EFA = \measuredangle EAF = 2x$, добиваме $\measuredangle CEG = 2x = \measuredangle AED$. Сега $\overline{EC} = \overline{EA}$, $\measuredangle CEG = \measuredangle AED$ и $\measuredangle EGC = 90^\circ = \measuredangle EDA$, па од признакот АСА следува дека триаголниците AED и CEG се складни. Од оваа складност следува $\overline{DE} = \overline{EG}$ и $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{CG}$. Но, сега $\overline{BC} = \overline{CG}$, $\overline{CF} = \overline{CF}$ и $\measuredangle CGF = 90^\circ = \measuredangle CBF$, па од признакот САС следува дека триаголниците CGF и CBF се складни. Тоа значи, $\overline{FB} = \overline{FG}$. Значи, триаголниците DEG и FGB се рамнокраки и важи $\measuredangle DEG = \measuredangle FGB$ (агли со паралелни краци), па затоа $\measuredangle EGD = \measuredangle FGB$, од што следува дека точките B, G, D се колинеарни, што и требаше да се докаже.

22. За аглите на $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ABC = \frac{7}{2}\measuredangle CAB$ и $\measuredangle BCA = \frac{3}{2}\measuredangle CAB$. Симетралата на страната AC ги сече симетралата AD на $\measuredangle CAB$ и страната AB во точките M и K, соодветно. Докажи дека $\triangle BCM$ е рамнокрак и пресметај го периметарот на четириаголникот $BCMK$, ако важи $\overline{AM} + \overline{MK} = 6\,cm$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 180^\circ,$$

$$\frac{7}{2}\measuredangle CAB + \frac{3}{2}\measuredangle CAB + \measuredangle CAB = 180^\circ,$$

$$6\measuredangle CAB = 180^\circ,$$

$$\measuredangle CAB = 30^\circ,$$

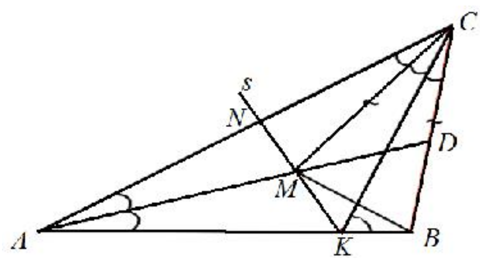
па затоа $\measuredangle BCA = 45^\circ$, $\measuredangle ABC = 105^\circ$.

Понатаму, $M, K \in s$, па затоа важи $\overline{AM} = \overline{CM}$ и $\overline{AK} = \overline{CK}$, т.е. триаголниците ACM и ACK се рамнокраки. Тоа значи дека

$\measuredangle KAC = \measuredangle ACK = 30^\circ$.

Понатаму, бидејќи AM е симетрала на $\measuredangle CAK$, добиваме дека

$$\measuredangle KAM = \measuredangle MAC = 15^\circ.$$



Но, $\triangle ACM$ е рамнокрак па затоа $\measuredangle ACM = \measuredangle CAM = 15^\circ$, од што следува дека

$$\measuredangle MCK = \measuredangle ACK - \measuredangle ACM = 15^\circ$$

и затоа

$$\measuredangle KCB = \measuredangle ACK - \measuredangle MCK = 15^\circ.$$

Сега, од $\triangle BCK$ следува

$$\measuredangle BKC = 180^\circ - (\measuredangle KBC + \measuredangle BCK) = 180^\circ - (105^\circ + 15^\circ) = 60^\circ,$$

а од правоаголниот $\triangle KCN$ следува

$$\measuredangle MKC = \measuredangle NKC = 180^\circ - (\measuredangle KNC + \measuredangle NCK) = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ.$$

Понатаму, од

$$\measuredangle MKC = \measuredangle BKC = 60^\circ, \measuredangle MCK = \measuredangle BCK = 15^\circ \text{ и } \overline{KC} = \overline{KC}$$

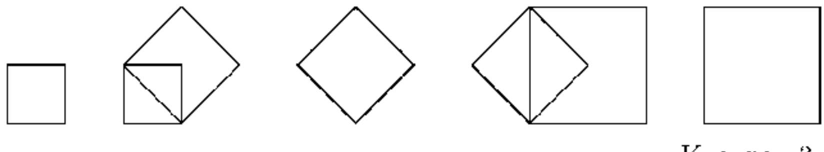
следува $\triangle MKC \cong \triangle BKC$. Од докажаната складност следува $\overline{MC} = \overline{BC}$, што значи дека $\triangle BCM$ е рамнокрак.

Од условот на задачата иимаме $\overline{AM} + \overline{MK} = 6\ cm$, па како $\overline{AM} = \overline{CM}$, добиваме $\overline{CM} + \overline{MK} = 6\ cm$. Конечно, од $\triangle MKC \cong \triangle BKC$ следува

$$L_{BCMK} = \overline{CM} + \overline{MK} + \overline{KB} + \overline{BC} = 2(\overline{CM} + \overline{MK}) = 12\ cm.$$

6. ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

1. Во низа од квадрати првиот квадрат има страна $1\,cm$. Должината на страната на секој следен квадрат е еднаква на должината на дијагона-лата на претходниот квадрат. На долните цртежи е прикажано како се добиваат вториот и третиот квадрат. Определи ја должината на страната на 11-тиот квадрат.



Решение. Од Питагоровата теорема следува дека должината на страната на третиот квадрат е два пати поголема од должината на страната на првиот квадрат. Аналогно, должината на страната на петтиот квадрат е два пати поголема од должината на страната на третиот квадрат итн. Бидејќи $\frac{11-1}{2}=5$, добиваме дека должината на страната на 11-тиот квадрат е $2^5=32\,cm$.

2. Продавницата во која Пабло го купил телевизорот продава само телевизори кај кои должината и ширината на екраните се во однос 7:4. Ако дијагоналата на екранот на телевизорот на Пабло е еднаква на $10\sqrt{65}\,cm$, определи ги должината и ширината на екранот.

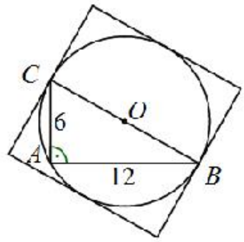
Решение. Јасно, должината и ширината на телевизорот на Пабло се $7t$ и $4t$. Од Питагоровата теорема следува $(7t)^2+(4t)^2=(10\sqrt{65})^2$, односно $49t^2+16t^2=6500$, од каде добиваме $t=10$. Значи, должината на екранот е $7\cdot10=70\,cm$, а ширината на екранот е $4\cdot10=40\,cm$.

3. Даден е правоаголен триаголник чии катети се со должини $6\,cm$ и $12\,cm$. Околу овој триаголник е опишана кружница, а околу кружницата е опишан квадрат. Пресметај ја плоштината на овој квадрат.

Решение. За хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC имаме

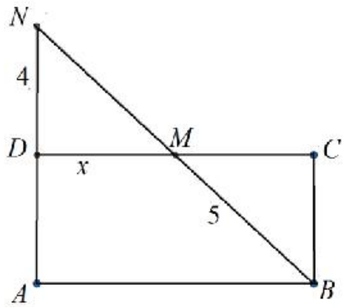
$$c^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 12^2 = 180 \text{, т.е. } c = 6\sqrt{5}\ cm.$$

Триаголникот ABC е правоаголен, па затоа центарот на опишаната кружница припаѓа на хипотенузата, што значи дека хипотенузата е дијаметар на опишаната кружница. Понатаму, должината на страната на квадратот опишан околу кружницата е еднаква на должината на дијаметарот на кружницата, па затоа плоштината на квадратот е $P = c^2 = 180\ cm^2$.



4. Во правоаголникот $ABCD\ (\overline{AB} > \overline{BC})$ точката M е средина на страната CD. Правата BM ја сече правата AD во точката N. Ако $\overline{DN} = 4$ и $\overline{BM} = 5$, определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

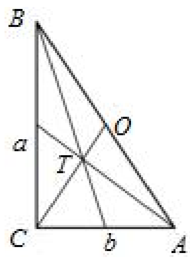
Решение. Нека $\overline{DM} = x$. Сега M е средина на CD, па затоа $\overline{AB} = \overline{CD} = 2x$. Понатаму, триаголниците ABN и DMN се правоаголни и имаат заеднички остар агол, па затоа тие се слични. Според тоа, $\frac{\overline{AN}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DM}}$ и $\frac{\overline{BN}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DM}}$, т.е. $\frac{\overline{AN}}{4} = \frac{2x}{x}$ и $\frac{5+\overline{MN}}{\overline{MN}} = \frac{2x}{x}$ од каде следува $\overline{AN} = 8$ и $\overline{MN} = 5$. Значи, $\overline{BN} = \overline{BM} + \overline{MN} = 10$, па од Питагоровата теорема следува $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BN}^2 - \overline{AN}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.



Конечно, $\overline{AB} = 6$ и $\overline{AD} = 8 - 4 = 4$, па затоа $P_{ABCD} = 6 \cdot 4 = 24$.

5. Должините на тежишните линии соодветни на катетите во правоаголен триаголник се $\sqrt{52}cm$ и $\sqrt{73}\ cm$. Определи го растојанието меѓу тежиштето и центарот на опишаната кружница на овој триаголник.

Решение. Нека C е темето на правиот агол, T е тежиштето и O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Јасно, O е средина на хипотенузата, чија должина е c. Јасно, точките C, T, O се колинеарни и бидејќи $\overline{CO} = \frac{c}{2}$, добиваме

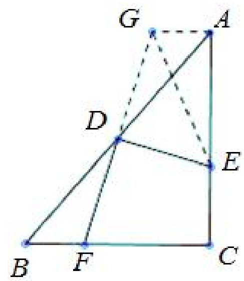


$\overline{TO} = \frac{1}{3}\overline{CO} = \frac{c}{6}$. Ако катетите на правоаголниот триаголник се со должини $a,b\ (a > b)$, важи

$$73 = a^2 + (\tfrac{b}{2})^2 \text{ и } 52 = b^2 + (\tfrac{a}{2})^2 .$$

Ако ги собереме последните две равенства, по средувањето добиваме $100 = a^2 + b^2$. Според тоа, $c^2 = 100$ и затоа $c = 10\,cm$. Конечно, бараното растојание е $\overline{TO} = \frac{5}{3}\,cm$.

6. Во правоаголен триаголник ABC точката D е средина на хипотенузата, а E и F се точки на катетите AC и BC соодветно такви што $DE \perp DF$. Докажи дека $\overline{EF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BF}^2$.

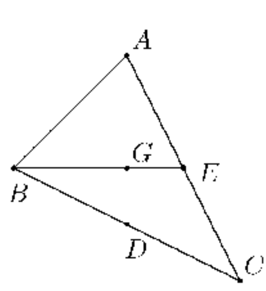


Решение. Низ точката A повлекуваме права паралелна на BC. Нека правата FD ја сече оваа паралелна права во точката G (цртеж десно). За триаголниците BDF и ADG важи $\overline{AD} = \overline{DB}$, $\measuredangle DAG = \measuredangle BDF$ како наизменични агли и $\measuredangle ADG = \measuredangle BDF$ како накрсни агли, па затоа тие се складни. Од оваа складност следува $\overline{DG} = \overline{DF}$. Сега, за правоаголните триаголници EDG и EDF имаат една заедничка катета и $\overline{DG} = \overline{DF}$, па затоа тие се складни, односно $\overline{EG} = \overline{EF}$. Конечно, од Питагоровата теорема применета на триаголникот EGA и претходните разгледувања следува

$$\overline{EF}^2 = \overline{EG}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BF}^2 ,$$

што и требаше да се докаже.

7. Точките D и E се соодветно средини на страните BC и CA на триаголникот ABC. Отсечките AD и BE се заемно нормални. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}$.



Решение. Нека G е тежиштето на триаголникот ABC, $\overline{EG} = x$ и $\overline{DG} = y$ (цртеж десно). Тогаш $\overline{BG} = 2x$ и $\overline{AG} = 2y$. Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AB}^2 = 4x^2 + 4y^2,$$
$$\overline{AE}^2 = x^2 + 4y^2,$$
$$\overline{BD}^2 = 4x^2 + y^2.$$

Сега,

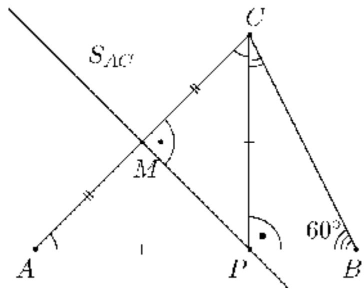
$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = 20(x^2 + y^2).$$

Според тоа,

$$\frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = 5.$$

8. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\measuredangle ABC = 60^\circ$. Низ средината M на AC е повлечена нормала на AC, која ја сече AB во точка P така што $\measuredangle ACP : \measuredangle PCB = 3:2$. Ако $\overline{BP} = 3\,cm$, определи ги должините на страните на $\triangle ABC$.

Решение. Нека $\measuredangle ACP = 3\sim$. Тогаш $\measuredangle PCB = 2\sim$. Бидејќи $P \in S_{AC}$, важи $\overline{AP} = \overline{PC}$ и $\measuredangle PAC = \measuredangle PCA = 3\sim$. Сега, од $\triangle ABC$ следува $8\sim + 60^\circ = 180^\circ$, т.е. $\sim = 15^\circ$. Тогаш $\measuredangle BCP = 30^\circ$ и $\measuredangle BPC = 90^\circ$. Во правоаголниот триаголник BPC важи $\measuredangle BCP = 30^\circ$, што значи дека тој е половина на рамностран триаголник, па затоа



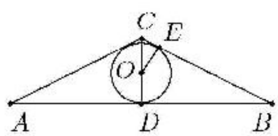
$$\overline{BC} = 2\overline{BP} = 6\,cm \text{ и } \overline{CP} = \overline{BP}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,cm.$$

Значи,

$$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{BP} = 3(1+\sqrt{3})\,cm \text{ и } \overline{AC} = \overline{AP}\sqrt{2} = 3\sqrt{6}\,cm.$$

9. Околу кружница со радиус 3 е опишан рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AC} = \overline{BC}$ и $\measuredangle BAC = 30^\circ$. Определи ги страните на овој триаголник.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и $OE \perp BC$ ($E \in BC$). Од $\measuredangle OCE = \frac{1}{2}\measuredangle ACB = 60^\circ$, следува дека $\triangle OEC$ е половина од рамностран



триаголник, $\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{OC}$ и $\overline{CO}^2=\overline{OE}^2+\overline{CE}^2$, од каде следува

$$\overline{CO}^2=\frac{1}{4}\overline{CO}^2+3^2, \text{ т.е. } \overline{CO}=2\sqrt{3}.$$

Сега, $\overline{CD}=\overline{CO}+\overline{OD}=2\sqrt{3}+3$. Понатаму, $\measuredangle DAC=30^\circ$, па затоа $\triangle ADC$ е половина од рамностран триаголник. Според тоа,

$$\overline{BC}=\overline{AC}=2\overline{CD}=4\sqrt{3}+6$$

и

$$\overline{AB}=2\overline{BD}=2\overline{BE}=2(\overline{BC}-\overline{CE})=2(4\sqrt{3}+6-\sqrt{3})=6\sqrt{3}+12.$$

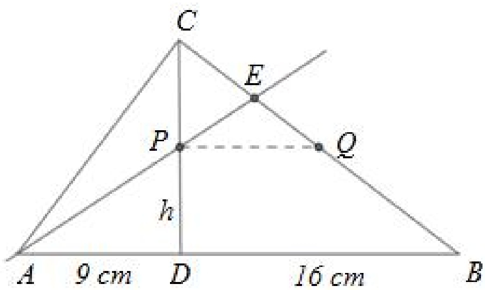
10. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C и $\measuredangle BAC>\measuredangle ABC$. Висината h повлечена кон хипотенузата AB ја дели AB на две отсечки со должини $9\,cm$ и $16\,cm$. Во темето A е повлечена права која минува низ средината на висината h и ја сече страната BC во точката E. Пресметај ја должината на отсечката AE.

Решение. Нека D е подножјето на висината, а P и Q се средините на висината h и страната BC. Од Евклидовата теорема следува

$$h^2=\overline{AD}\cdot\overline{DB},$$

т.е.

$$h=\sqrt{9\cdot16}=12\,cm.$$



Сега, од Питагоровата теорема:

- од триаголникот ADC добиваме $\overline{AC}=\sqrt{9^2+12^2}=15\,cm$,
- од триаголникот BDC добиваме $\overline{BC}=\sqrt{16^2+12^2}=20\,cm$,
- од триаголникот ADP добиваме $\overline{AP}=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{119}=3\sqrt{13}\,cm$.

Отсечката PQ е средна линија за триаголникот BDC па затоа $PQ\parallel BD$ и $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{BD}=8\,cm$. Понатаму, триаголниците ABE и PQE се слични, па затоа

$$\overline{AB}:\overline{PQ}=\overline{AE}:\overline{PE}, \text{ т.е. } \overline{AB}:\overline{PQ}=(\overline{AP}+\overline{PE}):\overline{PE},$$

од каде последователно добиваме

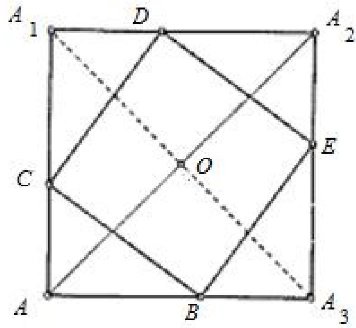
$$25:8=(3\sqrt{13}+\overline{PE}):\overline{PE},$$
$$25\cdot\overline{PE}-8\cdot\overline{PE}=24\sqrt{13},$$
$$\overline{PE}=\tfrac{24}{17}\sqrt{13}\ cm.$$

Конечно,

$$\overline{AE}=\overline{AP}+\overline{PE}=3\sqrt{13}+\tfrac{24}{17}\sqrt{13}=\tfrac{75}{17}\sqrt{13}\ cm\,.$$

11. Над хипотенузата BC на правоаголниот триаголник ABC е конструиран квадрат $BCDE$, во надворешноста на триаголникот. Нека O е центарот на овој квадрат. Ако m и n се соодветно должините на катетите AB и AC, определи ја должината на отсечката OA.

Решение. Го ротираме триаголникот BAC во насока на движењето на стрелките на часовникот околу центарот O за агли 90°, 180° и 270°. Притоа темето A редоследно се пресликува во точките A_1, A_2, A_3 (цртеж десно). Бидејќи $\measuredangle ACB=\measuredangle A_1DC$, добиваме



$$\measuredangle ACB+\measuredangle BCD+\measuredangle DCA_1=180^\circ,$$

па затоа точките A,C и A_1 се колинеарни. Слично, точките A_1, D и A_2 се колинеарни, точките A_2, E и A_3 се колинеарни, точките A_3, B и A се колинеарни. Според тоа, четириагоникот $AA_1A_2A_3$ е квадрат со должина на страна $m+n$. Бидејќи OA со ротација за 180° преминува во OA_2, точката O е средина на дијагоналата AA_2 на квадратот. Затоа важи $\overline{OA}=\frac{m+n}{\sqrt{2}}$.

12. Даден е четириаголник $ABCD$ таков што $AB\,||\,CD$, $\overline{AB}=25\,cm$, $\overline{CD}=11\,cm$, $\overline{BC}=15\,cm$ и $\overline{AD}=13\,cm$. Докажи дека $\measuredangle ACB=90^\circ$.

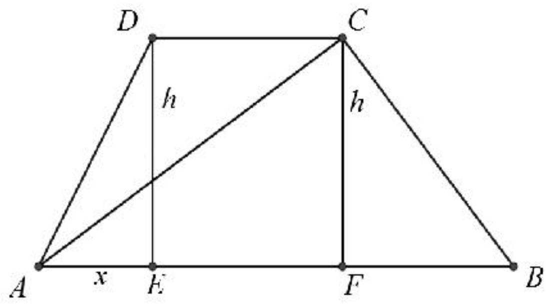
Решение. Од темето C повлекуваме нормала CF на AB, а од темето D нормала DE на AB. Четириаголникот $EFCD$ е правоаголник, па затоа $\overline{EF}=\overline{CD}=11\,cm$. Нека $\overline{AE}=x$ и $\overline{CF}=\overline{DE}=h$. Тогаш

$$\overline{FB}=25-x-11=14-x\,.$$

Сега, од Питагоровата теорема применета на правоаголните триаголници AED и FBC добиваме

$$h^2 = 13^2 - x^2 \text{ и } h^2 = 15^2 - (14 - x)^2 .$$

Левите страни на последните две равенства се еднакви, па затоа се еднакви и нивните десни страни, односно



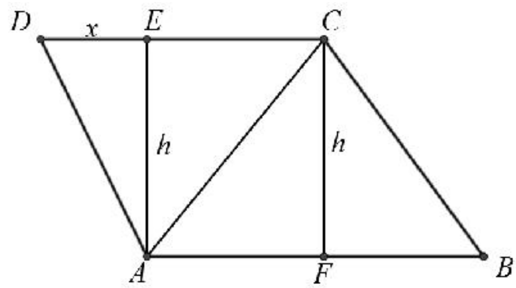
$15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2$,

од каде $x = 5\,cm$. Сега, со замена во равенството $h^2 = 13^2 - x^2$ наоѓаме $h = 12\,cm$. Значи, $\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF} = 5 + 11 = 16\,cm$ и затоа $\overline{AC} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20\,cm$. Понатаму, за страните на $\triangle ABC$ важи

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 20^2 + 15^2 = 625 = 25^2 = \overline{AB}^2 ,$$

па од обратната Питагорова теорема следува дека овој триаголник е правоаголен, т.е. $\measuredangle ACB = 90^\circ$.

Претходно го разгледавме случајот кога спротивните агли на черириаголникот се остар и тап агол. Да ја разгледаме и можноста спротивните агли на четириаголникот да се тапи. Ако ги земеме предвид зададените должини на



страните на четириаголникот, тоа е можно само ако се тапи аглите при темињата A и C. Во овој случај од темето A повлекуваме нормала AE на страната CD, а од темето C повлекуваме нормала CF на страната AB (види цртеж). Сега, четириаголникот $AFCE$ е правоаголник. При ознаките на цртежот имаме $\overline{DE} = x$, $\overline{EC} = 11 - x$ и $\overline{FB} = 25 - (11 - x) = 14 + x$. Со примена на Питагоровата теорема на правоаголните триаголници AED и FBC ги добиваме равенствата

$$h^2 = 13^2 - x^2 \text{ и } h^2 = 15^2 - (14 + x)^2 .$$

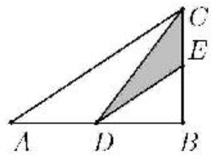
Левите страни на последните две равенства се еднакви, па мора да се еднакви и десните страни, односно

$$15^2 - (14 + x)^2 = 13^2 - x^2 ,$$

од каде добиваме $x = -5$. Но, должината на отсечка не може да е негативен број, па оттука следува дека овој случај не е можен.

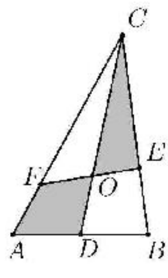
7. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

1. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со катети $\overline{AB}=8\,cm$ и $\overline{BC}=6\,cm$. Ако D и E се средините соодветно на AB и BC, определи ја плоштината на $\triangle CDE$.



Решение. Во триаголникот CDE едната страна е $\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ и висината повлечена кон неа е $\overline{DB}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4\,cm$. Според тоа, плоштината на $\triangle CDE$ е $P=\frac{\overline{CE}\cdot\overline{DB}}{2}=\frac{3\cdot 4}{2}=6\,cm^2$.

2. Даден е $\triangle ABC$. На страната AB е избрана точка D таква што $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, на страната BC е избрана точка E таква што $\overline{BE}=\frac{1}{3}\overline{BC}$ и на страната CA е избрана точка F таква што $\overline{AF}=\frac{1}{4}\overline{AC}$. Ако отсечките EF и CD се сечат во точката O и плоштината на четириаголникот $ADOF$ е еднаква на $50\,cm^2$, определи ја плоштината на триаголникот OCE.



Решение. Имаме $P_{ACD}=\frac{1}{2}P_{ABC}$ и

$$P_{CFE}=\frac{3}{4}P_{ACE}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}P_{ABC}=\frac{1}{2}P_{ABC},$$

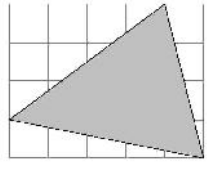
па затоа $P_{CFE}=P_{ACD}$. Според тоа,

$$P_{CFE}-P_{FCO}=P_{ACD}-P_{FCO},$$

$$P_{OEC}=P_{ADOF}=50\,cm^2,$$

што и требаше да се определи.

3. Должината на страната на едно мало квадратче на цртежот десно е еднаква на $2\,cm$. Определи ја плоштината на осенчениот триаголник.



Решение. Должините на страните на правоаголникот се еднакви на $5\cdot 2=10\,cm$ и $4\cdot 2=8\,cm$. Понатаму, неосенчените триаголници се правоаголни со катети $2\,cm$

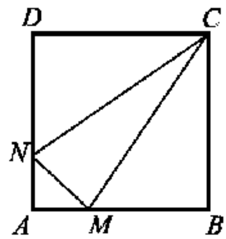
и $10\,cm$; $8\,cm$ и $2\,cm$; $8\,cm$ и $6\,cm$. Затоа плоштината на осенчениот триаголник е

$$P=10\cdot 8-\tfrac{2\cdot 10}{2}-\tfrac{8\cdot 2}{2}-\tfrac{8\cdot 6}{2}=80-10-8-24=38\,cm^2.$$

4. Даден е квадрат $ABCD$ со страна $3\,cm$. На страните AB и AD се земени соодветно точки M и N такви што $\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{AB}$ и $\overline{AN}=\frac{1}{3}\overline{AD}$. Определи ја плоштината на $\triangle NMC$.

Решение. Имаме

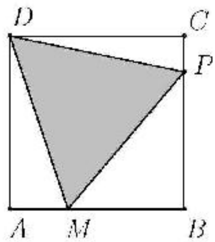
$$\overline{AM}=\overline{AN}=1\,cm \text{ и } \overline{BM}=\overline{BN}=2\,cm.$$



Сега

$$\begin{aligned}P_{NMC}&=P_{ABCD}-2P_{MBC}-P_{AMN}\\&=3\cdot 3-2\cdot\tfrac{2\cdot 3}{2}-\tfrac{1\cdot 1}{2}\\&=9-6-\tfrac{1}{2}=2{,}5\,cm^2.\end{aligned}$$

5. Квадратот $ABCD$ има страна $12\,cm$. Точката $M\in AB$ е таква што $\overline{AM}:\overline{MB}=1:2$. Точката P припаѓа на страната BC и е таква што плоштините на триаголниците AMD и DPC се однесуваат како $4:3$ (цртеж десно). Определи ја плоштината на триаголникот MPD.



Решение. Имаме, $\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{AB}=\frac{1}{3}\cdot 12=4\,cm$. Понатаму,

$$P_{AMD}=\tfrac{4\cdot 12}{2}=24\,cm^2 \text{ и } P_{DPC}=\tfrac{12\cdot\overline{CP}}{2}=6\cdot\overline{CP},$$

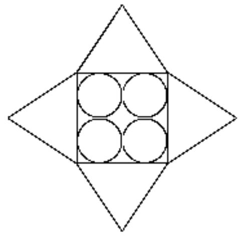
па бидејќи $P_{AMD}:P_{DPC}=4:3$, добиваме

$$24:(6\cdot\overline{CP})=4:3, \text{ т.е. } \overline{CP}=3\,cm.$$

Сега имаме $\overline{MB}=8\,cm$ и $\overline{BP}=9\,cm$, па затоа

$$\begin{aligned}P_{MPD}&=P_{ABCD}-(P_{AMD}+P_{MBP}+P_{PCD})\\&=12^2-(\tfrac{4\cdot 12}{2}+\tfrac{8\cdot 9}{2}+\tfrac{3\cdot 12}{2})\\&=144-(24+36+18)\\&=66\,cm^2.\end{aligned}$$

6. Ѕвездата на цртежот десно е составена од четири рамнострани триаголници и квадрат. Радиусот на секоја од четирите кружници е еднаков на $5\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на ѕвездата.

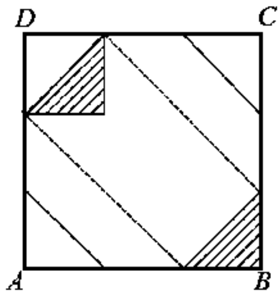


Решение. Должината на страната на квадратот е четири пати поголема од радиусот на секоја од впишаните во него кружници. Според тоа, должината на страната на квадратот, а со тоа и на рамностраните триаголници е $4 \cdot 5 = 20\,cm$. Значи, периметарот на ѕвездата е $L = 8 \cdot 20 = 160\,cm$. За плоштината на ѕвездата добиваме

$$P = 20^2 + 4 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} = 400(1+\sqrt{3})\,cm^2 .$$

7. Квадрат има плоштина $36\,cm^2$. Секоја од страните е поделена на три еднакви делови со должина $x\,cm$. Од темињата на квадратот се отсечени четири рамнокраки правоаголни триаголници со катети $x\,cm$. Определи ја плоштината на преостанатиот дел.

Решение. *Прв начин.* Нека должината на страната на квадратот е $a\,cm$. Во темињата A, B, C, D на квадратот се исечени рамнокраки правоаголни триаголници со катети $\frac{1}{3}a$. Ако триаголникот од темето B го пренесеме во положба на цртежот, при што основата на преместениот триаголник се совпадне со основата на триаголникот во темето D, добиваме квадрат со должина на страна $\frac{1}{3}a$.



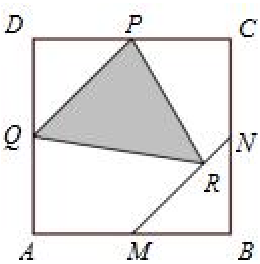
Понатаму, ако истото го направиме со триаголниците од темињата A и C добиваме нов квадрат со должина на страна $\frac{1}{3}a$. Значи плоштината на преостанатиот дел се добива ако од плоштината на квадратот со страна a ги одземеме плоштините на двата квадрати со должина на страна $\frac{1}{3}a$. Имаме, $a \cdot a = 36\,cm^2$, па затоа плоштината на преостанатиот дел е

$$a \cdot a - 2 \cdot \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{3}a = (1-\frac{2}{9})a \cdot a = \frac{7}{9} \cdot 36 = 28\,cm^2 .$$

Втор начин. Нека должината на страната на квадратот е $a\,cm$. Од

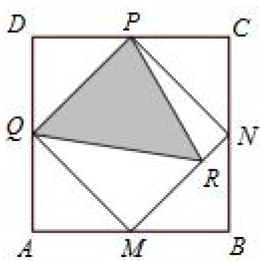
$a\cdot a=36=6\cdot 6$ следува дека $a=6\,cm$. Значи, должината на секој од делбените делови е $6:3=2\,cm$. Збирот на плоштинитеа на четирите рамнокраки правоаголни триаголници отсечени во темињата A, B, C, D е еднаков на $4\cdot\frac{2\cdot 2}{2}=8\,cm^2$. Според тоа, плоштината на преостанаиот дел е $36-8=28\,cm^2$.

8. Пресметај ја плоштината на триаголникот PQR прикажан на цртежот десно, ако должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на $12\,cm$, точките M, N, P и Q се средини на страните на квадратот, а точката R е произволна точка од отсечката MN.



Решение. Од признакот САС следува дека рамнокраките правоаголни триаголници AMQ, BNM, CPN, DPQ се складни. Сега, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{MN}=\overline{NP}=\overline{PQ}=\overline{QM}=6\sqrt{2}\ cm,$$



а како сите остри агли на овие триаголници се по 45°, добиваме дека аглите на четириаголникот $MNPQ$ се прави, т.е. тој е квадрат. Според тоа, триаголникот PQR има основа $\overline{PQ}=6\sqrt{2}\ cm$ и висина еднаква на $\overline{NP}=6\sqrt{2}\ cm$, па затоа неговата плоштина е еднаква на $\frac{6\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}{2}=36\,cm^2$.

9. Нека за страните на правоаголник $ABCD$, со периметар $60\,cm$, важи $\overline{AD}:\overline{AB}=5:7$.

а) Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

б) Определи ја плоштината на триаголникот AEF, каде точката E лежи на страната CD, а точката F ја дели страната AB во однос $\overline{AF}:\overline{FB}=2:5$.

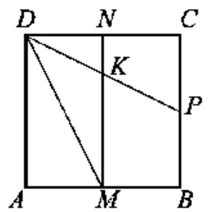
Решение. а) Имаме $\overline{AB}=\frac{7}{5}\overline{AD}$ и со замена во $2(\overline{AB}+\overline{AD})=60$, наоѓаме $2(\frac{7}{5}\overline{AD}+\overline{AD})=60$, т.е. $\overline{AD}=12{,}5\,cm$ и $\overline{AB}=\frac{7}{5}\cdot 12{,}5=17{,}5\,cm$. Плоштината на правоаголникот е $P=12{,}5\cdot 17{,}5=218{,}75\,cm^2$.

б) Од $\overline{AF}:\overline{FB}=2:5$ следува $\overline{AF}=\frac{2}{7}\overline{AB}=5\,cm$. Висината на $\triangle AEF$ повлечена кон страната AF е еднаква на $\overline{AD}=12,5\,cm$, па затоа плоштината на $\triangle AEF$ е $P=\frac{5\cdot 12,5}{2}=31,25\,cm^2$.

10. Даден е квадрат $ABCD$. Точките M,N и P се средини соодветно на страните AB,CD и BC. Нека K е пресечната точка на отсечките MN и DP. Докажи дека $P_{DMK}=P_{NKPC}$.

Решение. Ако земеме предвид дека

$$P_{DMN}=P_{DPC}=\frac{1}{4}P_{ABCD}$$



и од двете страни на равенството $P_{DMK}=P_{DPC}$ одземеме P_{DKN}, добиваме

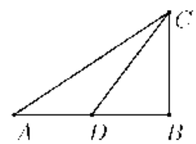
$$P_{DMN}-P_{DKN}=P_{DPC}-P_{DKN},$$

односно $P_{DMK}=P_{NKPC}$.

11. Во правоаголниот триаголник ABC со страни $\overline{AB}=8\,cm,\ \overline{BC}=6\,cm$ и $\overline{CA}=10\,cm$ е повлечена симетралата $CD,\ D\in AB$ на $\measuredangle ACB$. Определи ја плоштината на $\triangle ADC$.

Решение. Точката D припаѓа на симетралата на $\measuredangle ACB$, па затоа таа е еднакво оддалечена од краците AC и BC. Да го означиме тоа растојание со $h=\overline{DB}$. Имаме

$$P_{ADC}=\frac{10h}{2}=5h \text{ и } P_{DBC}=\frac{6h}{2}=3h,$$

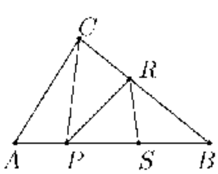


па затоа

$$\frac{6\cdot 8}{2}=P_{ABC}=P_{ADC}+P_{DBC}=5h+3h,$$

од каде добиваме $8h=24$, т.е. $h=3\,cm$. Конечно, $P_{ADC}=15\,cm^2$.

12. На цртежот десно отсечките CP,PR и RS го делат триаголникот ABC на четири триаголници со еднакви плоштини. Ако $\overline{AB}=24\,cm$, да се определи должината на отсечката PS.

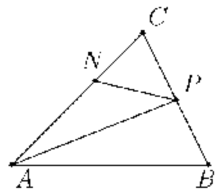


Решение. Триаголниците BSR и PSR имаат еднакви плоштини и заедничка висина повлечена од темето R. Затоа важи $\overline{PS}=\overline{BS}$.

Плоштината на триаголникот PBC е три пати поголема од плоштината на триаголникот APC, а двата триаголници имаат заедничка висина повлечена од темето C. Според тоа, $\overline{PB}=3\overline{AP}$. Сега, $\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{PB}=4\overline{AP}$, па затоа $\overline{AP}=24:4=6\ cm$. Значи, $\overline{PB}=18\ cm$, па затоа $\overline{PS}=9\ cm$.

13. Плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на $12\ cm^2$. Точката P е средина на страната BC, а точката N припаѓа на страната AC и е таква што $\overline{AN}=2\overline{NC}$. Определи ја плоштината на $\triangle PNC$.

Решение. Бидејќи P е средина на страната BC, за плоштината на $\triangle APC$ добиваме



$$P_{APC}=\frac{1}{2}P_{ABC}=6\ cm^2.$$

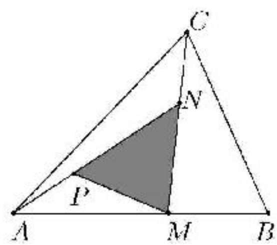
Понатаму, бидејќи $\overline{AN}=2\overline{NC}$, важи

$$P_{APN}=2P_{NPC},$$

што значи $P_{NPC}=\frac{1}{3}P_{APC}=\frac{1}{3}\cdot 6=2\ cm^2$.

14. Во триаголникот ABC точките M,N и P се соодветно на отсечките AB, MC и NA, при што важи $\overline{AM}=2\overline{BM}$, $\overline{MN}=2\overline{CN}$ и $\overline{NP}=2\overline{AP}$. Определи ја плоштината на триаголникот MNP ако плоштината на триаголникот BMC е $108\ cm^2$.

Решение. Од условот на задачата следува дека



$$P_{ACM}=\frac{2}{3}P_{ABC},$$

$$P_{MNA}=\frac{2}{3}P_{MCA}=\frac{4}{9}P_{ABC},$$

$$P_{MNP}=\frac{2}{3}P_{MNA}=\frac{8}{27}P_{ABC}.$$

Сега, бидејќи $P_{ABC}=3P_{BCM}=324\ cm^2$, добиваме $P_{MNP}=\frac{8}{27}P_{ABC}=\frac{8}{27}\cdot 324=96\ cm^2$.

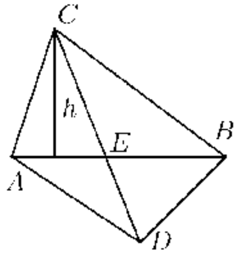
15. На страната AB на триаголникот ABC е земена точка E.

а) Докажи дека $P_{AEC}:P_{BEC}=\overline{AE}:\overline{BE}$.

б) На правата CE е избрана точка D, при што E е меѓу C и D.

Плоштините на триаголниците AEC, BEC и ABD се соодветно 12, 18 и $20\ cm^2$. Определи ја плоштината на $\triangle DBC$.

Решение. а) Ја повлекуваме висината CH во триаголникот ABC. Таа е висина и на триаголниците AEC и BEC. Односот на плоштините е



$$P_{AEC} : P_{BEC} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AE}\cdot\overline{CH}}{\frac{1}{2}\overline{BE}\cdot\overline{CH}} = \overline{AE} : \overline{BE}.$$

б) Од а) имаме

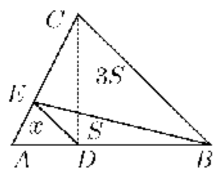
$P_{AEC} : P_{BEC} = \overline{AE} : \overline{BE} = P_{ADE} : P_{BDE}$, т.е. $P_{ADE} : P_{BDE} = 12:18 = 2:3$.

Сега, $P_{ABD} = P_{ADE} + P_{BDE} = 20\ cm^2$, па затоа $P_{BDE} = \frac{3}{5}\cdot 20 = 12\ cm^2$.

Оттука следува $P_{DBC} = 12 + 18 = 30\ cm^2$.

16. На страните AB и AC на триаголникот ABC соодветно се означени точки D и E така што $DE \parallel BC$ и $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{BC}$. Ако $\overline{AB} = 6\ cm$, определи ја AD.

Решение. Плоштината на $\triangle ADE$ да ја означиме со x. Бидејќи $DE \parallel BC$ плоштините на триаголниците DBE и DCE се еднакви, да ги означиме со S. Бидејќи $\overline{BC} = 3\overline{DE}$, секој од триаголниците DBC и ECB има плоштина $3S$. Затоа



$$\frac{P_{ADE}}{P_{DBE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{P_{ADC}}{P_{DBC}}, \text{ т.е. } \frac{x}{S} = \frac{x+S}{3S},$$

од каде следува $S = 2x$. Значи,

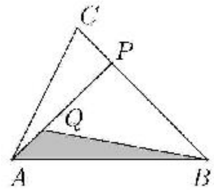
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{x}{S} = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } \overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB} = 2\ cm.$$

17. Даден е $\triangle ABC$ со плоштина $1\,cm^2$. На страната BC на $\triangle ABC$ е избрана точка P, а потоа на отсечката AP е избрана точка Q. Ако $\frac{\overline{CP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = \frac{1}{3}$, определи ја плоштината на $\triangle ABQ$.

Решение. Триаголниците ABQ и ABP имаат заедничка висина повлечена од темето B и бидејќи $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{1}{4}$, добиваме $\frac{P_{ABQ}}{P_{ABP}} = \frac{1}{4}$.

Понатаму, триаголниците ABP и ABC имаат заедничка висина повлечена од темето A и бидејќи $\frac{\overline{BP}}{\overline{CB}}=\frac{3}{4}$, добиваме $\frac{P_{ABP}}{P_{ABC}}=\frac{3}{4}$. Според тоа,

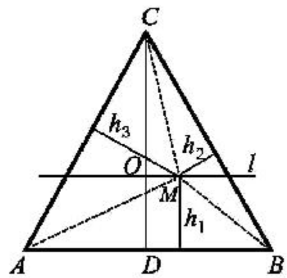
$$P_{ABQ}=\frac{1}{4}P_{ABP}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}P_{ABC}=\frac{3}{16}\,cm^2 .$$



18. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Низ центарот O на триаголникот е повлечена права l, паралелна на AB. Ако h_1, h_2, h_3 се растојанијата од произволна точка M на правата l соодветно до страните AB, BC, CA, докажи дека $h_1=\frac{h_2+h_3}{2}$.

Решение. Точката O припаѓа на висината CD. Да означиме $\overline{CD}=H$ и $\overline{AB}=a$. Тогаш $\overline{OD}=\frac{H}{3}=h_1$. Ако точката M ја поврземе со темињата на триаголникот. Тогаш

$$P_{ABM}+P_{BCM}+P_{CAM}=P_{ABC},$$
$$\frac{ah_1}{2}+\frac{ah_2}{2}+\frac{ah_3}{2}=\frac{aH}{2},$$
$$h_1+h_2+h_3=H,$$
$$h_2+h_3=H-h_1,$$
$$h_2+h_3=3h_1-h_1,$$
$$h_1=\frac{h_2+h_3}{2},$$

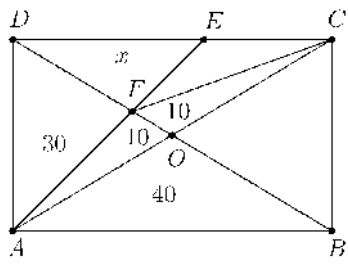


што и требаше да се докаже.

19. На страната CD на правоаголникот $ABCD$ е избрана точка E. Отсечката AE ја сече дијагоналата BD во точката F. Ако плоштината на триаголникот ABF е $50\,cm^2$, а плоштината на триаголникот ADF е $30\,cm^2$, определи ја плоштината на триаголникот DEF.

Решение. Ја повлекуваме дијагоналата AC и со O да го означиме пресекот на дијагоналите на правоаголникот. Бидејќи AO е тежишна линија на $\triangle ABD$, важи

$$P_{ADO}=\frac{1}{2}P_{ABD}=40\,cm^2 .$$



Оттука добиваме

$$P_{AFO}=40-30=10\ cm^2$$

и како FO е тежишна линија на $\triangle ACF$, добиваме

$$P_{FOC}=P_{AFO}=10\ cm^2.$$

Сега, ако ставиме $P_{DEF}=x$, добиваме $P_{EFC}=30-x$. Од пропорцијата

$$\frac{P_{DEF}}{P_{EFC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{EC}}=\frac{P_{DAF}}{P_{AFC}},$$

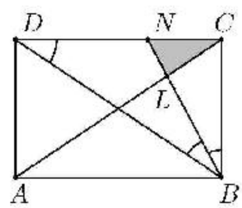
добиваме $\frac{x}{30-x}=\frac{30}{20}$, од каде наоѓаме $x=18\ cm^2$, т.е. плоштината на триаголникот DEF е $18\ cm^2$.

20. Две висини на триаголник се поголеми или еднакви на страните кон кои се повлечени. Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Нека $\triangle ABC$ е дадениот триаголник со страни $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$ и $\overline{CA}=b$, а h_a и h_b се висините кои се поголеми или еднакви на страните кон кои се повлечени. Без ограничување на општоста можеме да земеме $h_a \le h_b$. Според условот $a \le h_a$ и како $h_b \le a$, добиваме $a \le h_a \le h_b \le a$, од што следува дека $a=h_a=h_b$, па од $\frac{ah_a}{2}=P=\frac{bh_b}{2}$, добиваме $a=b$. Според тоа, $a=h_a=h_b=b$, т.е. $\triangle ABC$ е рамнокрак правоаголен.

21. Даден е правоаголник $ABCD$ со плоштина $1680\ cm^2$. Симетралата на $\measuredangle DBC$ ги сече дијагоналата AC во точка L и страната CD во точка N, при што важи $\overline{BN}=\overline{DN}$. Определи ја плоштината на $\triangle NLC$.

Решение. Од $\overline{BN}=\overline{DN}$ следува дека $\triangle DBN$ е рамнокрак и како BN е симетрала на $\measuredangle DBC$ добиваме $\measuredangle NDB=\measuredangle NBD=\measuredangle NBC=\sim$, од каде следува $\sim=30^\circ$. Значи, $\triangle NBC$ е половина од рамностран триаголник, па затоа важи $\overline{BN}=2\overline{NC}$, т.е. $\overline{DN}:\overline{NC}=2:1$.



Во правоаголниот $\triangle ABC$ имаме $\measuredangle BAC=30^\circ$, а за аглите на $\triangle BLC$ важи $\measuredangle LBC=30^\circ$ и $\measuredangle LCB=\measuredangle ACB=60^\circ$, па затоа тој е правоаголен. Двата триаголници се половини од соодветни рамнострани триаголни-

ци, т.е. $\overline{AC} = 2\overline{BC} = 4\overline{LC}$, од каде следува $\overline{AL} : \overline{LC} = 3:1$.
Конечно,

$$P_{NLC} = \frac{1}{4} P_{ACN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} P_{ADC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{1}{24} \cdot 1680 = 70\ cm^2 .$$

22. Даден е рамнокрак триаголник $ABC\ (\overline{AC} = \overline{BC} = 24\ cm)$. Висината повлечена во темето C е за 20% подолга од висината повлечена во темето A. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот.

Решение. Со h_c и h_a да ги означиме висините повлечени од темињата C и A, соодветно. Имаме, $h_c = 1,2h_a$, па од формулата за плоштина на триаголник следува $\frac{\overline{AB} \cdot h_c}{2} = \frac{\overline{BC} \cdot h_a}{2}$, односно $1,2\overline{AB} = \overline{BC}$, од каде добиваме $\overline{AB} = 20\ cm$. Конечно, периметарот на триаголникот е

$$L = 2 \cdot 24 + 20 = 68\ cm .$$

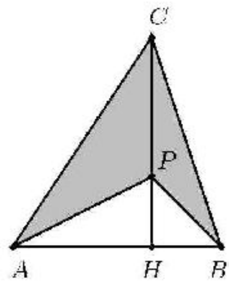
Од Питагоровата теорема следува

$$h_c = \sqrt{\overline{BC}^2 - (\frac{\overline{AB}}{2})^2} = \sqrt{24^2 - 10^2} = 2\sqrt{119}\ cm .$$

Конечно, плоштината на триаголникот е

$$P = \frac{\overline{AB} \cdot h_c}{2} = 20\sqrt{119}\ cm^2 .$$

23. Во триаголникот ABC страната AB и висината CH се со должина $6\ cm$. Точката P ја дели CH во однос $\overline{CP} : \overline{PH} = 2:1$. Определи ја плоштината на обоениот дел на цртежот десно.



Решение. Имаме

$$P_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\ cm^2 .$$

Од $\overline{CP} : \overline{PH} = 2:1$ следува

$$\overline{PH} = \frac{1}{3} \overline{CH} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2\ cm .$$

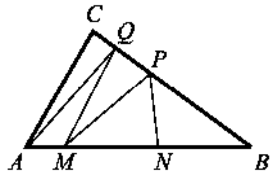
Според тоа,

$$P_{ABP} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{PH}}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6\ cm^2 ,$$

па затоа плоштината на обоениот дел на цртежот е $18 - 6 = 12\ cm^2$.

24. Даден е триаголник ABC со страни $\overline{AB}=24\,cm$ и $\overline{BC}=15\,cm$. На страната AB се земени точки M и N (M е меѓу A и N), а на страната BC точки P и Q (P е меѓу B и Q), така што плоштините на триаголниците ACQ, AMQ, MPQ, MNP, BNP се еднакви. Определи ги должините на отсечките AM, MN, NB, CQ, QP, PB.

Решение. Според условот

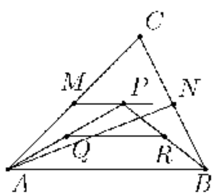


$P_{ACQ}=P_{AMQ}=P_{MPQ}=P_{MNP}=P_{BNP}=\frac{1}{5}P_{ABC}$

и затоа $\overline{CQ}=\frac{1}{5}\overline{BC}=3\,cm$. Но, $P_{AMQ}=\frac{1}{4}P_{ABQ}$ и затоа $\overline{AM}=\frac{1}{4}\overline{AB}=6\,cm$. Понатаму имаме $P_{MPQ}=\frac{1}{3}P_{MBQ}$ и затоа $\overline{PQ}=\frac{1}{3}\overline{BQ}=\frac{1}{3}\cdot 12=4\,cm$. Аналогно наоѓаме $\overline{BP}=8\,cm$, $\overline{MN}=9\,cm$ и $\overline{BN}=9\,cm$.

25. Во $\triangle ABC$ точките M, N, P, Q и R се соодветно средини на отсечките AC, BC, MN, AP и BP. Ако плоштината на $\triangle ABC$ е S, изрази ја плоштината на $\triangle QRP$ преку S.

Решение. Ако земеме предвид дека плоштината на триаголникот е еднаква на половина од производот на страната и соодветната висина, добиваме



$$P_{ANC}=\frac{1}{2}P_{ABC}=\frac{S}{2},\; P_{MNC}=\frac{1}{2}P_{ANC}=\frac{S}{4}.$$

Меѓутоа,

$$P_{ANM}=P_{ANC}-P_{MNC}=\frac{S}{2}-\frac{S}{4}=\frac{S}{4},$$

$$P_{APN}=P_{APM}=P_{BPN}=\frac{1}{2}P_{ANM}=\frac{S}{8}.$$

Затоа

$$P_{APN}+P_{BPN}=\frac{S}{4},$$

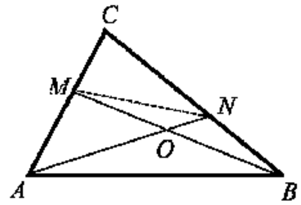
$$P_{ABP}=S-P_{MNC}-2P_{APM}=S-\frac{S}{4}-\frac{S}{4}=\frac{S}{2},$$

$$P_{ARP}=\frac{1}{2}P_{ABP}=\frac{S}{4}.$$

Според тоа, $P_{QRP}=\frac{1}{2}P_{ARP}=\frac{S}{8}$.

26. Во триаголникот ABC на страната AC е земена точка M, а на страната BC е земена точка N. Отсечките BM и AN се сечат во точката

O. Определи ја плоштината на триаголникот MNC, ако плоштините на триаголниците AOM, AOB и BON се соодветно $75\,cm^2$, $45\,cm^2$ и $15\,cm^2$.



Решение. Имаме $\frac{P_{AOM}}{P_{BOA}} = \frac{\frac{1}{2}h_a\overline{MO}}{\frac{1}{2}h_a\overline{BO}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{BO}}$ и како $\frac{P_{AOM}}{P_{BOA}} = \frac{75}{45} = \frac{5}{3}$, добиваме $\frac{\overline{MO}}{\overline{BO}} = \frac{5}{3}$. Сега, од $\frac{P_{AOM}}{P_{BON}} = \frac{\frac{1}{2}h_a\overline{MO}}{\frac{1}{2}h_n\overline{BO}}$ следува дека $\frac{h_a}{h_n} = \frac{3}{1}$. Од $\frac{P_{NOM}}{P_{MOA}} = \frac{\frac{1}{2}h_n\overline{MO}}{\frac{1}{2}h_a\overline{MO}} = \frac{h_n}{h_a} = \frac{1}{3}$ следува $\frac{P_{NOM}}{75} = \frac{1}{3}$, па затоа $P_{NOM} = 25\,cm^2$.

Освен тоа, $\frac{P_{MNC}}{P_{BMN}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{BN}}$ и $\frac{P_{ANC}}{P_{ABN}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{BN}}$, па затоа $\frac{P_{MNC}}{P_{BMN}} = \frac{P_{ANC}}{P_{ABN}}$. Да означиме $P_{MNC} = x$ и да замениме во последното равенство. Добиваме:

$$\frac{x}{x+15} = \frac{75+25+x}{45+15},$$

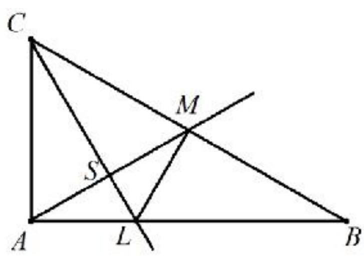
од каде наоѓаме $x = 200\,cm^2$ Според тоа, $P_{MNC} = 200\,cm^2$

27. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle CAB = 3\measuredangle ABC$. Нека L е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle ACB$ со страната AB и нека $P_{\triangle ALC} : P_{\triangle LBC} = 1:2$, каде $P_{\triangle ALC}$ и $P_{\triangle LBC}$ се соодветно плоштините на $\triangle ALC$ и $\triangle LBC$. Определи ги големините на аглите на $\triangle ABC$

Решение. За аглите на $\triangle ABC$ ќе ги користиме стандардните ознаки. Тогаш $\sim = \measuredangle CAB = 3\measuredangle ABC = 3$ Нека M е точка на BC таква што $\measuredangle BAM =$. Значи, $\triangle ABM$ е рамнокрак и важи $\overline{MA} = \overline{MB}$. Понатаму,

$$\measuredangle MAC = \measuredangle BAC - \measuredangle BAM = 2 \quad \text{и} \quad \measuredangle AMC = \measuredangle BAM + \measuredangle ABM = 2 \quad ,$$

што значи $\triangle AMC$ е рамнокрак и важи $\overline{AC} = \overline{MC}$.



Нека S е пресекот на AM и CL. Сега CS е симетрала на $\measuredangle ACB$ и $\triangle AMC$ е рамнокрак со врв C, па затоа CS е висина во овој триаголник, што значи дека CL е симетрала на страната AM во $\triangle AMC$, па затоа и во $\triangle AML$. Тоа значи дека $\triangle AML$ е рамнокрак, односно $\overline{AL} = \overline{ML}$.

Понатаму, $\overline{AC} = \overline{MC}$, $\overline{AL} = \overline{ML}$ и $\overline{CL} = \overline{CL}$, па затоа $\triangle ALC \cong \triangle MLC$, односно $P_{\triangle ALC} = P_{\triangle MLC}$. Од последното равенство и од условот на задачата следува

$$2P_{\triangle ALC} = P_{\triangle LBC} = P_{\triangle LBM} + P_{\triangle LMC} = P_{\triangle LBM} + P_{\triangle ALC},$$

т.е. $P_{\triangle ALC} = P_{\triangle LBM}$, па затоа $P_{\triangle LBM} = P_{\triangle MLC}$. Но, во триаголниците LBC и LMC висините повлечени од темето L се еднакви, па од последното равенство следува дека соодветните основи се еднакви, т.е. $\overline{MB} = \overline{MC}$. Значи, $\overline{AC} = \overline{MC} = \overline{MB} = \overline{MA}$, т.е. $\triangle AMC$ е рамностран. Според тоа, $\measuredangle ACB = \measuredangle ACM = \measuredangle MAC = 60^\circ$, па како $\measuredangle MAC = 2 \quad$, добиваме $\quad = 30^\circ$ и конечно $\sim = 3 \quad = 90^\circ$.

28. Определи ги сите правоаголни триаголници чии мерни броеви на страните се природни броеви и кај кои мерните броеви на плоштината и периметарот се еднакви.

Решение. Нека a и b се должините на катетите, а c е должината на хипотенузата на правоаголниот триаголник. Од условот на задачата последователно добиваме:

$$\frac{ab}{2} = a + b + \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$ab - 2a - 2b = 2\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 4a^2 + 4b^2 + 8ab = 4a^2 + 4b^2,$$

$$a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab = 0,$$

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0,$$

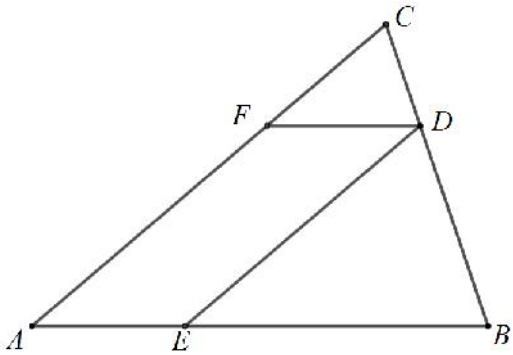
$$b(a-4) = 4a - 8,$$

$$b = 4 + \frac{8}{a-4}.$$

Со дискусија на деливоста на 8 со $a-4$ добиваме дека едно решение е $a = 12, b = 5$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 13$, а друго решение е $a = 8, b = 6$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

29. Плоштината на $\triangle ABC$ е 27. На страната BC е избрана точка D низ која е повлечена права паралелна со страната AB која страната AC ја сече во точката F и права паралелна со страната AC која страната AB ја сече во точката E. Разликата на плоштините на $\triangle EBD$ и

$\triangle FDC$ е 9. Пресметај ги плоштините на $\triangle EBD$ и $\triangle FDC$.



Решение. Бидејќи страните им се на паралелни прави, $\triangle ABC$, $\triangle EBD$ и $\triangle FDC$ се слични. Со P_1, P_2, P_3 да ги означиме плоштините на $\triangle EBD$, $\triangle FDC$, $\triangle ABC$, а должините на страните EB, FD, AB со a_1, a_2, a_3, соодветно. Заради сличностите на триаголниците постојат коефициенти k_1 и k_2 такви што $a_1 = k_1 a_3$ и $a_2 = k_2 a_3$. Бидејќи $a_1 + a_2 = a_3$, добиваме $k_1 a_3 + k_2 a_3 = a_3$, односно $k_1 + k_2 = 1$. Понатаму, заради сличноста важи $P_1 = k_1^2 P_3$ и $P_2 = k_2^2 P_3$. Бидејќи $P_3 = 27$ и разликата на плоштините на $\triangle EBD$ и $\triangle FDC$ е 9, добиваме дека $27k_1^2 - 27k_2^2 = 9$, од каде следува равенството

$$(k_1 - k_2)(k_1 + k_2) = \tfrac{1}{3}.$$

Но, $k_1 + k_2 = 1$, па со замена во претходното равенство добиваме $k_1 - k_2 = \frac{1}{3}$. Го решаваме системот равенки

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 1, \\ k_1 - k_2 = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

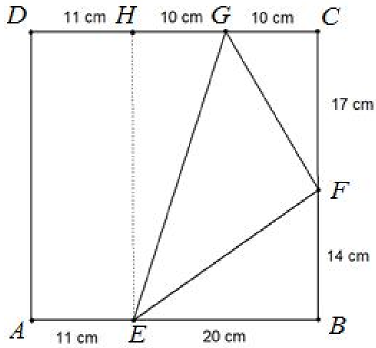
и добиваме $k_1 = \frac{2}{3}, k_2 = \frac{1}{3}$.

Значи, плоштината на $\triangle EBD$ е $P_1 = (\frac{2}{3})^2 \cdot 27 = 12$, а плоштината на $\triangle FDC$ е $P_2 = (\frac{1}{3})^2 \cdot 27 = 3$.

30. Нека $ABCD$ е квадрат со страна $31\,cm$. На страната AB е земена точка E таква што $\overline{AE} = 11\,cm$, на страната BC е земена точка F таква што $\overline{BF} = 14\,cm$, а на страната CD е земена точка G таква што $\overline{CG} = 10\,cm$. Определи ја плоштината на триаголникот EFG.

Решение. Нека H е точка на страната CD таква што $\overline{DH} = 11\,cm$. Тогаш

$$P_{EBCH} = P_{ABCD} - P_{AEHD}$$
$$= 31^2 - 31 \cdot 11$$
$$= 620\,cm^2.$$

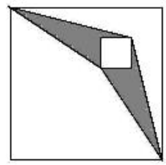


Понатаму,

$$P_{EFG} = P_{EBCH} - (P_{EGH} + P_{GFC} + P_{EBF})$$
$$= 620 - (\tfrac{10\cdot 31}{2} + \tfrac{10\cdot 17}{2} + \tfrac{20\cdot 14}{2})$$
$$= 620 - (155 + 85 + 140)$$
$$= 620 - 380$$
$$= 240\,cm^2,$$

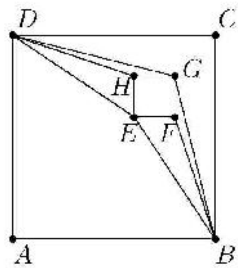
што и требаше да се определи.

31. Квадрат со страна 2 е поставен во квадрат со страна 7, при што соодветните страни на двата квадрати се паралелни. Определи ја плоштината на обоеиит дел на големиот квадрат.



Решение. Да ја поделиме обоената површина на големиот квадрат како што е прикажано на цртежот десно.

Тогаш триаголниците HGD и EFB имаат основи еднакви на 2, а збирот на нивните висини повлечени од темињата D и B се еднакви на $7-2=5$. Оттука следува дека



$$P_{HGD} + P_{FEB} = \tfrac{2\cdot 5}{2} = 5.$$

Аналогно се докажува дека

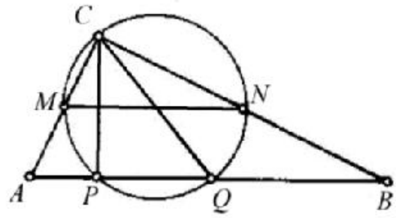
$$P_{EHD} + P_{GFB} = 5.$$

Според тоа, плоштината на обоениот дел е еднаква на 10.

32. Во правоаголен триаголник во кој катетите се однесуваат како $5:12$, кружницата со дијаметар MN каде M и N се средините на катетите, ја сече хипотенузата во точките P и Q. Определи го односот во кој точките P и Q ја делат хипотенузата.

Решение. Нека во триаголникот ABC важи $\overline{AC}:\overline{BC} = 5:12$, од каде $\overline{AC} = 5k$ и $\overline{BC} = 12k$, за некој $k > 0$ (цртеж долу десно) Тогаш

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}$$
$$=\sqrt{25k^2+144k^2}=13k.$$



Бидејќи MN е средна линија на триаголникот ABC, имаме
$$\overline{MN}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}=\tfrac{13}{2}k\ .$$

Кружницата со дијаметар MN минува низ темето C, затоа што аголот кај темето C е прав агол. Точката која е симетрична на точката C во однос на дијаметарот MN исто така е точка од кружницата со дијаметар MN. Нека е тоа точката P'. Од $CP'\perp MN$ и $MN\parallel AB$ следува дека $CP'\perp AB$. Бидејќи MN е средна линија на триаголникот ABC, заклучуваме дека точката P' припаѓа и на страната AB. Оттука следува дека $P'\equiv P$ и CP е висина на триаголникот ABC повлечена кон хипотенузата. За плоштината на триаголникот имаме $\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CP}}{2}$, од каде наоѓаме $\frac{5k\cdot 12k}{2}=\frac{13k\cdot\overline{CP}}{2}$, односно $\overline{CP}=\frac{60}{13}k$.

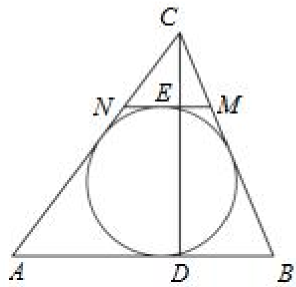
Тогаш, од правоаголниот триаголник APC имаме
$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{25k^2-\tfrac{3600}{169}k^2}=\tfrac{25}{13}k\ .$$

За втората пресечна точка Q од $\measuredangle QPC=90^\circ$, следува дека CQ е дијаметар на кружницата, па затоа $\overline{CQ}=\frac{13}{2}k$. Сега, од правоаголниот триаголник QPC имаме
$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CQ}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{\tfrac{169}{4}k^2-\tfrac{3600}{169}k^2}=\tfrac{119}{26}k\ .$$

Тогаш,
$$\overline{QB}=\overline{AB}-\overline{AP}-\overline{PQ}=13k-\tfrac{25}{13}k-\tfrac{119}{26}k=\tfrac{13}{2}k\ .$$

Конечно,
$$\overline{AP}:\overline{PQ}:\overline{QB}=\tfrac{25}{13}k:\tfrac{119}{26}k:\tfrac{13}{2}k=50:119:169\ .$$

33. Во триаголникот ABC е впишана кружница. Тангентата на оваа кружница паралелна со страната AB ги сече страните BC и AC соодветно во точките M и N. Определи ја должината на отсечката MN ако должините на страните на триаголникот ABC се: $\overline{AB}=14\,cm$, $\overline{BC}=13\,cm$, $\overline{CA}=15\,cm$.



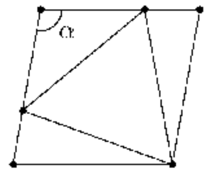
Решение. Полупериметарот на триаголникот ABC е $s=\frac{13+14+15}{2}=21\,cm$. Сега, од Хероновата формула за плоштината на триаголникот ABC добиваме

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=84\,cm^2.$$

Должината на висината CD на триаголникот ABC соодветна на страната AB е $\overline{CD}=\frac{2P}{\overline{AB}}=12\,cm$. Понатаму, ако со r го означиме радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC, тогаш $P=sr$, од каде добиваме $r=\frac{84}{21}=4\,cm$. Сега, должината на висината CE на триаголникот NMC е еднаква на $\overline{CE}=\overline{CD}-\overline{DE}=\overline{CD}-2r=4\,cm$. Конечно, од сличноста на триаголниците ABC и NMC следува $\overline{AB}:\overline{NM}=\overline{CD}:\overline{CE}$, од каде добиваме $\overline{NM}=\frac{14}{3}\,cm$.

8. ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Во ромб со страна a е вписан рамностран триаголник со страна a (цртеж десно). Определи го аголот $\sim$.



Решение. Ромбот е составен од рамностран триаголник, рамнокрак триаголник со агол $\sim$ и два рамнокраки триаголника. Овие два триаголника имаат агол при врвот $\frac{1}{2}(\sim -60^\circ)$ и агол при основата $180^\circ - \sim$. Според тоа,

$$\tfrac{1}{2}(\sim -60^\circ)+2(180^\circ - \sim)=180^\circ,$$

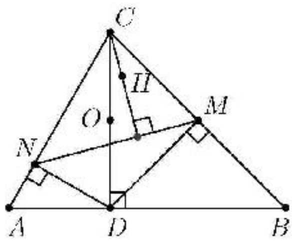
од каде добиваме $\sim =100^\circ$.

2. Од подножјето D на висината CD во триаголникот ABC се повлечени нормали кон BC и AC, кои ги сечат соодветно во точките M и N. Нека $\measuredangle CAB=60^\circ, \measuredangle CBA=45^\circ$, а H е ортоцентарот на $\triangle MNC$. Ако O средината на CD, определи го $\measuredangle OCH$.

Решение. Наоѓаме

$$\measuredangle ACB=180^\circ-(45^\circ+60)^\circ=75^\circ,$$

$$\measuredangle OCN=90^\circ-60^\circ=30^\circ.$$



Отсечката CD се гледа под прав агол од точките M и N, што значи дека околу четириаголникот $MDCN$ може да се опише кружница. Оттука $\measuredangle NMC=\measuredangle NDC=90^\circ-30^\circ=60^\circ$. Според тоа, $\measuredangle HCM=90^\circ-60^\circ=30^\circ$ и затоа $\measuredangle OCH=75^\circ-2\cdot 30^\circ=15^\circ$.

3. Даден е $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB=¥$ и $\measuredangle ABC=$. Симетралата на $\measuredangle ACB$ по втор пат ја сече кружницата опишана околу $\triangle ABC$ во точката D. На лакот $\overset{\frown}{BC}$, кој не ја содржи точката D, земена е точка E таква што $\overline{BE}=\overline{AC}$. Определи ги аглите на четириаголникот $CDBE$.

Решение. Од условот на задачата и својствата на периферните и централните агли во кружница следува:

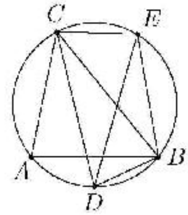
$\measuredangle BCD = \frac{¥}{2}$, $\measuredangle CEB = \measuredangle CBA = \quad$,

$\measuredangle CDB = \measuredangle CAB = 180^\circ - \quad - ¥$,

$\measuredangle CEB = \measuredangle CEA + \measuredangle AEB = \quad + ¥$,

$\measuredangle ECD = \measuredangle ECB + \measuredangle BCD = \quad + \frac{¥}{2}$,

$\measuredangle EBD = 180^\circ - \measuredangle ECD = 180^\circ - \quad - \frac{¥}{2}$.



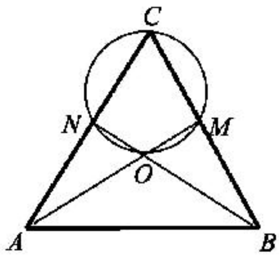
4. Во триаголникот ABC отсечките AM и BN се симетрали на агли $(M \in BC, N \in AC)$, а O е нивната пресечна точка. Точките C, N, O, M лежат на иста кружница. Определи го $\measuredangle ACB$.

Решение. Да означиме $\measuredangle ACB = ¥$. Четириаголникот $MCON$ е тетивен, па затоа

$$\measuredangle MON + \measuredangle NCM = 180^\circ .$$

Понатаму, $\measuredangle NOM = \measuredangle AOB = 90^\circ + \frac{¥}{2}$, па со замена во горното равенство, добиваме

$$90^\circ + \frac{¥}{2} + ¥ = 180^\circ, \text{ т.е. } ¥ = 60^\circ .$$

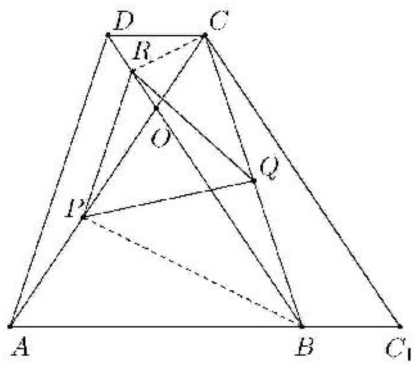


5. Даден е рамнокрак трапез $ABCD\,(AB \| CD)$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката O. Точките P, Q, R се средини соодветно на AO, BC, OD и $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC}$. Определи ги аглите на $\triangle PQR$.

Решение. Нека $CC_1 \| BD\ (C_1 \in AB)$. Од

$$\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} = \overline{BD} = \overline{CC_1}$$

следува дека $\triangle AC_1C$ е рамностран, а оттука следува дека $\triangle AOB$ и $\triangle CDO$ се рамнострани. Имаме, $\overline{PR} = \frac{1}{2}\overline{AD}$ (средна отсечка во $\triangle AOD$). Бидејќи BP и CR се соодветно висини во рамностраните триаголници $\triangle AOB$ и $\triangle CDO$, добиваме $\overline{RQ} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ (тежишна линија во правоаголниот $\triangle BCR$) и $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ (тежишна ли-



нија во правоаголниот $\triangle BPC$). Според тоа, $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RP}$ и аглите во $\triangle PQR$ се еднакви на 60°.

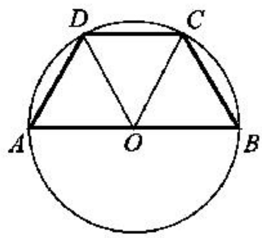
6. Основата на рамнокракиот трапез $ABCD\,(AB\,||\,CD)$ е дијаметар на опишаната кружница околу трапезот. Определи ги мерките на аглите на трапезот ако $\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$.

Решение. Имаме

$$\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OA}=\overline{OB}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}=\overline{CD},$$

од што следува дека $\triangle CDO$ е рамностран. Според тоа,

$$\measuredangle DOC=\measuredangle ODC=\measuredangle OCD=60^\circ.$$



Понатаму, триаголниците AOD и BOC се складни, па затоа

$$\measuredangle AOD=\measuredangle BOC=\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ.$$

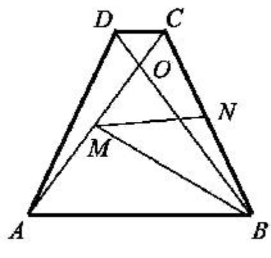
Значи, триаголниците AOD и BOC се рамнострани, па затоа

$$\measuredangle OAD=60^\circ \text{ и } \measuredangle ADC=\measuredangle ADO+\measuredangle ODC=120^\circ.$$

Конечно, аглите на трапезот се 60° и 120°.

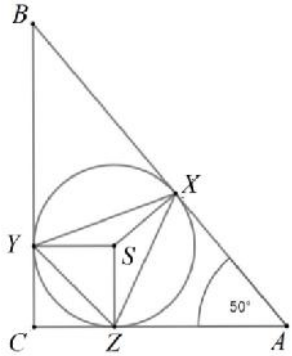
7. Дијагоналите во рамнокракиот трапез $ABCD\,(AB\,||\,CD)$ се сечат во точката O. Точките M и N се средините соодветно на отсечките OA и BC. Определи ја големината на $\measuredangle AOD$ ако $\overline{MN}=\overline{BN}$.

Решение. Од $\overline{MN}=\overline{BN}=\overline{CN}$ следува дека $\triangle BMC$ е правоаголен со прав агол во темето M. Од $\overline{AM}=\overline{MO}$ и $BM\perp AO$ следува, дека $\triangle ABO$ е рамнокрак, т.е. $\overline{AB}=\overline{BO}$. Бидејќи $ABCD$ е рамнокрак трапез, важи $\overline{AO}=\overline{BO}$. Значи, $\triangle ABO$ е рамностран и $\measuredangle AOB=60^\circ$. Конечно, $\measuredangle AOD=120^\circ$.



8. Едниот агол на правоаголен триаголник е еднаков на 50°. Нека X,Y и Z се точките во кои впишаната кружница во триаголникот ги допира неговите страни. Пресметај ги големиннте на аглите на $\triangle XYZ$.

Решение. *Прв начин*. Вториот остар агол во правоаголниот триаголник е еднаков на $90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.



Бидејќи $SX \perp AB$, $SY \perp BC$ и $SZ \perp CA$, а збирот на аглите во секој четириаголник е еднаков на 360°, добиваме дека во четириаголникот $ZAXS$ аголот при темето S е еднаков на 130°, во четириаголникот $XBYS$ аголот при темето S е еднаков на 140° и во четириаголникот $YCZS$ аголот при темето S е еднаков на 90°.

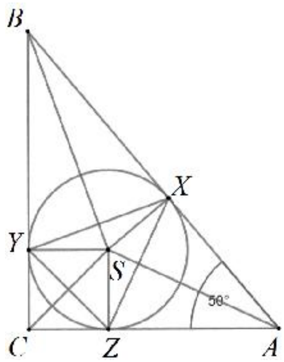
Понатаму, бидејќи $\overline{SX} = \overline{SY} = \overline{SZ}$ триаголниците ZXS, XYS и YZS се рамнокраки, па затоа аглите при основите:

- во триаголникот ZXS се еднакви на $(180^\circ - 130^\circ):2 = 25^\circ$,
- во триаголникот XYS се еднакви на $(180^\circ - 140^\circ):2 = 20^\circ$,
- во триаголникот YZS се еднакви на $(180^\circ - 90^\circ):2 = 45^\circ$.

Според тоа, аглите во триаголникот XYZ се еднакви на

$$20^\circ + 25^\circ = 45^\circ,\ 20^\circ + 45^\circ = 65^\circ \text{ и } 25^\circ + 45^\circ = 70^\circ.$$

Втор начин. Вториот остар агол во правоаголниот триаголник е еднаков на $90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. Понатаму, $\overline{CY} = \overline{CZ}, \overline{AZ} = \overline{AX}$ и $\overline{BX} = \overline{BY}$ (тангентни отсечки на кружница) па затоа триаголниците CZY, ZAX и XBY се рамнокраки. Оттука следува



$$\measuredangle CYZ = \measuredangle YZC = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ,$$

$$\measuredangle AZX = \measuredangle ZXA = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ,$$

$$\measuredangle BXY = \measuredangle XYB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$

Затоа бараните агли се

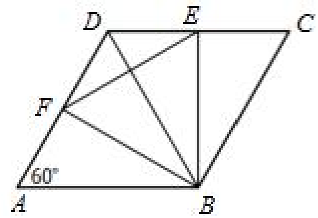
$$\measuredangle ZYX = 180^\circ - \measuredangle CYZ - \measuredangle XYB = 180^\circ - 45^\circ - 70^\circ = 65^\circ,$$

$$\measuredangle YXZ = 180^\circ - \measuredangle BXY - \measuredangle ZXA = 180^\circ - 70^\circ - 65^\circ = 45^\circ,$$

$$\measuredangle XZY = 180^\circ - \measuredangle AZX - \measuredangle YZC = 180^\circ - 65^\circ - 45^\circ = 70^\circ.$$

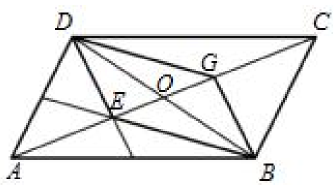
9. Даден е четириаголник со должини на страни $a, 2a, \frac{2a}{3}$ и $\frac{a}{2}$. Определи го најмалиот можен природен број a, за кој периметарот на овој четириаголник е природен број, кој е делив со 10.
Решение. Периметарот на дадениот четириаголик е еднаков на $a+2a+\frac{2a}{3}+\frac{a}{2}=\frac{25a}{6}$. Бројот $\frac{25a}{6}$ е природен број делив со 10, ако a е делив со 12. Јасно, 12 е најмалата можна вредност за a.

10. Ромб $ABCD$ има страна $6\,cm$ и агол од 60° кај темето A. Од темето B се конструирани висините на ромбот BE и BF. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот BEF.
Решение. Триаголниците ABD и CBD се рамнострани. Висините на ромбот BE и BF се висини на овие рамнострани триаголници, па затоа $\overline{BE}=\overline{BF}=3\sqrt{3}\,cm$. Бидејќи BE и BF се висини на рамнострани триаголници, важи $\measuredangle FBD=\measuredangle EBD=30^\circ$,



па затоа $\measuredangle FBE=60^\circ$. Триаголникот FBE е рамностран со агол при врвот 60°, па затоа тој е рамностран. Затоа $L=3\cdot 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}\,cm$ и $P=\frac{\overline{BE}^2\sqrt{3}}{4}=\frac{27\sqrt{3}}{4}\,cm^2$.

11. Дијагоналите AC и BD на паралелограмот $ABCD$ се сечат во точката O. Точката E е тежиште на триаголникот ABD. На отсечката OC е дадена точка G таква што $\overline{OG}:\overline{GC}=1:2$. Докажи дека четириаголникот $EBGD$ е паралелограм.
Решение. Точката O е средина на дијагоналата BD, која е и страна на триаголникот ABD, па затоа AO е тежишна линија на триаголникот ABD. Точката E е тежиште на триаголникот ABD, па

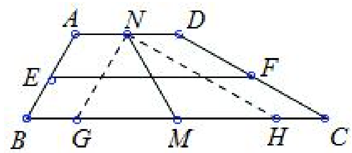


затоа $\overline{EO}=\frac{1}{3}\overline{AO}$. Од $\overline{OG}:\overline{GC}=1:2$ следува дека $\overline{OG}=\frac{1}{3}\overline{OC}$. Но, $\overline{AO}=\overline{OC}$, па затоа $\overline{OG}=\frac{1}{3}\overline{OC}=\frac{1}{3}\overline{AO}=\overline{EO}$.

Значи, пресечната точка O на дијагоналите EG и BD на четириаголникот $EBGD$ ги преполовува дијагоналите, што значи дека четириаголникот $EBGD$ е паралелограм.

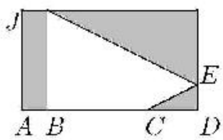
12. Во трапезот $ABCD$ важи $AD \parallel BC$, $\measuredangle ABC = 60^\circ$, $\measuredangle BCD = 30^\circ$ и $\overline{BC} = 7$. Нека E, M, F, N се средини на страните AB, BC, CD, DA. Ако $\overline{MN} = 3$, пресметај ја должината на отсечката EF.

Решение. Јасно, EF е средна линија на трапезот, па затоа важи $\overline{EF} = \frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}$. Значи, треба да ја определиме должината на основата AD.

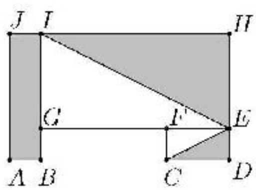


Низ точката N повлекуваме прави паралелни на AB и DC кои основата BC ја сечат во точките G и H соодветно. Според тоа, четириаголниците $ABGN$ и $CDNH$ имаат по два пара паралелни прави, што значи дека тие се паралелограми. Затоа $\overline{BG} = \overline{AN} = \overline{ND} = \overline{CH}$. Понатаму, бидејќи $\overline{BM} = \overline{MC}$ и $\overline{BG} = \overline{CH}$, добиваме $\overline{GM} = \overline{MH}$, што значи дека M е средина на отсечката GH. Од друга страна $\measuredangle NGH = \measuredangle ABC = 60^\circ$ и $\measuredangle NHG = \measuredangle BCD = 30^\circ$, како агли со паралелни краци, што значи дека триаголникот GHN е правоаголен со прав агол во темето N. Значи, NM е тежишна линија над хипотенузата во правоаголниот триаголник GHN, од што следува $\overline{NM} = \frac{1}{2}\overline{GH}$. Значи, $\overline{GH} = 2\overline{NM} = 2 \cdot 3 = 6$ и како $\overline{AD} = \overline{BG} + \overline{CH}$, добиваме $\overline{AD} = \overline{BC} - \overline{HG} = 6 - 6 = 1$. Конечно, $\overline{EF} = \frac{7+1}{2} = 4$.

13. Матео и Филип си делат правоаголна торта. Матео си пресекол едно правоаголно и две триаголни парчиња, како што е прикажано на цртежот десно, при што $\overline{AB} = \overline{DE}$ и $\overline{BC} = \overline{AJ}$. Филип го добил преостанатиот дел од тортата. Кој добил повеќе торта, Матео или Филип?

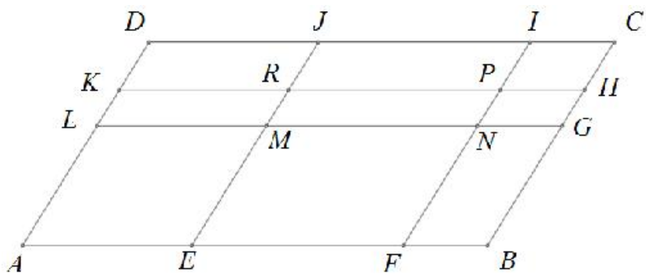


Решение. Доцртуваме отсечки и воведуваме ознаки како што е прикажано на цртежот десно. Притоа важи: $\triangle CDE \cong \triangle EFC$, $\triangle EHI \cong \triangle IGE$ и $\square BCFG \cong \square BIJA$, што значи дека Матео и Филип добиле еднакви пар-



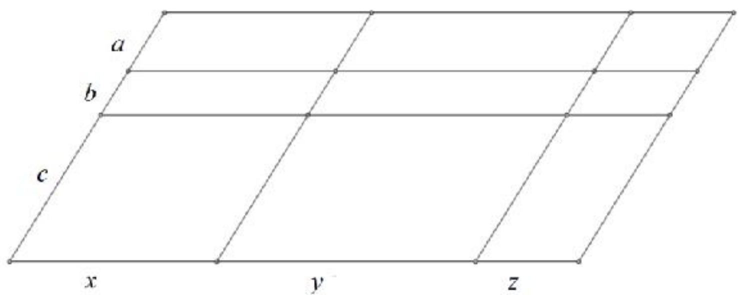
чиња торта.

14. Паралелограмот $ABCD$ со отсечките LG, KH, EJ и FI е поделен на паралелограми (види цртеж). Периметарот на паралелограмот $KRJD$ е еднаков на $32\,cm$, на паралелограмот $EFNM$ е $5\,dm$, а на паралелограмот $ABCD$ е $1\,m$. Пресметај го периметарот на паралелограмот $NGHP$.



Решение. Нека $\overline{KD}=a, \overline{LK}=b, \overline{AL}=c, \overline{AE}=x, \overline{EF}=y, \overline{FB}=z$. При дадените ознаки периметарот на паралелограмот $NGHP$ е еднаков на $L=2b+2z$. Да ги изразиме периметрите на паралелограмите $KRJD$, $EFNM$ и $ABCD$ во сантиметри. Имаме

$$2a+2x=32,$$
$$2c+2y=50,$$
$$2a+2b+2c+2x+2y+2z=100.$$



Третата равенка можеме да ја запишеме во видот

$$(2a+2x)+(2c+2y)+(2b+2z)=100,$$

па ако замениме од првите две равенки, последователно добиваме

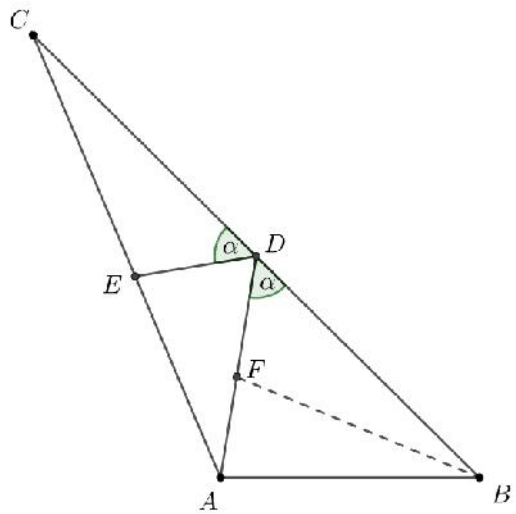
$$32+50+(2b+2z)=100,$$
$$2b+2z=18.$$

Според тоа, периметарот на паралелограмот $NGHP$ е $L=18\,cm$.

15. Точката D е средина на страната BC на $\triangle ABC$, а точката E припаѓа на страната AC и е таква што важи $\measuredangle ADB = \measuredangle CDE$. Кој има поголем периметар, четириаголникот $ABDE$ или триаголникот ADC?

Решение. За да бидат исполнети условите на задачата, мора да важи $\overline{AC} > \overline{AB}$. Периметарот на четириаголникот $ABDE$ е еднаков на $\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EA}$, а периметарот на триаголникот ADC е еднаков на $\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CA}$. Ќе докажеме дека

$$\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CA} > \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EA}.$$



Од условот на задачата следува $\overline{CA} = \overline{CE} + \overline{EA}$ и $\overline{BD} = \overline{DC}$, па затоа

$$\begin{aligned}&\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CA} - (\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EA}) = \\ &\quad = \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CE} + \overline{EA} - (\overline{AB} + \overline{DC} + \overline{DE} + \overline{EA}) \\ &\quad = \overline{AD} + \overline{CE} - (\overline{AB} + \overline{DE}).\end{aligned}$$

Нека F е точка на отсечката AD таква што $\overline{DF} = \overline{DE}$. Но, $\overline{BD} = \overline{DC}$ и $\measuredangle ADB = \measuredangle CDE$, па од признакот САС следува $\triangle ADB \cong \triangle CDE$. Значи, $\overline{BF} = \overline{CE}$. Според тоа,

$$\overline{AD} + \overline{CE} = \overline{AD} + \overline{BF} = \overline{AF} + \overline{FD} + \overline{BF} = \overline{AF} + \overline{DE} + \overline{BF},$$

па затоа

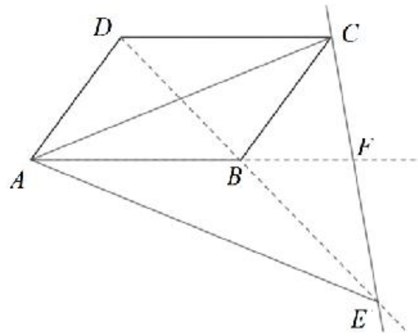
$$\overline{AD} + \overline{CE} - (\overline{AB} + \overline{DE}) = \overline{AF} + \overline{DE} + \overline{BF} - (\overline{AB} + \overline{DE}) = \overline{AF} + \overline{BF} - \overline{AB},$$

заради неравенството на триаголник во $\triangle ABF$.

Значи, поголем е периметарот на триаголникот ADC.

16. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека E е точка на полуправата DB таква што AB е симетрала на $\measuredangle CAE$ и нека $F = CE \cap AB$. Докажи дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1$.

Решение. Отсечките BF и DC се паралелни, па од Талесовата теорема за пропорционални отсечки следува $\frac{\overline{EC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BF}}$ и од $\overline{AB} = \overline{DC}$, добиваме дека



$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}. \qquad (1)$$

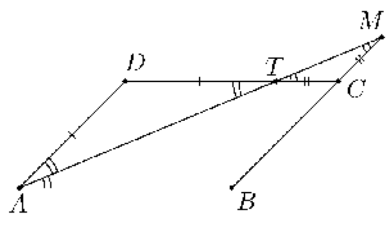
Полуправата AF е симетрала на $\measuredangle CAE$, па од својството на симетралата следува $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$, односно $1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1 + \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$. Од ова равенство следува $1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EF} + \overline{CF}}{\overline{EF}}$, односно $1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EF}}$, па ако се земе предвид равенството (1), добиваме

$$1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}, \text{ т.е. } \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1,$$

што и требаше да се докаже.

17. Даден е паралелограм $ABCD$. Симетралата на $\measuredangle DAB$ ги сече страната CD во точка T и продолжението на страната BC во точка M. Ако $\overline{DT} = 5\,cm$ и $\overline{CM} = 2\,cm$, определи го периметарот на $ABCD$.

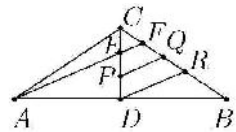
Решение. Нека $\measuredangle BAT = \measuredangle DAT = \sim$. Тогаш од $AB \parallel CD$ следува $\measuredangle BAT = \measuredangle ATD = \sim$. Значи, $\triangle ATD$ е рамнокрак, па затоа $\overline{AD} = \overline{DT} = 5\,cm$. Од $AD \parallel BC$ следува дека $\measuredangle DAT = \measuredangle BMA = \sim$ и бидејќи важи $\measuredangle CTM = \measuredangle ATD = \sim$ добиваме дека $\triangle TCM$ е рамнокрак, т.е. $\overline{TC} = \overline{CM} = 2\,cm$. Според тоа, $L_{ABCD} = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 24\,cm$.



18. Во рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) со $\measuredangle ACB = 120^\circ$ е повле-

чена висината $CD\,(D\in AB)$. На CD е земена точка E таква што $\overline{CE}:\overline{ED}=1:2$. Правата AE ја сече BC во точката F. Ако $CF=3\,cm$, определи ја должината на висината CD.

Решение. Нека P е средината на DE и да ги повлечеме отсечките PQ и DR паралелни на AF ($Q,R\in BC$). Отсечката EF е средна отсечка за $\triangle PQC$, па затоа $\overline{CF}=\overline{FQ}=3\,cm$. Отсечката PQ е средна отсечка за трапезот $DRFE$, па затоа $\overline{QR}=\overline{FQ}=3\,cm$.

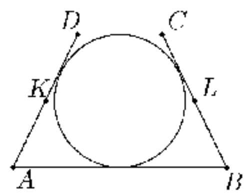


Триаголникот ABC е рамнокрак, па затоа $\overline{AD}=\overline{DB}$ и DR е средна отсечка во $\triangle ABF$, па затоа $\overline{BR}=\overline{RF}=6\,cm$. Според тоа, $\overline{BC}=15\,cm$. Конечно, $\measuredangle BCD=60^\circ$, што значи дека $\triangle BCD$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{15}{2}\,cm$.

19. Периметарот на тангентен рамнокракиот трапез $ABCD\,(AB\,||\,CD)$ е еднаков на p. Определи ја должината на средната линија (отсечка) на трапезот.

Решение. Нека K и L се средините на AD и BC, соодветно. Тогаш $\overline{KL}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}$. Од еднаквоста на тангентните отсечки следува дека $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$, па затоа

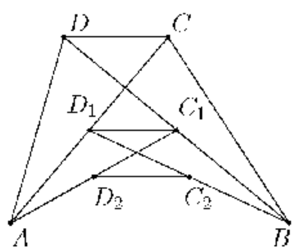
$$p=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=2(\overline{AB}+\overline{CD}),$$



од каде добиваме $\overline{AB}+\overline{CD}=\frac{p}{2}$. Според тоа, $\overline{KL}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}=\frac{p}{4}$.

20. Средната линија на трапезот $ABCD\,(AB\,||\,CD)$ е долга $12\,cm$. Точките C_1,D_1,C_2,D_2 се соодветно средини на отсечките BD,AC,BD_1,AC_1. Определи ја должината на отсечката C_2D_2.

Решение. Да означиме $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$. Точките C_1 и D_1 се средини на дијагоналите BD и AC на трапезот $ABCD$. Според тоа, $C_1D_1\,||\,AB$ и



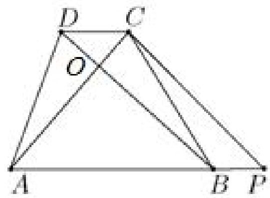
$$\overline{C_1D_1} = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}.$$

Аналогно добиваме дека $C_2D_2 \parallel AB$ и

$$\overline{C_2D_2} = \frac{a - \frac{a-b}{2}}{2} = \frac{a+b}{4} = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6\ cm.$$

21. Во трапезот $ABCD$ должината на средната линија е $16\ cm$ и е еднаква на дијагоналата AC. Дијагоналите на трапезот се заемно нормални и AC е поделена од пресечната точка на дијагоналите O во однос $3:1$. Определи ги основите на трапезот.

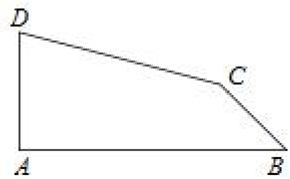
Решение. Низ темето C повлекуваме права паралелна на дијагоналата BD и нека нејзината пресечна точка со правата AB е точката P. За $\triangle APC$ важи



$$\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{DC} = 32\ cm$$

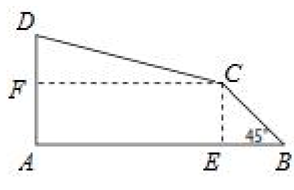
и како $\measuredangle ACP = 90^\circ$, а $\overline{AC} = 16\ cm$, заклучуваме дека $\triangle APC$ е половина од рамностран триаголник, односно $\measuredangle APC = 30^\circ$ и $\measuredangle BAC = 60^\circ$. Но, $\overline{AO} : \overline{OC} = 3:1$ и $\overline{AC} = 16\ cm$, па затоа $\overline{AO} = 12\ cm$ и $\overline{OC} = 4\ cm$. Сега, од $\triangle AOB$ наоѓаме $\overline{AB} = 2\overline{AO} = 24\ cm$ и од $\triangle DOC$ наоѓаме $\overline{DC} = 2\overline{OC} = 8\ cm$.

22. Во четириаголникот $ABCD$ (цртеж десно) важи $AD \perp AB$ и $\measuredangle ABC = 45^\circ$.



Ако $\overline{AB} = 15\ cm$, $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\ cm$ и $\overline{AD} = 8\ cm$, пресметај ја должината на страната CD.

Решение. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од темето C на страната AB (цртеж десно). Од $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\ cm$ и $\measuredangle ABC = 45^\circ$ следува $\overline{EB} = \overline{EC} = 3\ cm$. Според тоа, $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 12\ cm$. Сега, ако F е подножјето на нормалата од C на страната AD, добиваме $\overline{CF} = \overline{AE} = 12\ cm$. Значи,



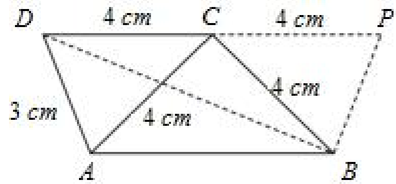
$$\overline{DF} = \overline{DA} - \overline{AF} = \overline{DA} - \overline{EC} = 5\ cm$$

и конечно од Питагоровата теорема следува

$$\overline{DC} = \sqrt{\overline{FC}^2 + \overline{FD}^2} = 13\,cm\,.$$

23. Во трапезот $ABCD$ дадени се краците $\overline{AD} = 3\,cm$ и $\overline{BC} = 4\,cm$, пократката основа е $\overline{DC} = 4\,cm$ и дијагоналата $\overline{AC} = 4\,cm$. Определи ја должината на дијагоналата BD.

Решение. Нека P е точка на правата DC таква што C е средина на отсечката DP. Тогаш $\overline{CP} = 4\,cm$, па затоа $\overline{CP} = \overline{CB}$ и $\overline{CD} = \overline{CB}$, па затоа триаголниците BCD и BCP се рамнокраки и $\measuredangle CBP = \measuredangle CPB$ и $\measuredangle CDB = \measuredangle CBD$, па затоа важи



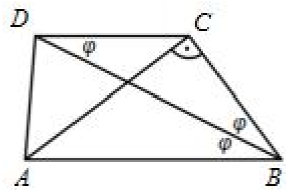
$$\measuredangle DBP = \measuredangle DBC + \measuredangle CBP = \frac{\measuredangle BCP}{2} + \frac{\measuredangle BCD}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ\,.$$

Понатаму, четриаголникот $ABPD$ е рамнокрак трапез (Докажи!), па затоа $\overline{PB} = \overline{AD} = 3\,cm$. Конечно, од Питагоровата теорема применета на триаголникот PDB следува

$$\overline{DB} = \sqrt{\overline{DP}^2 - \overline{PB}^2} = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}\,cm\,.$$

24. Даден е трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB} = 5\,cm$ и $\overline{CD} = 3\,cm$. Дијагоналата AC е нормална на кракот BC, а дијагоналата BD го преполовува аголот при долната основа. Определи ја висината на овој трапез.

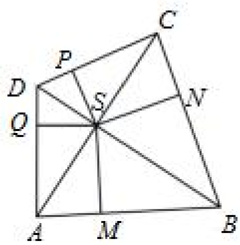
Решение. Имаме $\measuredangle ABD = \measuredangle BDC$ како агли со паралелни краци. Понатаму, според условот на здачата $\measuredangle ABD = \measuredangle DBC$, што значи дека триаголникот DBC е рамнокрак и затоа $\overline{CB} = \overline{CD} = 3\,cm$. Според условот на задачата триаголникот ABC е правоаголен со хипотенуза AB, па од Питагоровата теорема следува $\overline{AC} = 4\,cm$. Сега, висината на трапезот е еднаква на висината која соодветствува на хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC, па затоа $\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot H}{2}$, од каде добиваме $h = 2,4\,cm$.



25. Во четириаголникот $ABCD$ дијагоналите AC и BD се заемно нор-

мални и се сечат во точката S. Со M, N, P, Q да ги означиме подножјата на нормалите повлечени од точката S на страните AB, BC, CD, DA, редоследно. Докажи дека важи

$$\frac{1}{\overline{SM}^2}+\frac{1}{\overline{SP}^2}=\frac{1}{\overline{SN}^2}+\frac{1}{\overline{SQ}^2}.$$



Решение. За плоштината на правоаголниот триаголни со катети a и b, хипотенуза c и висина над хипотенузата h важи $P=\frac{ab}{2}=\frac{ch}{2}$, па затоа $ab=ch$. Сега од Питагоровата теорема и последното равенство следува

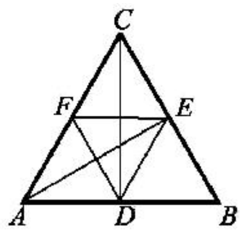
$$\frac{1}{h^2}=\frac{c^2}{h^2c^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Ако последното равенство го примениме на правоаголните триаголници SAB, ABC, SCD, SDA добиваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{\overline{SM}^2}+\frac{1}{\overline{SP}^2}&=(\frac{1}{\overline{SA}^2}+\frac{1}{\overline{SB}^2})+(\frac{1}{\overline{SC}^2}+\frac{1}{\overline{SD}^2})\\&=(\frac{1}{\overline{SC}^2}+\frac{1}{\overline{SB}^2})+(\frac{1}{\overline{SA}^2}+\frac{1}{\overline{SD}^2})\\&=\frac{1}{\overline{SN}^2}+\frac{1}{\overline{SQ}^2},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

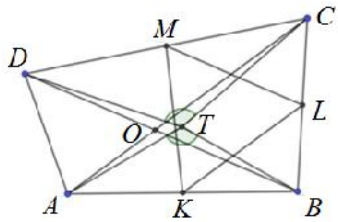
26. Во $\triangle ABC$ отсечките $AE\,(E\in BC)$ и $CD\,(D\in AB)$ се соодветно симетрали на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ACD$, а DE е средна отсечка во $\triangle ABC$. Докажи дека $\triangle ABC$ е рамностран.



Решение. Бидејќи DE е средна отсечка во $\triangle ABC$, важи $DE \parallel AC$ и $\overline{AC}=2\overline{DE}$. Нека F е средина на AC. Тогаш $\overline{AF}=\overline{DE}$ и бидејќи $AF \parallel DE$, четириаголникот $ADEF$ е паралелограм. Имаме $\measuredangle EAD=\measuredangle FAE=\measuredangle AED$, па затоа $\triangle EAD$ е рамнокрак и $\overline{AD}=\overline{DE}$. Понатаму, $\measuredangle FCD=\measuredangle DCE=\measuredangle CDF$, па затоа $\triangle CDF$ е рамнокрак и $\overline{AF}=\overline{FC}$ $=\overline{FD}$. Според тоа, $\overline{AF}=\overline{AD}=\overline{DF}$, па затоа $2\overline{AF}=2\overline{AD}=2\overline{DF}$, од каде добиваме $\overline{AC}=\overline{AB}=\overline{BC}$, т.е. $\triangle ABC$ е рамностран.

27. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$, чии дијагонали се сечат во

точката O и важи $\measuredangle AOD = 60^\circ$. Нека T е внатрешна точка на триаголникот BOC таква што $\overline{AT} = \overline{BT}, \overline{CT} = \overline{DT}$ и $\measuredangle ATB = \measuredangle CTD$. Ако K, L, M се редоследно средините на страните AB, BC, CD, докажи дека триаголникот KLM е рамностран.



Решение. Според условот на задачата отсечките KL и LM се соодветно средни линии на триаголниците ABC и BCD, па затоа важи $KL \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $\overline{KL} = \frac{\overline{AC}}{2}, \overline{LM} = \frac{\overline{BD}}{2}$. Понатаму $KL \parallel AC$ и $LM \parallel BD$, па затоа $\measuredangle KLM = \measuredangle AOD$ (агли со паралелни краци). Сега, од $\measuredangle ATB = \measuredangle CTD$ следува

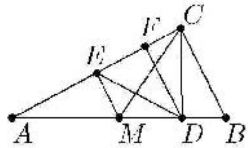
$$\measuredangle BTD = \measuredangle BTA + \measuredangle ATD = \measuredangle CTD + \measuredangle ATD = \measuredangle ATC .$$

Значи, $\overline{AT} = \overline{BT}, \overline{CT} = \overline{DT}$ и $\measuredangle BTD = \measuredangle ATC$, па од признакот САС следува дека триаголниците ATC и BTD се складни, од што следува $\overline{AC} = \overline{BD}$. Сега, $\overline{KL} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\overline{BD}}{2} = \overline{LM}$, т.е. триаголникот KLM е рамнокрак и важи

$$\measuredangle LKM = \measuredangle LMK = \frac{180^\circ - \measuredangle KLM}{2} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ ,$$

што значи дека триаголникот KLM е рамностран.

28. Даден е правоаголен $\triangle ABC, \measuredangle ACB = 90^\circ$, $\measuredangle CAB = 30^\circ$ и хипотенуза $\overline{AB} = 8\,cm$. Нека CD и CM ($D, M \in AB$) се соодветно висината и тежишната линија. Низ точката D е повлечена права m, нормална на тежишната линија CM, која катетата AC ја сече во точката E, и права p, паралелна на катетата BC, која ја сече AC во точката F. Определи ги должините на отсечките ME и DF.

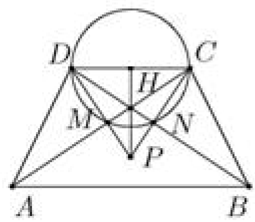


Решение. Триаголникот ABC е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2} = 4\,cm$. Понатаму, триаголникот BMC е рамностран, $\overline{BC} = \overline{MB} = \overline{MC} = 4\,cm$ и $\measuredangle BMC = \measuredangle BCM = 60^\circ$. Значи, $\measuredangle ACM = 30^\circ = \measuredangle MCD$. Според тоа, во $\triangle EDC$ правата CM е симетрала на $\measuredangle ECD$ и како $DE \perp CM$ заклучуваме дека овој триаголник е рамнокрак, т.е. $\overline{CD} = \overline{CE}$. Сега, $\measuredangle ECM = \measuredangle DCM$,

$\overline{CD} = \overline{CE}$ и CM е заедничка страна, па затоа $\triangle CME \cong \triangle CMD$, од каде следува дека $\measuredangle MEC = \measuredangle MDC = 90^\circ$. Според тоа, $ME \parallel BC$ и како M е средина на AB заклучуваме дека ME е средна отсечка за $\triangle ABC$, т.е. $\overline{ME} = \frac{\overline{BC}}{2} = 2\,cm$. Конечно, бидејќи D е средина на MB и $DF \parallel BC$ заклучуваме дека DF е средна отсечка за трапезот $MBCE$, па затоа $\overline{DF} = \frac{\overline{BC}+\overline{ME}}{2} = 3\,cm$.

29. Даден е трапез $ABCD\,(AB \parallel CD, \overline{AB} > \overline{CD})$. Кружницата чиј дијаметар е помалата основа на трапезот ги сече дијагоналите AC и BD соодветно во нивните средини M и N. Правите DM и CN се сечат во точката P, а дијагоналите AC и BD во точката H. Докажи, дека трапезот $ABCD$ е рамнокрак и правата HP е нормална на AB и CD.

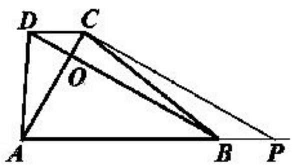
Решение. Од Талесовата теорема следува $\measuredangle DMC = 90^\circ$, па затоа $DM \perp AC$. Според условот на задачата $\overline{AM} = \overline{MC}$. Значи $\triangle ACD$ е рамнокрак и $\overline{AD} = \overline{DC}$. Аналогно се докажува дека $\overline{BC} = \overline{DC}$. Според тоа, $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BC}$, т.е. трапезот $ABCD$ е рамнокрак.



Од $DM \perp AC$ и $CN \perp BD$ следува дека точката H е ортоцентар на $\triangle CDP$. Според тоа, PH е третата висина во $\triangle CDP$, па затоа HP е нормална на AB и CD.

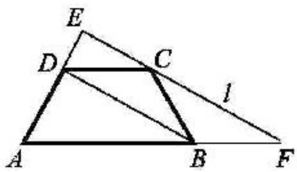
30. Во трапезот $ABCD\,(AB \parallel CD)$ средната отсечка е еднаква на $a\,cm$ и е еднаква на дијагоналата AC. Дијагоналите на трапезот се заемно нормални и AC со пресечната точка O е поделена во однос $3:1$. Определи ги основите на трапезот.

Решение. Низ темето C повлекуваме права паралелна со дијагоналата BD, која правата AB ја сече во точката P (цртеж десно). Во правоаголниот $\triangle APC$ имаме $\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{CD} = 2a = 2\overline{AC}$, што значи дека тој е половина од рамностран триаголник. Значи, $\measuredangle APC = 30^\circ$ и $\measuredangle BAC = 60^\circ$. Сега, од $\overline{AO}:\overline{OC} = 3:1$ и $\overline{AC} = a$ следува $\overline{AO} = \frac{3a}{4}$ и



$\overline{OC}=\frac{a}{4}$. Но, $DB \parallel CP$, па затоа $\triangle ABO$ е половина од рамностран триаголник, т.е. $\overline{AB}=2\overline{AO}=\frac{3a}{2}\,cm$ и $\triangle CDO$ е половина од рамностран триаголник, т.е. $\overline{CD}=2\overline{CO}=\frac{a}{2}\,cm$.

31. Во трапезот $ABCD$ важи $\measuredangle ABD=30^\circ$. Правата l која минува низ точката C и е паралелна на BD е нормална на AD, ја сече полуправата AD во точката E и притоа важи $\overline{AD}:\overline{DE}=m:n$. Определи ги должините на основите на трапезот ако должината на средната линија е k.

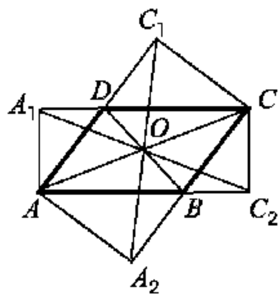


Решение. Нека F е пресечната точка на правите l и AB. Имаме

$$\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BF}=\overline{AB}+\overline{CD}=2k\,.$$

Понатаму, $\triangle AFE$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{AE}=k$. Од $\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}=\frac{m}{n}$ следува $\frac{\overline{AD}+\overline{DE}}{\overline{DE}}=\frac{m+n}{n}$, па затоа $\frac{\overline{AE}}{\overline{DE}}=\frac{m+n}{n}$, т.е. $\overline{DE}=\frac{kn}{m+n}$. Сега, $\overline{AD}=\frac{m}{n}\overline{DE}=\frac{mk}{m+n}$. Сега, $\triangle ABD$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{AB}=2\overline{AD}=\frac{2mk}{m+n}$, па како и $\triangle DCE$ е половина од рамностран триаголник, добиваме $\overline{CD}=2\overline{DE}=\frac{2nk}{m+n}$.

32. Докажи, дека подножјата на висините, повлечени од две спротивни темиња на паралелограм кон правите на кои лежат неговите страни, се темиња на правоаголник.



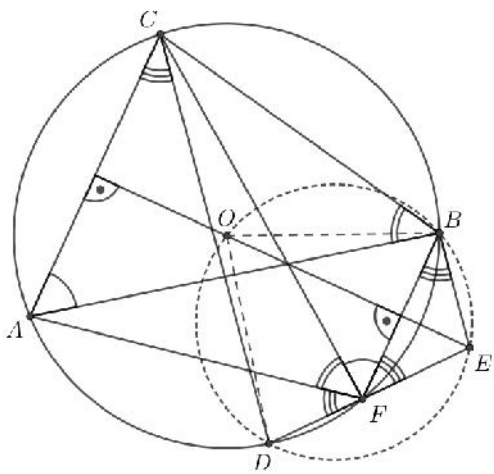
Решение. Нека $ABCD$ е дадениот паралелограм. Повлекуваме $AA_1 \perp CD\ (A_1 \in CD)$, $AA_2 \perp BC (A_2 \in BC)$, $CC_1 \perp AD\ (C_1 \in AD)$ и $CC_2 \perp AB\ (C_2 \in AB)$. Од условот на задачата следува дека AC_2CA_1 и AA_2CC_1 се правоаголници. Отсечките AC и A_1C_2 се еднакви како дијагонали на правоаголникот AA_2CC_1 и се преполовуваат во пресечната точка O (цртеж десно).
Аналогно, отсечките AC и A_2C_1 се еднакви како дијагонали на пра-

воаголникот AA_2CC_1 и се преполовуваат во точката O. Според тоа, A_1C_2 и A_2C_1 е еднакви и се преполовуваат во пресечната точка, па затоа четириаголникот $A_1A_2C_2C_1$ е правоаголник.

Аналогно се разгледува случајот кога висините се повлечени од темиња со тапи агли. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

33. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со центар на опишана кружница O и $\overline{BC} < \overline{AB}$. Симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката D. Симетралата на страната AC ја сече опишаната кружница на $\triangle BOD$ во точката E. Правата DE по втор пат ја сече опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката F. Докажи дека правите CF, OE и AB се сечат во една точка.

Решение. Нека $\measuredangle BAC = \sim$, $\measuredangle CBA =$ и $\measuredangle ACB = ¥$. Бидејќи DC е симетрала на $\measuredangle ACB$ и D е точка на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ имаме



$$\measuredangle AFD = \measuredangle ACD = \frac{¥}{2},$$

$$\measuredangle CFA = \measuredangle CBA = \quad ,$$

$$\measuredangle BFC = \measuredangle BAC = \sim,$$

од каде следува

$$\measuredangle EFB = \frac{¥}{2}. \qquad (1)$$

Од теоремата за централен и перифериски агол следува дека $\measuredangle DOB = .$ $2\measuredangle DCB = ¥$. Понатаму, четириаголникот $DEBO$ е тетивен, па затоа

$$\measuredangle BED = 180^\circ - \measuredangle DOB = 180^\circ - ¥. \qquad (2)$$

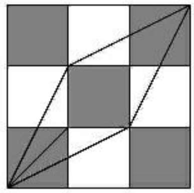
Сега, од (1) и (2) следува

$$\measuredangle FBE = \frac{¥}{2}. \qquad (3)$$

Понатаму, од (1) и (3) следува дека $\triangle FEB$ е рамнокрак. Бидејќи BF е тетива, следува $BF \perp OE$. Од ова и од $AC \perp OE$ следува $AC \parallel BF$, што значи дека четириаголникот $AFBC$ е трапез. Но, трапезот $AFBC$ е тетивен, па затоа тој е рамнокрак трапез. Сега, бидејќи AB и CF се дијагонали на рамнокрак трапез, а OE е симетрала на неговите основи, добиваме дека правите CF, OE и AB се сечат во една точка.

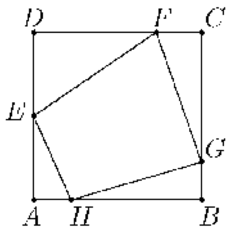
9. ПЛОШТИНА НА ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Квадрат кој е поделен на девет помали квадрати и е шаховски обоен како што е прикажано на цртежот десно. Потоа од квадратот е исечен ромб. Колкав дел од ромбот е обоен во сиво?



Решение. Две страни и дијагоналата на ромбот го делат квадратчето во долниот лев агол на четири триаголници со еднакви плоштини, кои имаат еднакви плоштини како и белите триаголници во ромбот (Зошто?). Според тоа, плоштината на ромбот е еднаква на плоштината на три квадратчиња, а плоштината на сивиот дел е еднаква на плоштината на две квадратчиња. Значи, плоштината на сивиот дел е еднаква на $\frac{2}{3}$ од плоштината на ромбот.

2. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна $120\,mm$. Точката E е средина на страната AD, точката F на страната DC е таква што $\overline{DF} = 2\overline{FC}$, точката G на страната CB е таква што $\overline{CG} = 3\overline{GB}$ и точката H на страната BA е таква што $\overline{BH} = 4\overline{HA}$. Определи ја плоштината на четириаголникот $EFGH$.



Решение. Бидејќи E е средина на AD имаме $\overline{AE} = \overline{ED} = 120:2 = 60\,mm$. Од равенството $\overline{DF} = 2\overline{FC}$ следува дека $\overline{FC} = 120:3 = 40\,mm$ и $\overline{DF} = 2\cdot 40 = 80\,mm$. Од $\overline{CG} = 3\overline{GB}$ наоѓаме $\overline{GB} = 120:4 = 30\,mm$ и $\overline{CG} = 3\cdot 30 = 90\,mm$. Од $\overline{BH} = 4\overline{HA}$ наоѓаме $\overline{HA} = 120:5 = 24\,mm$ и $\overline{BH} = 4\cdot 24 = 96\,mm$. Сега,

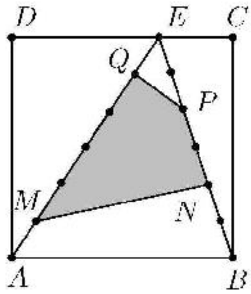
$$P_{AHE} = \frac{24\cdot 60}{2} = 720\,mm^2,\ P_{BGH} = \frac{96\cdot 30}{2} = 1440\,mm^2,$$

$$P_{CFG} = \frac{90\cdot 40}{2} = 1800\,mm^2 \text{ и } P_{DEF} = \frac{80\cdot 60}{2} = 2400\,mm^2.$$

Според тоа,

$$P_{EFGH} = P_{ABCD} - (P_{AHE} + P_{BGH} + P_{CFG} + P_{DEF})$$
$$= 14400 - (720 + 1440 + 1800 + 2400) = 8040\,mm^2.$$

3. Даден е квадрат $ABCD$ со страна 12 cm и точка E на страната CD. Отсечките AE и BE се поделени на по 6 еднакви делови, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.



Решение. Последователно добиваме

$$P_{ABE}=\frac{1}{2}P_{ABCD}=72\ cm^2,$$

$$P_{BME}=\frac{5}{6}P_{ABE}=60\ cm^2,$$

$$P_{MNE}=\frac{2}{3}P_{BME}=40\ cm^2,$$

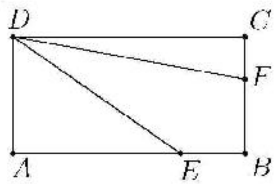
$$P_{APE}=\frac{1}{3}P_{ABE}=24\ cm^2,$$

$$P_{EPQ}=\frac{1}{6}P_{APE}=4\ cm^2,$$

$$P_{MNPQ}=P_{MNE}-P_{EPQ}=40-4=36\ cm^2.$$

4. На страните AB и BC на правоаголникот $ABCD$ се дадени соодветно точките E и F за кои важи $\overline{AB}=\frac{7}{3}\overline{EB}$ и $\overline{BC}=\frac{3}{2}\overline{BF}$. Ако $\overline{AB}=14\ cm$ и $\overline{BC}=9\ cm$, колкав дел од плоштината на правоаголникот $ABCD$ е плоштината на четириаголникот $EBFD$.

Решение. Од $\overline{AB}=\frac{7}{3}\overline{EB}$ и $\overline{AB}=14\ cm$ следува $\overline{EB}=\frac{3}{7}\overline{AB}=6\ cm$, а од $\overline{BC}=\frac{3}{2}\overline{BF}$ и $\overline{BC}=9\ cm$ следува $\overline{BF}=\frac{2}{3}\overline{BC}=6\ cm$. Сега, $\overline{AE}=14-6=8\ cm$ и $\overline{CF}=9-6=3\ cm$.

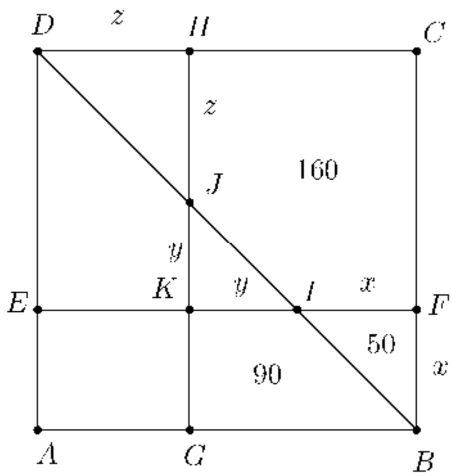


Конечно,

$$P_{EBFD}=P_{ABCD}-P_{AED}-P_{FCD}=14\cdot 9-\frac{8\cdot 9}{2}-\frac{3\cdot 14}{2}=126-36-21=69\ cm^2.$$

5. Квадратот $ABCD$ е поделен со дијагоналата BD и отсечките $EF\parallel AB$ и $GH\parallel AD$ на седум делови. Пресечните точки на BD со EF и GH да ги означиме соодветно со I и J, а $EF\cap GH=K$. Ако плоштините на $GBIK$, BFI и $IFCHJ$ се соодветно еднакви на 90, 50 и 160, определи ја плоштината на квадратот $ABCD$.

Решение. Јасно, триаголниците BFI, KIJ и JHD се правоаголни и рамнокраки. Затоа, ако означиме $\overline{BF} = \overline{FI} = x$, $\overline{KI} = \overline{KJ} = y$ и $\overline{JH} = \overline{HD} = z$, добиваме



$P_{BFI} = \frac{1}{2}x^2 = 50$, па е $x = 10$,

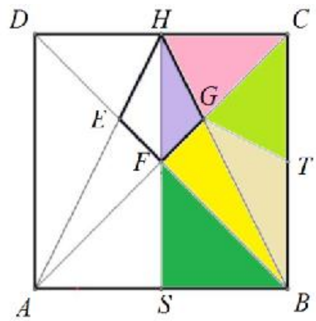
$P_{GBIK} = \frac{(x+2y)x}{2} = 90$, па е $y = 4$,

$P_{BCHJ} = \frac{(x+y+2z)(x+y)}{2} = 210$, па е $z = 8$.

Според тоа, страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на $x + y + z = 22$ и затоа неговата плоштина е $22^2 = 484$.

6. Нека H е средината на страната CD на квадратот $ABCD$ чија плоштина е $36\,cm^2$. Точката F е пресекот на дијагоналите AC и BD, точката E е пресекот отсечките AH и BD, а точката G е пресекот на отсечките AC и BH. Определи ја плоштината на четириаголникот $EFGH$.

Решение. *Прв начин*. Со T да ја означиме средината на BT и да ја повлечеме отсечката GT. Точките H и T се средини на страни на квадрат, па затоа важи $\overline{HC} = \overline{TC}$ и како $\overline{GC} = \overline{GC}$ и $\measuredangle HGC = \measuredangle TGC = 45^\circ$ (дијагоналата на квадратот лежи на симетралата на правиот агол), од признакот САС следува дека $\triangle HGC \cong \triangle TGC$. Значи, $P_{\triangle HGC} = P_{\triangle TGC}$. Поната-



му, за триаголниците BTG и CTG важи $\overline{BT} = \overline{CT}$ и како висината повлечени од темето G е заедничка за двата триаголници, важи $P_{\triangle BTG} = P_{\triangle CTG}$. Сега, $P_{\triangle HBC} = \frac{1}{4}P_{\triangle ABCD} = 9\,cm^2$, па како

$$P_{\triangle HGC} = P_{\triangle BTG} = P_{\triangle TGC} \text{ и } 9\,cm^2 = P_{\triangle HBC} = P_{\triangle BTG} + P_{\triangle TGC} + P_{\triangle HGC},$$

добиваме

$$P_{\triangle HGC} = P_{\triangle BTG} = P_{\triangle TGC} = 3\,cm^2 .$$

Но, $P_{\triangle HFC} = \frac{1}{8} P_{\triangle ABCD} = \frac{9}{2}\,cm^2$, па затоа

$$P_{\triangle HGF} = P_{\triangle HFC} - P_{\triangle HGC} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}\,cm^2 .$$

Конечно, правата HF е оска на симетрија на квадратот $ABCD$, што значи и на четириаголникот $EFGH$, па затоа

$$P_{EFGH} = 2P_{\triangle HFG} = 3\,cm^2 .$$

Забелешка. Постојат и многу други начини квадратот да се подели на мали триаголници. Нека S е средината на страната AB (цртеж горе). Имаме: $P_{\triangle BCF} = \frac{1}{4} P_{\triangle ABCD} = 9\,cm^2$, па затоа

$$P_{\triangle BGF} = P_{\triangle BCF} - P_{\triangle BTG} - P_{\triangle TCG} = 3\,cm^2 .$$

Сега,

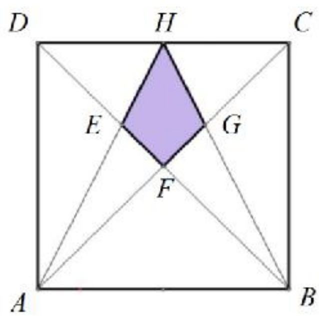
$$P_{\triangle SBH} = \frac{1}{4} P_{\triangle ABCD} = 9\,cm^2 \text{ и } P_{\triangle SBF} = \frac{1}{8} P_{\triangle ABCD} = \frac{9}{2}\,cm^2 ,$$

што значи

$$P_{\triangle HFG} = P_{\triangle SBH} - P_{\triangle BGF} - P_{\triangle SBF} = 9 - 3 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}\,cm^2$$

и како погоре добиваме

$$P_{EFGH} = 2P_{\triangle HFG} = 3\,cm^2 .$$



Втор начин. За триаголникот ACD точките F и H се средини на неговите страни AC и CD, соодветно, па затоа отсечките DF и AH се негови тежишни линии. Според тоа, точката E е тежиште на триаголникот ACD. Тежиштето ја дели тежишната линија AH во однос $2:1$. Нека $\overline{AE} = 2x$ и $\overline{EH} = x$. Ако h е должината на висината повлечена од темето D во триаголникот AHD, тогаш важи $P_{\triangle AED} = \frac{2xh}{2} = 2 \cdot \frac{xh}{2} = 2P_{\triangle EHD}$.

Сега, $P_{\triangle AHD} = \frac{1}{4} P_{ABCD} = 9\,cm^2$, па затоа

$$9\,cm^2 = P_{\triangle AHD} = P_{\triangle AED} + P_{\triangle EHD} = 3P_{\triangle EHD} ,$$

од каде добиваме $P_{\triangle EHD} = 3\,cm^2$. Правата HF е оска на симетрија на квадратот $ABCD$, па затоа триаголниците EHD и GHC се осносиметрични, што значи $P_{\triangle GHC} = P_{\triangle EHD} = 3\,cm^2$. Понатаму, бидејќи

$P_{\triangle CDF} = \frac{1}{4} P_{ABCD} = 9\,cm^2$, добиваме

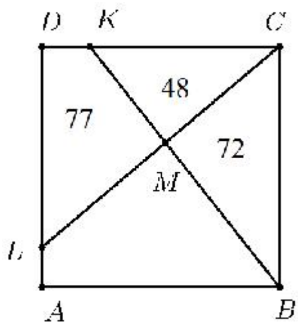
$$P_{EFGH} = P_{\triangle DFC} - P_{\triangle EHD} - P_{\triangle GHC} = 3\,cm^2.$$

7. На страните CD и DA на квадратот $ABCD$ соодветно се избрани точките K и L.

а) Докажи дека $P_{BCL} : P_{BCK} = P_{LCD} : P_{LCK}$.

б) Нека отсечките BK и CL се сечат во точката M. Ако плоштината на $\triangle CKM$ е 48, плоштината на $\triangle BCM$ е 72 и плоштината на четириаголникот $DLMK$ е е 77, определи ја плоштината на четириаголникот $ABML$.

Решение. а) Јасно, $P_{BCL} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{CD}}{2}$. Понатаму $P_{BCK} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{CK}}{2}$ и $P_{CDL} = \frac{\overline{LD} \cdot \overline{CD}}{2}$. Висината соодветна на страната KC во $\triangle LCK$ е LD и $P_{LCK} = \frac{\overline{CK} \cdot \overline{LD}}{2}$. Оттука следува дека



$$P_{BCL} : P_{BCK} = \overline{CD} : \overline{CK} = P_{LCD} : P_{LCK}.$$

б) Нека h е растојанието од точката L до BK. Тогаш $P_{KML} = \frac{h \cdot \overline{KM}}{2}$ и $P_{BML} = \frac{h \cdot \overline{BM}}{2}$, па затоа $P_{KML} : P_{BML} = \overline{KM} : \overline{BM}$. На ист начин се докажува дека $P_{KMC} : P_{BMC} = \overline{KM} : \overline{BM}$. Оттука следува дека

$$P_{KML} : P_{BML} = P_{KMC} : P_{BMC} = 48 : 72 = 2 : 3$$

и можеме да сметаме дека $P_{KML} = 2x, P_{BML} = 3x$. Од а) следува дека

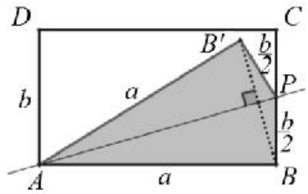
$$(72 + 3x) : (48 + 72) = (48 + 77) : (48 + 2x),$$
$$(72 + 3x)(48 + 2x) = 120 \cdot 125,$$
$$3(24 + x) \cdot 2(24 + x) = 6 \cdot 50^2,$$
$$(24 + x)^2 = 50^2,$$
$$24 + x = 50,$$
$$x = 26.$$

Според тоа, $P_{BCL} = 72 + 3x = 150$, а оттука $P_{ABCD} = 2 \cdot 150 = 300$ и $P_{ABML} = 300 - 197 = 103$.

8. Нека $ABCD$ е правоаголник чии должини на страни изразени во сан-

тиметри се природни броеви. Точката P е средина на страната BC, а точката B' е осносиметрична слика на точката B во однос на правата AP. Ако периметарот на четириаголникот $ABPB'$ е еднаков на $15\,cm$, определи ги најмалата и најголемата можна вредност на плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Ако означиме $\overline{AB} = a$ и $\overline{BC} = b$, тогаш со дадената осна симетрија отсечката AB се пресликува во отсечката AB' и отсечката BP се пресликува во отсечката $B'P$. Затоа периметарот на четириаголникот $ABPB'$ е



$$L = 2a + 2 \cdot \frac{b}{2} = 2a + b\,.$$

Значи, $2a + b = 15$. Бидејќи $b = 15 - 2a,\ a, b \in \mathbb{N}$, ги имаме следниве можности:

a	1	2	3	4	5	6	7
b	13	11	9	7	5	3	1
P_{ABCD}	$13\,cm^2$	$22\,cm^2$	$27\,cm^2$	$28\,cm^2$	$25\,cm^2$	$18\,cm^2$	$7\,cm^2$

Значи најголемата можна плоштина на правоаголникот $ABCD$ е $27\,cm^2$, а неговата најмала плоштина е $7\,cm^2$.

9. Во триаголник ABC со плоштина $980\,cm^2$ точките M и N се средини соодветно на отсечките AB и CM, а точките P и Q се внатрешни за отсечките AN и BN и ги делат во однос $1:6$, сметајќи од N. Определи ја плоштината на четириаголникот $PMQN$.

Решение. Бидејќи CM е тежишна линија за $\triangle ABC$, важи $P_{ACM} = \frac{1}{2} P_{ABC} = 490\,cm^2$. Аналогно наоѓаме дека $P_{AMN} = 245\,cm^2$. Триаголниците PMN и AMN имаат заедничка висина повлечена од темето M, а нивните страните PN и AN, соодветни на таа заедничка висина, се однесуваат како $1:7$. Според тоа,

$$P_{PMN} = \frac{1}{7} P_{AMN} = 35\,cm^2\,.$$

Аналогно се добива дека $P_{QMN} = 35\,cm^2$. Конечно,

$$P_{PMQN} = P_{PMN} + P_{QMN} = 70\,cm^2\,.$$

10. Даден е правоаголник $ABCD$, $\overline{AB} = 20\,cm$ и $\overline{BC} = 12\,cm$. На правата BC е избрана точка Z таква што $\overline{CZ} > 8\,cm$ и C е меѓу Z и B. Точката E е внатрешна за правоаголникот и се наоѓа на растојание $6\,cm$ од страната AB и од страната AD. Ако правата EZ ги сече AB и CD соодветно во точките X и Y, да се определи плоштината на четириаголникот $AXYD$.

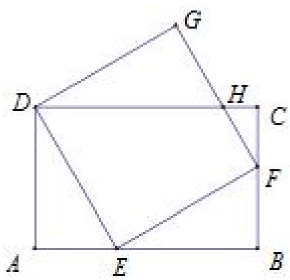
Решение. Бидејќи $\overline{CZ} > 8\,cm$ и C е меѓу Z и B, заклучуваме дека X е меѓу A и B. Точката E е на растојание $6\,cm$ од AB, а Y е на растојание $12\,cm$ од AB, па затоа $2P_{AXE} = P_{AXY}$. На ист начин докажуваме дека $2P_{DYE} = P_{DXY} = P_{DAY}$. Значи,

$$2(P_{AXE} + P_{DYE}) = P_{AXY} + P_{DAY} = P_{AXYD}.$$

Според тоа, $P_{AXYD} = 2P_{AED} = 72\,cm^2$.

11. Даден е правоаголник $ABCD$. Квадратот $DEFG$ е таков што точката D е темето на правоаголникот, E припаѓа на страната AB, F припаѓа на страната BC и $\measuredangle BEF = 30^\circ$. Ако плоштината на квадратот $DEFG$ е еднаква на $36\,cm^2$, пресметај ги плоштината и периметарот на пресекот на правоаголникот $ABCD$ и квадратот $DEFG$.

Решение. Јасно, $\overline{DE} = \overline{EF} = 6cm$. Понатаму, од $\measuredangle BEF = 30^\circ$ следува $\measuredangle BFE = 60^\circ$. Понатаму, $\measuredangle AED = 60^\circ$ и $\measuredangle ADE = 30^\circ$. Според тоа, $\triangle EFB$ е складен со $\triangle AED$ и овие два триаголници се половини од ист рамностран триаголник со страна $6\,cm$. Значи,



$$\overline{BE} = \overline{AD} = 3\sqrt{3}\,cm \text{ и } \overline{AE} = \overline{BF} = 3\,cm.$$

Но, $\overline{BC} = \overline{AD} = 3\sqrt{3}\,cm$, па затоа важи $\overline{FC} = \overline{BC} - \overline{BF} = (3\sqrt{3} - 3)\,cm$.

Понатаму, $\measuredangle CFH = 30^\circ$ и $\measuredangle CHF = 60^\circ$, што значи дека $\triangle FCH$ е половина од рамностран триаголник со висина FC, од каде следува дека

$$\overline{FH} = \frac{2\overline{FC}}{\sqrt{3}} = \frac{2(3\sqrt{3}-3)}{\sqrt{3}} = (6 - 2\sqrt{3})\,cm \text{ и } \overline{CH} = \frac{\overline{FH}}{2} = (3 - \sqrt{3})\,cm.$$

Но, $\overline{CD} = \overline{AB} = (3\sqrt{3} + 3)\,cm$, па затоа $\overline{DH} = \overline{CD} - \overline{CH} = 4\sqrt{3}\,cm$.

Пресекот на правоаголникот $ABCD$ и квадратот $DEFG$ е трапез со периметар

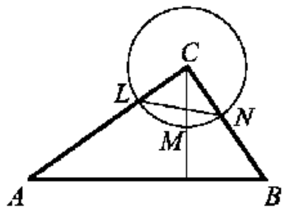
$$L=\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FH}+\overline{DH}=6+6+6-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=(18+2\sqrt{3})\ cm$$

и плоштина

$$P=\frac{\overline{DE}+\overline{FH}}{2}\cdot\overline{EF}=\frac{6+6-2\sqrt{3}}{2}\cdot 6=6(6-\sqrt{3})\ cm^2 .$$

12. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол при темето C и плоштина 6. За катетите AC и BC важи $\overline{AC}>\overline{BC}$ и $\overline{AB}=5$. Кружница со центар C ги сече висината повлечена кон хипотенузата AB во нејзината средина M, катетата AC во точката L и катетата BC во точката N. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABNL$.

Решение. Со h да ја означиме висината повлечена кон хипотенузата во дадениот $\triangle ABC$. За плоштината на $\triangle ABC$ имаме $P_{ABC}=6=\frac{h\cdot\overline{AB}}{2}=\frac{5h}{2}$, од каде добиваме $h=\frac{12}{5}$. Според тоа, $\overline{CL}=\overline{CM}=\overline{CN}=\frac{h}{2}=\frac{6}{5}$, па затоа



$$P_{ABNL}=P_{ABC}-P_{CNL}=6-\frac{1}{2}\cdot(\frac{6}{5})^2=\frac{132}{25} .$$

13. Триаголник има страна $48\,cm$ и висина повлечена кон неа $0{,}5\,dm$. Определи го периметарот на паралелограм со висини $0{,}12\ m$ и $0{,}8\ dm$, кој има плоштина $1{,}2$ пати поголема од плоштината на триаголникот.

Решение. Имаме $P_{\triangle}=\frac{48\cdot 5}{2}=120\,cm^2$, од каде што следува дека $P_{\square}=1{,}2\cdot 120=144\,cm^2$. Според тоа, должините на страните на паралелограмот се $a=144:12=12\ m$ и $b=144>8=18\ cm$. Конечно, за периметарот на паралелограмот добиваме $L_{\square}=2(12+18)=60\ cm$.

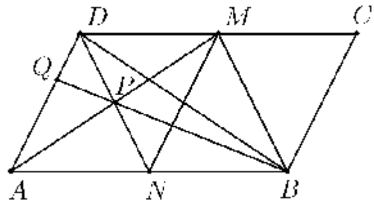
14. Даден е ромб со дијагонала $90\,cm$ и плоштина $5400\,cm^2$. Определи го радиусот на впишаната кружница во овој ромб.

Решение. Нека a е страната на ромбот,а дијагоналите се $d'=90\,cm$ и d''. Од $P=\frac{d'd''}{2}$ добиваме $d''=120\,cm$. Понатаму, $a^2=(\frac{d'}{2})^2+(\frac{d''}{2})^2$ и затоа $a=75\,cm$. Конечно, висината на ромбот е еднаква на $h=\frac{P}{a}$ $=72\ cm$, па затоа радиусот на впишаната кружница е $r=\frac{h}{2}=36\,cm$.

15. Точката M е средина на страната CD на паралелограмот $ABCD$, а точката P е средина на отсечката AM.

а) Правата DP ја сече страната AB во точката N. Докажи дека $\overline{DP} = \overline{PN}$.

б) Правата BP ја сече страната AD во точката Q. Определи го односот $\overline{AQ} : \overline{QD}$.

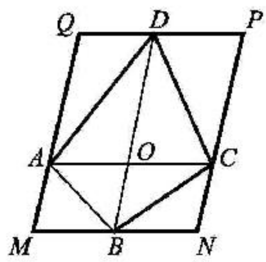


Решение. а) Бидејќи PD е тежишна линија на триаголникот AMD, добиваме дека триаголниците APD и DPM имаат еднакви плоштини. Понатаму, од $AN \parallel MD$ следува дека триаголниците AMD и NMD имаат еднакви плоштини, па затоа триаголниците APD и NPM имаат еднакви плоштини. Според тоа, триаголниците DPM и NPM имаат еднакви плоштини, па затоа $\overline{DP} = \overline{PN}$.

б) Од а) следува, дека триаголниците AND и DMN имаат еднакви плоштини. Според тоа, $\overline{AN} = \overline{DM}$, т.е. N е средина на AB. Затоа плоштината на триаголникот ABP е два пати поголема од плоштината на триаголникот NBP. Понатаму, бидејќи BP е тежишна линија на триаголникот NBD заклучуваме дека триаголниците NBP и DPB имаат еднакви плоштини. Сега, ако со h и h' ги означиме висините на триаголниците ADP и ADB, добиваме

$$\overline{AQ} : \overline{QD} = \frac{\overline{AQ}(h-h')}{2} : \frac{\overline{QD}(h-h')}{2} = P_{APB} : P_{QDB} = 2:1.$$

16. Плоштината на четириаголникот $ABCD$ е еднаква на S. Определи ја плоштината на паралелограмот чии страни се еднакви и паралелни на дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$.



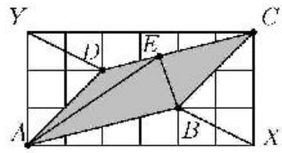
Решение. Нека O е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$. Нека $MNPQ$ е паралелограм, таков што

$$\overline{MN} = \overline{PQ} = \overline{AC},\ MN \parallel PQ \parallel AC \text{ и}$$

$$\overline{MQ} = \overline{NP} = \overline{BD},\ MQ \parallel NP \parallel BD.$$

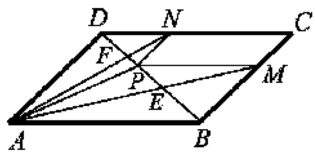
Бидејќи $AQDO$ е паралелограм точно е равенството $P_{AQD} = P_{ADO}$. Аналогно добиваме дека $P_{MBA} = P_{BOA}$, $P_{BNC} = P_{BOC}$ и $P_{CPD} = P_{CDO}$. Според тоа, $P_{MNPQ} = 2S$.

17. На страната CD на паралелограмот $ABCD$ на цртежот десно е избрана точката E. Ако квадратчињата на мрежата имаат должина на страна $1\,cm$, определи ја плоштината на $\triangle ABE$.



Решение. Плоштината на правоаголникот $AXCY$ е $6 \cdot 3 = 18\,cm^2$. Секој од триаголниците BCX и ADY има плоштина $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3\,cm^2$, а секој од правоаголните триаголници ABX и CDY има плоштина $\frac{6 \cdot 1}{2} = 3\,cm^2$. Плоштината на паралелограмот $ABCD$ е $18 - 4 \cdot 3 = 6\,cm^2$, па затоа $P_{ABE} = \frac{1}{2} P_{ABCD} = 3\,cm^2$.

18. Точките M, N и P лежат соодветно на страните BC, BD и дијагоналата на паралелограмот $ABCD$ при што $PM \parallel AB$ и $PN \parallel AD$. Отсечките AM и AN ја сечат BD соодветно во точките E и F. Докажи дека $P_{AEF} = P_{EBM} + P_{FND}$.



Решение. Од $PM \parallel AB$ следува, дека $P_{ABP} = P_{ABM}$ (триаголниците имаат иста основа и еднакви висини). Според тоа, $P_{ABP} - P_{AEB} = P_{ABM} - P_{AEB}$, односно $P_{APE} = P_{EBM}$. Аналогно се докажува дека $P_{APF} = P_{FND}$. Според тоа, $P_{AEF} = P_{APE} + P_{APF} = P_{EBM} + P_{FND}$.

19. Даден е паралелограм $ABCD$. Точката E е на продолжението на страната BC и е таква што $\overline{BC} : \overline{CE} = 2:1$, а точката F е на продолжението на страната AB и е таква што $\overline{AB} : \overline{BF} = 3:1$. Определи ја плоштината P на паралелограмот $ABCD$, ако е познато дека плоштината на триаголникот DEF е за $10\,cm^2$ помала од P.

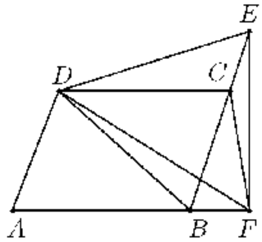
Решение. Имаме

$$P_{DFC} = P_{DBC} = \frac{1}{2}P,$$

$$P_{DCE} = \frac{1}{2}P_{DBC} = \frac{1}{4}P.$$

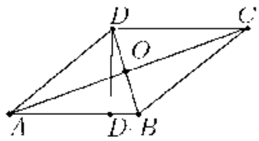
$$P_{FCE} = \frac{1}{2}P_{FBC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}P_{ABC} = \frac{1}{12}P,$$

па затоа $P_{DFE} = (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12})P = \frac{5}{6}P$. Според тоа, $\frac{1}{6}P = 10$, т.е. $P = 60\ cm^2$.



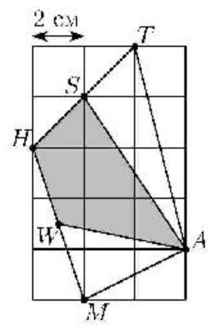
20. Даден е ромб $ABCD$ ($\measuredangle BAD < 90^\circ$) со страна a и дијагонали d' и d''. Определи ги аглите на ромбот ако $a^2 = d'd''$.

Решение. Нека DD_1 ($D_1 \in AB$) е висината на ромбот. Да означиме $\overline{DD_1} = h$. За плоштината на ромбот добиваме $ah = P = \frac{d'd''}{2}$,



па како $a^2 = d'd''$, добиваме $2ah = a^2$, односно $a = 2h$. Според тоа, во правоаголниот $\triangle AD_1D$ едната катета е половина од хипотенузата, па затоа тој е половина од рамностран триаголник. Значи, важи $\measuredangle BAD = 30^\circ$, па затоа аглите на ромбот се 30°, 30°, 150° и 150°.

21. На цртежот десно четириаголникот $MATH$ е нацртан во квадратна мрежа. Точките W и S се средини на страните MH и HT, соодветно. Определи ја плоштината на четириаголникот $WASH$.



Решение. Плоштината на четириаголникот $MATH$ е еднаква на

$$6\cdot 10 - (\frac{6\cdot 2}{2} + \frac{4\cdot 4}{2} + \frac{2\cdot 8}{2} + \frac{2\cdot 4}{2}) = 34\ cm^2.$$

Имаме,

$$P_{HWA} = \frac{1}{2}P_{HMA},\ P_{HSA} = \frac{1}{2}P_{HTA},$$

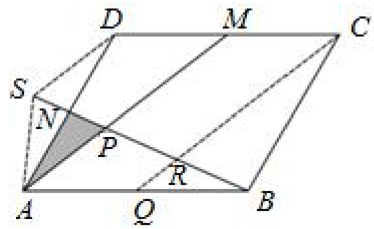
па затоа

$$P_{WASH} = \frac{1}{2}P_{MATH} = 17\ cm^2.$$

22. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека точката M е средина на страната CD, а точката N е средина на страната AD. Правите AM и BN се

сечат во точката P. Колкав дел од плоштината на паралелограмот $ABCD$ е плоштината на триаголникот ANP ?

Решение. Нека S е точка на правата BN, така што N е средина на отсечката PS. Отсечките AD и PS се преполовуваат, па затоа четириаголникот $APDS$ е паралелограм. Нека Q е средината на страната AB. Од $\overline{AQ} = \overline{MC}$



и $AQ \| MC$ следува дека четириаголникот $AQCM$ е паралелограм. Според тоа, $CQ \| MA \| DS$. Понатаму, од $\overline{BQ} = \overline{QA}$ следува $\overline{BR} = \overline{RP}$, а од $\overline{CM} = \overline{MD}$ следува $\overline{RP} = \overline{PS}$. Според тоа, $\overline{BR} = \overline{RP} = \overline{PS}$. Но, $\overline{PS} = 2\overline{PN}$, па затоа

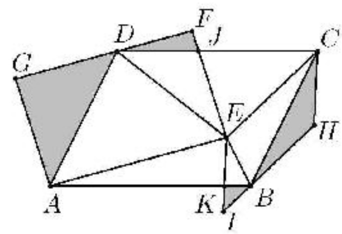
$$\overline{BN} = \overline{BR} + \overline{RP} + \overline{PN} = 2\overline{PN} + 2\overline{PN} + \overline{PN} = 5\overline{PN}.$$

Последното значи дека $h_B = 5h_P$, каде h_B е висината на паралелограмот, а h_P е висината во триаголникот ANP. Според тоа,

$$P_{ABCD} = \overline{AD} \cdot h_B = 2\overline{AN} \cdot 5h_P = 20 \cdot \frac{\overline{AN} \cdot h_P}{2} = 20P_{APN},$$

т.е. $P_{APN} = \frac{1}{20} P_{ABCD}$.

23. Во паралелограм $ABCD$ е земена внатрешна точка E и се конструирани паралелограми $AEFG$ и $CEIH$ така, што B лежи на HI и D лежи на GF (цртеж десно).

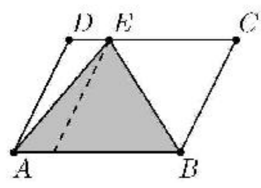


а) Докажи, дека збирот на плоштините на $AEFG$ и $CEIH$ е еднаков на плоштината на $ABCD$.

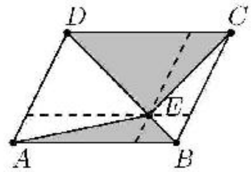
б) Ако $\triangle CEJ$ и $\triangle AKE$ имаат плоштини соодветно 20 и 14, определи ја плоштината на обоениот дел од цртежот.

Решение. Ќе користиме две својства, чии докази ги оставаме на читателот за вежба.

Својство 1. За прозиволна точка E од страната CD на паралелограмот $ABCD$ важи $P_{ABE} = \frac{1}{2} P_{ABCD}$, (цртеж десно).



Својство 2. За произволна точка E од внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ важи $P_{ABE}+P_{CDE}=\frac{1}{2}P_{ABCD}$ (цртеж десно).



а) Од својството 1 следува, дека

$$P_{ADE}=\frac{1}{2}P_{AEFG} \text{ и } P_{BEC}=\frac{1}{2}P_{CEIH}.$$

Од својството 2 следува, дека

$$P_{ABE}+P_{BEC}=\frac{1}{2}P_{ABCD}.$$

Според тоа,

$$\frac{1}{2}P_{AEFG}+\frac{1}{2}P_{CEIH}=\frac{1}{2}P_{ABCD},$$

од каде што следува тврдењето на задачата.

б) Бидејќи $P_{ADE}=\frac{1}{2}P_{AEFG}$, добиваме $P_{GAD}+P_{DEF}=\frac{1}{2}P_{AEFG}$. На ист начин добиваме $P_{BEI}+P_{BHC}=\frac{1}{2}P_{CEIH}$ и $P_{ABE}+P_{DEC}=\frac{1}{2}P_{ABCD}$. Во а) докажавме дека $\frac{1}{2}P_{AEFG}+\frac{1}{2}P_{CEIH}=\frac{1}{2}P_{ABCD}$, па затоа

$$P_{GAD}+P_{DEF}+P_{BEI}+P_{BHC}=P_{ABE}+P_{DEC}.$$

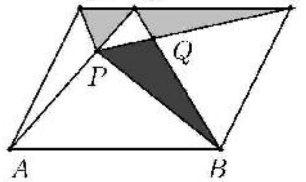
Ако од двете страни на горното равенство ја одземеме плоштината на $\triangle DJE$ и плоштината на $\triangle KBE$, добиваме дека плоштината на обоениот дел на цртежот е еднаква на збирот на плоштините на $\triangle CEJ$ и $\triangle AKE$, т.е. на 34.

24. На страната CD на паралелограмот $ABCD$ и избрана точка произволна точка M. Точката P припаѓа на отсечката AM, а отсечките BM и CP се сечат во точката Q. Докажи дека плоштината на триаголникот BPQ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците DPM и CMQ.

Решение. Имаме

$$P_{ABM}=\frac{1}{2}P_{ABCD} \text{ и}$$

$$P_{ABP}+P_{CDP}=\frac{1}{2}P_{ABCD}$$

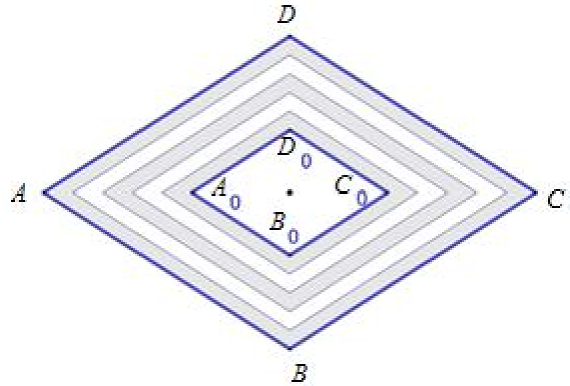


па затоа $P_{ABM}=P_{ABP}+P_{CDP}$. Од горните равенства следува

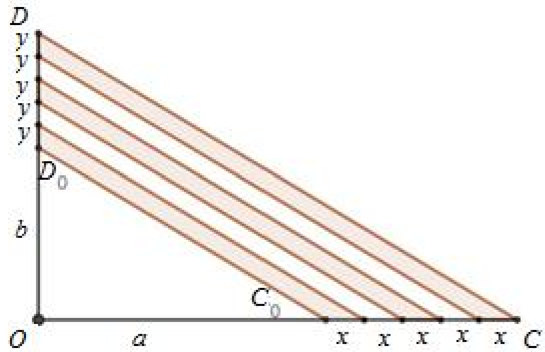
$$P_{APB}+P_{BPQ}+P_{PQM}=P_{ABP}+P_{DPM}+P_{PQM}+P_{CMQ},$$

од каде добиваме $P_{BPQ}=P_{DPM}+P_{CMQ}$.

25. Ромбот $A_0B_0C_0D_0$ се наоѓа внатре во ромбот $ABCD$ така што страните им се паралелни, а центрите им се совпаѓаат. Отсечките AA_0, BB_0, CC_0, DD_0 се поделени на пет еднакви отсечки. Добиените делбени точки се поврзани со отсечки паралелни со страните на дадените ромбови и така се добиени четири нови ромба. Плоштината на ромбот $ABCD$ е еднаква на $2250\,cm^2$, а плоштината на ромбот $A_0B_0C_0D_0$ е еднаква на $810\,cm^2$. Колкава е плоштината на обоената површина на цртежот десно?



Решение. *Прв начин*. Заради симетричност ќе разгледуваме четвртина од бараната површина, како што е прикажано на цртежот десно. На цртежот се прикажани шест правоаголни триаголници, чии плоштини, почнувајќи од најмалата, ќе ги означиме со $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$. При ознаките дадени на цртежот имаме



$$P_0 = \frac{1}{2}ab,$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(ab+ay+xb+xy),$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(a+2x)(b+2y) = \frac{1}{2}(ab+2ay+2bx+4xy),$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(a+3x)(b+3y) = \frac{1}{2}(ab+3ay+3bx+9xy),$$

$$P_4 = \frac{1}{2}(a+4x)(b+4y) = \frac{1}{2}(ab+4ay+4bx+16xy),$$

$$P_5 = \frac{1}{2}(a+5x)(b+5y) = \frac{1}{2}(ab+5ay+5bx+25xy).$$

Плоштината на најмалиот обоен четириаголник е

$$P_1 - P_0 = \frac{1}{2}(ay + bx + xy).$$

Плоштината на средниот по големина обоен черириаголник е

$$P_3 - P_2 = \frac{1}{2}(ay + bx + 5xy).$$

Плоштината на најголемиот обоен четириаголник е

$$P_5 - P_4 = \frac{1}{2}(ay + bx + 9xy).$$

Збирот на трите плоштини е

$$P' = \frac{1}{2}(3ay + 3ax + 15xy) = \frac{3}{2}(ay + bx + 5xy).$$

Бидејќи

$$\begin{aligned} P_5 - P_0 &= \frac{1}{2}(ab + 5ay + 5bx + 25xy) - \frac{1}{2}ab \\ &= \frac{1}{2}(5ay + 5ax + 25xy) \\ &= \frac{5}{2}(ay + bx + 5xy), \end{aligned}$$

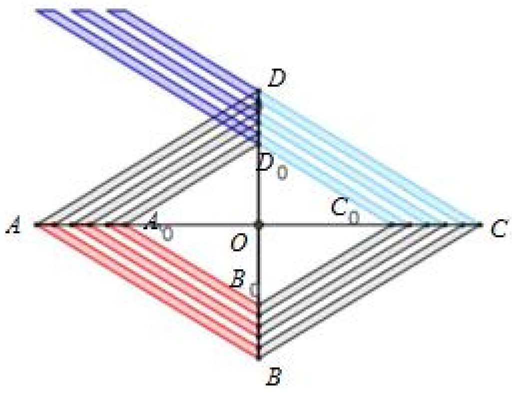
добиваме $ay + bx + 5xy = \frac{2}{5}(P_5 - P_0)$. Според тоа,

$$P' = \frac{3}{5}(P_5 - P_0) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}(2250 - 810) = 216\ cm^2$$

и конечно,

$$P = 4P' = 4\cdot 216 = 864\ cm^2.$$

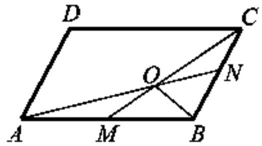
Втор начин. Ако трапезот ABB_0A_0 со црвени обоени ленти го транслатираме за вектор $\overrightarrow{BD_0}$ го добиваме трапезот со темносино обоени ленти (цртеж десно). Сега светлосино и темносино обоените ленти формираат 3 складни паралелограми, меѓу кои се наоѓаат уште



два такви паралелограми. Оттука следува дека плоштината на синиот дел е еднаква на $\frac{3}{5}$ од половина од разликата на плоштините на најголемиот и најмалиот ромб. Истото важи и за преостанатите два дела во кои сивата површина е еднаква на $\frac{3}{5}$ од преостаната површина. Според тоа, плоштината на обоената површина е еднаква на $\frac{3}{5}$

од разликата на плоштините на најголемиот и најмалиот ромб, т.е. на $\frac{3}{5}\cdot(2250-810)=864\,cm^2$.

26. Во паралелограмот $ABCD$, со плоштина S, точката M е средина на страната AB, а точката N е средина на страната BC. Отсечките AN и CM се сечат во точката O. Определи ја плоштината на триаголникот AMO.



Решение. Бидејќи точките M и N се соодветно средини на страните AB и BC, важи

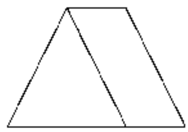
$$P_{ABN}=P_{BCM}=\frac{1}{2}P_{ABC}=\frac{S}{4}.$$

Понатаму, од истите причини важи

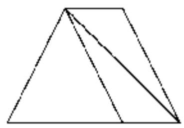
$$P_{AMO}=P_{MBO}=P_{BNO}=P_{NCO}=p.$$

Затоа $3p=P_{ABN}=\frac{S}{4}$, т.е. $p=P_{AMO}=\frac{S}{12}$.

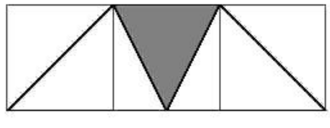
27. Трапез е поделен на паралелограм и триаголник, кои имаат еднакви плоштини (цртеж десно). Ако должината на големата основа на трапезот е еднаква на $36\,cm$, определи ја должината на малата основа.



Решение. Да повлечеме една дијагонала на трапезот, како што е прикажано на цртежот десно. Од условите на задачата следува дека дадениот трапез оваа дијагонала го дели на два триаголника, од кои едниот има три пати поголема плоштина од другиот. Но, овие триаголници имаа еднакви висини и основите им се основите на трапезот. Според тоа, помалата основа на трапезот е еднаква на $36:3=12\,cm$.



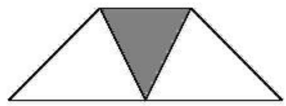
28. Во квадратна мрежа е конструиран рамнокрак трапез, како што е прикажано на цртежот десно. Ако плоштината на обоениот триаголник е еднаква на $18\,cm^2$, определи ги плоштината и периметарот на трапезот.



Решение. Ако квадратната мрежа има страна a, тогаш плоштината на обоениот триаголник е $P=\frac{a^2}{2}$, па затоа $\frac{a^2}{2}=18$, т.е. $a=6\,cm$. Значи, трапезот има основи $6\,cm$ и $3\cdot6=18\,cm$ и висина $h=6\,cm$, па затоа неговата плоштина е еднаква на $\frac{6+18}{2}\cdot 6 = 72\ cm^2$.

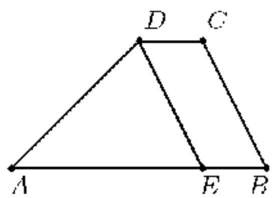
Кракот на трапезот е еднаков на дијагоналата на квадратот со страна $a = 6\ cm$, односно е еднаков на $6\sqrt{2}\ cm$. Конечно, периметарот на трапезот е еднаков на $6+18+2\cdot 6\sqrt{2} = 12(2+\sqrt{2})\ cm$.

29. Во рамнокракиот трапез на цртежот десно основите се однесуваат како $1:3$. Колку проценти од плоштината на трапезот е плоштината на сивиот триголник?



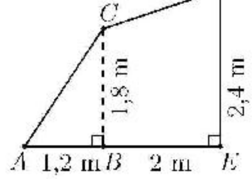
Решение. Ако малата основа е a, тогаш големата основа е $3a$. Двете фигури имаат иста висина h, па затоа плоштината на триаголникот е $P' = \frac{ah}{2}$, а плотината на трапезот е $P'' = \frac{a+3a}{2}h$. Според тоа, за плоштините важи $P' : P'' = \frac{ah}{2} : 1 : 4$. Тоа значи дека плоштината на сивиот триаголник е 25% од плоштината на трапезот.

30. Трапезот $ABCD$ прикажан на цртежот десно има плоштина $18\ cm^2$ и основа $\overline{CD} = 4\ cm$. Точката E од основата AB е таква што $BCDE$ е паралелограм и $\overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AB}$. Определи ја должината на поголемата основа AB, висината на трапезот и плоштината на паралелограмот $BCDE$.



Решение. Бидејќи $BCDE$ е паралелограм, важи $\overline{BE} = \overline{CD} = 4\ cm$. Од $\overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AB}$ следува дека $\overline{BE} = \frac{1}{4}\overline{AB}$, па затоа $\overline{AB} = 4\overline{BE} = 16\ cm$. Ако висината на трапезот ја означиме со h, добиваме $\frac{16+4}{2}h = 18$, па затоа $h = 1,8\ cm$. Конечно, плоштината на паралелограмот $BCDE$ е еднаква на $P_{BCDE} = 4\cdot 1,8 = 7,2\ cm^2$.

31. Користејќи ги податоците на цртежот пресметај ја плоштината на дадената фигура.



Решение. Дадената фигура е составена од правоаголен $\triangle ABC$ и трапез $EDCB$. Плоштината на $\triangle ABC$ е

$$P' = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{1,2 \cdot 1,8}{2} = 1,08\ m^2,$$

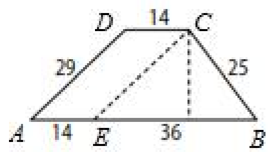
а плоштината на трапезот $EDCB$ е

$$P'' = \frac{\overline{ED} + \overline{BC}}{2} \cdot \overline{BE} = \frac{2,4+1,8}{2} \cdot 2 = 4,2\ m^2.$$

Конечно, плоштината на дадената фигура е $P = P' + P'' = 5,28\ m^2$.

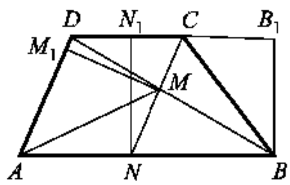
32. Даден е трапез со основи $50\ cm$ и $14\ cm$, а краци $25\ cm$ и $29\ cm$. Определи ја плоштината на овој трапез.

Решение. Нека E е точка на основата AB на трапезот $ABCD$ таква што $CE \parallel DA$ (цртеж десно). Тогаш четириаголникот $AECD$ е паралелограм, па затоа $\overline{EC} = 29\ cm$ и $\overline{AE} = 14\ cm$. Според тоа, $\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = 36\ cm$. Понатаму, за триаголникот EBC ни се познати должините на трите страни, па со Хероновата формула лесно се пресметува дека $P_{EBC} = 360\ cm^2$. Затоа висината на триаголникот EBC е $h = \frac{2P_{EBC}}{EB} = 20\ cm$. Конечно, за плоштината на трапезот имаме $P_{ABCD} = \frac{50+14}{2} \cdot 20 = 640\ cm^2$.



33. Даден е трапез $ABCD$ со поголема основа AB. Правата низ C, паралелна на AD, ги сече дијагоналата BD во точката M и основата AB во точката N. Докажи дека $P_{AMD} = P_{DBC}$.

Решение. Од условот на задачата следува дека четириаголникот $ANCD$ е паралелограм. Ги повлекуваме висините MM_1 $(M_1 \in AD)$ и NN_1 ($N_1 \in CD$). Имаме $\overline{NN_1} = \overline{BB_1}$, каде BB_1, ($B_1 \in CD$) е висината на $\triangle DBC$. Тогаш



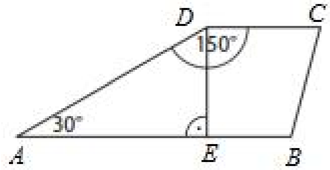
$$P_{AMD} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{MM_1}}{2} = \frac{1}{2} P_{ANCD} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{NN_1}}{2} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{BB_1}}{2} = P_{DBC}.$$

34. Периметарот на трапезот е еднаков на $135\ cm$. Подолгиот крак има должина $36\ cm$ и со пократката основа зафаќа агол еднаков на 150°. Пократкиот крак е еднаков на пократката основа и неговата должина е

еднаква на 60% од должината на подолгата основа. Определи ја плоштината на овој трапез.

Решение. Нека AD е подолгиот крак, а AB подолгата основа на трапезот $ABCD$. Тогаш

$$\overline{AD}=60\,cm \text{ и } \overline{BC}=\overline{CD}=0,6\overline{AB}.$$



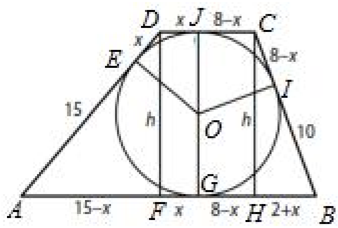
Од

$$\overline{AB}+0,6\overline{AB}+0,6\overline{AB}+36=135,$$

добиваме $\overline{AB}=45\,cm$. Значи, $\overline{BC}=\overline{CD}=27\,cm$. Отсечката DE е висина на трапезот, па $\measuredangle AED=90^\circ$ и како $\measuredangle EAD=180^\circ-150^\circ=30^\circ$, добиваме дека $\triangle AED$ е половина од рамностран триаголник, што значи дека $\overline{DE}=\frac{\overline{AD}}{2}=18\,cm$. Конечно, плоштината на трапезот е $P=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\cdot\overline{DE}=648\,cm^2$.

35. Даден е трапез $ABCD$ во кој е впишана кружница која подолгата основа AB ја допира во точката G така што $\overline{AG}=15\,cm$ и $\overline{BG}=10\,cm$, а пократката основа е $\overline{CD}=8\,cm$. Пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$.

Решение. Со E,J,I да ги означиме допирните точки на впишаната кружница и страните AD,CD,BC, соодветно, и нека DF и CH се висините на трапезот, $\overline{DF}=\overline{CH}=h$. Ако означиме $\overline{DJ}=x$, тогаш $\overline{DJ}=\overline{DE}=\overline{FG}=x$, $\overline{CJ}=\overline{CI}=\overline{HG}=8-x$, $\overline{AE}=\overline{AG}=15\,cm$, $\overline{BI}=\overline{BG}=10\,cm$. Триаголниците AFD и BHC се правоаголни и со примена на Питагоровата теорема добиваме:



$$\overline{DA}^2-\overline{AF}^2=\overline{DF}^2=\overline{CH}^2=\overline{CB}^2-\overline{BH}^2,$$

$$(\overline{AE}+\overline{ED})^2-(\overline{AG}-\overline{GF})^2=(\overline{BI}+\overline{IC})^2-(\overline{BG}-\overline{GH})^2,$$

$$(15+x)^2-(15-x)^2=(18-x)^2-(2+x)^2,$$

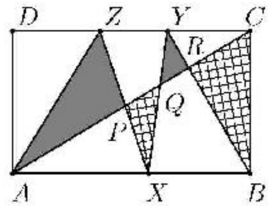
$$(15+x+15-x)(15+x-15+x)=(18-x+2+x)(18-x-2-x),$$

$$60x=320-40x,$$

$$x=\frac{16}{5}\,cm.$$

Сега, $\overline{AB}=25\,cm, \overline{CD}=8\,cm$ и $h=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{20\cdot\frac{48}{5}}=8\sqrt{3}\,cm$, па затоа $P=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}h=132\sqrt{3}\,cm^2$.

36. Правоаголникот $ABCD$ има плоштина 2015 cm^2. На страната AB е избрана точка X, а на страната CD се избрани точките Y и Z (цртеж десно).



а) Определи ја плоштината на трапезот $ABYZ$, ако плоштината на триаголникот XYZ е еднаква на $201{,}5\,cm^2$.

б) Докажи дека вкупната плоштина на сивите триаголници на цртежот е еднаква на вкупната плоштина на шрафираните триаголници.

Решение. Триаголниците AXY и BXY имаат висина еднаква на $\overline{AD}$, па затоа

$$P_{AXZ}+P_{BXY}=\frac{\overline{AX}\cdot\overline{AD}}{2}+\frac{\overline{BX}\cdot\overline{AD}}{2}=\frac{(\overline{AX}+\overline{BX})\cdot\overline{AD}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2}=\frac{1}{2}P_{ABCD}.$$

а) Имаме

$$P_{ABYZ}=P_{AXZ}+P_{XYZ}+P_{BXY}=\frac{1}{2}P_{ABCD}+P_{XYZ}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2015+201{,}5=1209\,cm^2.$$

б) Во а) докажавме дека $P_{AXZ}+P_{BXY}=\frac{1}{2}P_{ABCD}$. Од друга страна $P_{ABC}=\frac{1}{2}P_{ABCD}$, па затоа

$$P_{AXZ}+P_{BXY}=P_{ABC}. \qquad (1)$$

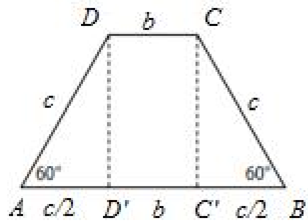
Со P,Q,R да ги означиме пресечните точки на дијагоналата AC соодветно со XZ,XY,BY. Ако од двете страни на равенството (1) ги одземеме плоштините на триаголникот APX и четириаголникот $BRQX$, го добиваме равенството

$$P_{APZ}+P_{QRY}=P_{PQX}+P_{BRC},$$

што и требаше да се докаже.

37. Аглите на поголемата основа на трапезот се по 60°, а неговиот периметар е $200\,cm$. Определи ја должината на поголемата основа така што плоштината на трапезот ќе биде најголема можна.

Решение. Според условот на задачата трапезот $ABCD$ е рамнокрак со крак c и основи a и b (цртеж десно). Нека D' е подножјето на висината повлечена од темето D. Тогаш триаголникот $AD'D$ е половина од рамностран триаголник, па затоа



$$\overline{AD'} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{c}{2} \text{ и } h = \overline{DD'} = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

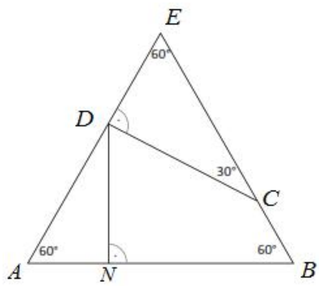
Значи, $a = b + c$ и периметарот на трапезот е $L = a + b + 2c = 3c + 2b$. Според тоа, $3c + 2b = 200$, па затоа $b = \frac{200-3c}{2}$. За плоштината на трапезот важи

$$P = \frac{a+b}{2}h = \frac{2b+c}{2}\frac{c\sqrt{3}}{2} = (100-c)\frac{c\sqrt{3}}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{100-c+c}{2}\right)^2 = 1250\sqrt{3}\ cm^2.$$

Горното неравенство всушност е неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите $100-c$ и c, при што знак за равенство важи ако и само ако $100-c = c$, т.е. $c = 50\ cm$. Според тоа, $b = \frac{200-3c}{2} = 25\ cm$ и $a = b + c = 75\ cm$.

38. Во четириаголникот $ABCD$ важи $\overline{AB} = 6\ cm, \overline{AD} = 4\ cm$, $\measuredangle ADC = 90^\circ$ и $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = 60^\circ$. Определи ги должините на дијагоналите и плоштината на четириаголникот $ABCD$.

Решение. Да ги продолжиме страните AD и BC преку D и C, соодветно и пресечната точка да ја означиме со E. Тогаш $\triangle ABE$ е рамностран. Значи, $\overline{ED} = 2\ cm$, а од $\measuredangle DCE = 30^\circ$ следува $\overline{EC} = 4\ cm$ и затоа $\overline{BC} = 2\ cm$. Сега, од Питагоровата теорема следува



$$\overline{DC} = \sqrt{\overline{EC}^2 - \overline{ED}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}\ cm,$$
$$\overline{DC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}\ cm.$$

Нека N е подножјето на нормалата повлечена од D на AB. Тогаш $\measuredangle ADN = 30^\circ$, па затоа $\overline{EN} = 2\ cm$, а $\overline{NB} = 4\ cm$. Значи, $\overline{DN} = 2\sqrt{3}\ cm$ и оттука

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{NB}^2 + \overline{DN}^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}\ cm\ .$$

За плоштината на четириаголникот $ABCD$ имаме

$$P_{ABCD} = P_{ABE} - P_{EDC} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} - \frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}\ cm^2\ .$$

39. Точката O од внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ е таква, што растојанијата од O до четирите темиња на $ABCD$ се еднакви (во некој редослед) на 1, 2, 4 и 7 сантиметри. Определи ја најголемата можна плоштина на четириаголникот $ABCD$.

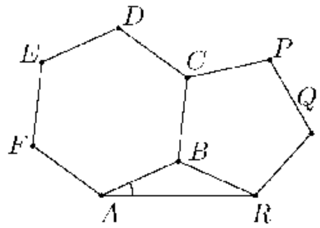
Решение. При дадени должини на две од страните на триаголникот, неговата плоштина е најголема можна, кога тие страни се заемно нормални. Според тоа, можеме да сметаме, дека AC и BD се заемно-нормални и се сечат во точката O. Тогаш плоштината на $ABCD$ е половина од производот на AC и BD. Ги делиме броевите 1, 2, 4 и 7 на два пара и го наоѓаме најголемиот производ на збирот на броевите во двата пара

$$(1+2)(4+7) = 33 < (1+4)(2+7) = 45 < (1+7)(2+6) = 48\ .$$

Според тоа, најголемата можна плоштина на $ABCD$ е $\frac{48}{2} = 24\ cm^2$.

10. МНОГУАГОЛНИК

1. Дадени се правилен шестаголник $ABC\,DEF$ и правилен петаголник $BCPQR$ кои се наоѓаат од различни страни на правата BC. Определи го $\measuredangle BAR$.



Решение. Од правилниот шестаголник следува $\measuredangle ABC = 120^\circ$, а од правилниот петаголник следува $\measuredangle RBC = 108^\circ$. Според тоа,

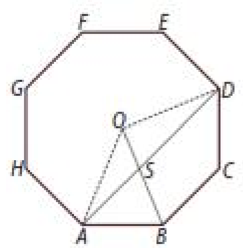
$$\measuredangle ABR = 360^\circ - \measuredangle ABC - \measuredangle RBC = 132^\circ.$$

Понатаму, триаголникот ABR е рамнокрак со агол при врвот $\measuredangle ABR = 132^\circ$, па затоа

$$\measuredangle BAR = \frac{180^\circ - 132^\circ}{2} = 24^\circ.$$

2. Даден е правилен осумаголник $ABCDEFGH$. Симетралата на $\measuredangle ABC$ и дијагоналата AD се сечат во точката S. Определи го $\measuredangle ASB$.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу осумаголникот $ABCDEFGH$. Имаме $\measuredangle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, како централен агол, па затоа $\measuredangle AOD = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$. Понатаму, триаголникот ADO е рамнокрак, па затоа



$$\measuredangle OAS = \measuredangle OAD = \frac{180^\circ - \measuredangle AOD}{2} = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = \frac{45^\circ}{2}.$$

Сега $\measuredangle ASB$ е надворешен агол за триаголникот AOS, што значи дека

$$\measuredangle ASB = \measuredangle OAS + \measuredangle AOS = \frac{45^\circ}{2} + 45^\circ = 67^\circ 30'.$$

3. а) Колку темиња има правилен многуаголник, кај кој бројот на дијагоналите е 1004 пати поголем од бројот на страните?
б) Дали постои правилен многуаголник, кај кој бројот на дијагоналите е за 1004 поголем од бројот на страните?

Решение. а) Во секој n – аголник бројот на дијагоналите е еднаков на $\frac{n(n-3)}{2}$. Ако бројот на дијагоналите е 1004 пати поголем од бројот на страните, тогаш $\frac{n(n-3)}{2}=1004n$, од каде добиваме $\frac{n-3}{2}=1004$, односно $n=2011$.

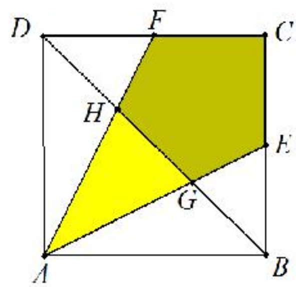
б) Ако таков многуаголник постои, тогаш $\frac{n(n-3)}{2}=n+1004$, од каде последователно добиваме

$$n(n-3)=2(n-3)+2014,$$
$$(n-3)(n-2)=2014.$$

Но, $44\cdot 45<2014<45\cdot 46$, па затоа не постои природен број n таков што $(n-3)(n-2)=2014$, што значи дека не постои правилен многуаголник кај кој бројот на дијагоналите е за 1004 поголем од бројот на страните.

4. Нека $ABCD$ е квадрат, а точките E и F се средини на страните BC и CD. Дијагоналата BD на квадратот $ABCD$ ги сече отсечките AE и AF редоследно во точките G и H. Докажи дека плоштината на петаголникот $CFHGE$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците ABG и AHD.

Решение. Нека x е должината на страната на квадратот. Тогаш



$$P_{\triangle ABD}=\frac{x^2}{2} \text{ и } P_{AECF}=x^2-2\cdot\frac{\frac{x}{2}\cdot x}{2}=\frac{x^2}{2},$$

т.е. $P_{\triangle ABD}=P_{AECF}$. Според тоа,

$$P_{\triangle ABG}+P_{\triangle AGH}+P_{\triangle AHD}=P_{\triangle AHD}+P_{CFHGE},$$

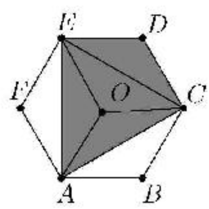
од каде добиваме

$$P_{\triangle ABG}+P_{\triangle AGH}=P_{CFHGE},$$

што и требаше да се докаже.

5. Плоштината на правилниот шестаголник $ABCDEF$ е еднаква на 1. Определи ја плоштината на четириаголникот $ACDE$.

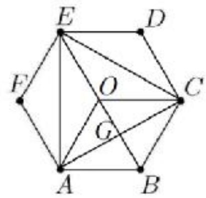
Решение. Нека O е центарот на правилниот шестаголник (цртеж десно). Тогаш шестаголникот е поделен на шест складни триаголника ABC, AOC, CDE, COE, EFA, EOA, и плоштината на се-



кој од нив е еднаква на $\frac{1}{6}$. Четириаголникот $ACDE$ е составен од четири од овие триаголници, па затоа неговата плоштина е еднаква на $4\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

6. Правилниот шестаголник $ABCDEF$ има плоштина $60\,cm^2$. Ако G е пресекот на дијагоналите AC и BE, определи ја плоштината на триагоникот ABG.

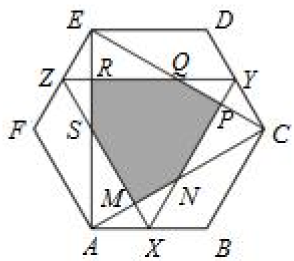
Решение. Јасно, плоштината на триаголникот ABG е еднаква на половина од плоштината на триаголникот ABC (Докажи!). Нека O е центарот на шестаголникот (цртеж десно). Тогаш шестаголникот е поделен на шест складни триаголници $ABC, AOC, CDE, COE, EFA, EOA$.



Плоштината на секој од овие триаголници е еднаква на $10\,cm^2$. Конечно, плоштината на $\triangle ABG$ е еднаква на $10:2=5\,cm^2$.

7. Нека $ABCDEF$ е правилен шестаголник со страна $1cm$. Со X, Y, Z редоследно да ги означиме средините на страните AB, CD, EF. Пресметај ги периметарот и плоштината на шестаголникот кој се добива како пресек на триаголниците ACE и XYZ.

Решение. Нека $MNPQRS$ е барaниот шестаголник (цртеж десно). Отсечката XY е средна линија на трапезот $ABCD$, па затоа важи $XY \parallel AD \parallel BC$ и $\overline{XY}=\frac{3}{2}\,cm$. Отсечката YQ е средна линија на $\triangle ECD$, па затоа важи $YQ \parallel ED \parallel FC$ и $\overline{YQ}=\frac{1}{2}\,cm$. Понатаму, од



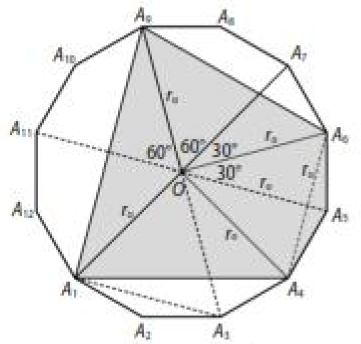
$\measuredangle QYP=60^\circ$ следува $\overline{YP}=\frac{1}{2}\overline{YQ}=\frac{1}{4}\,cm$. На ист начин докажуваме дека $\overline{NX}=\overline{ZS}=\frac{1}{2}\,cm$ и $\overline{MX}=\overline{ZR}=\frac{1}{4}\,cm$, па затоа периметарот на шестаголникот $MNPQRS$ е

$$L_{MNPQRS}=3\overline{PN}+3\overline{MN}=3\cdot(\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4})+3\cdot\sqrt{(\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{1}{4})^2}=\tfrac{9+3\sqrt{3}}{4}\,cm,$$

а неговата плоштина е

$$P_{MNPQRS} = P_{XYZ} - 3P_{QPY} = \frac{15}{32}\sqrt{3}\ cm^2 .$$

8. Најкратката дијагонала на правилниот дванаесетаголник $A_1A_2...A_{12}$ е со должина $\sqrt{6-\sqrt{3}}\ cm$. Определи ја плоштината на петаголникот $A_1A_4A_5A_6A_9$.



Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу правилниот дванаесетаголник. Централниот агол на правилниот дванаесетаголник е еднаков на 30°. Триаголникот A_1OA_3 е рамнокрак, а неговиот агол при врвот е еднаков на 60°, па затоа тој е рамностран. Според тоа, должината на најкратката дијагонала A_1A_3 е еднаква на радиусот r_0 на опишаната кружница околу дванаесетаголникот.

За плоштината на петаголникот $A_1A_4A_5A_6A_9$ имаме

$$P_{A_1A_4A_5A_6A_9} = P_{A_1A_4O} + P_{A_4A_5A_6O} + P_{A_6A_9O} + P_{A_9A_1O} .$$

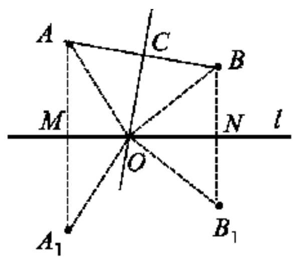
Понатаму, триаголниците A_1A_4O и A_6A_9O се складни, рамнокраки правоаголни триаголници со должина на кататетите r_0. Дијагоналите на делтоидот $OA_4A_5A_6$ исто така се еднакви на r_0, а плоштината на триаголникот A_9A_1O е еднаква на плоштината на рамностран триаголник со страна r_0. Според тоа,

$$P_{A_1A_4A_5A_6A_9} = 2\frac{r_0^2}{2} + \frac{r_0^2}{2} + \frac{r_0^2\sqrt{3}}{4} = (\sqrt{6-\sqrt{3}})^2\,\frac{6+\sqrt{3}}{4} = \frac{33}{4}\ cm^2 .$$

11. КРУЖНИЦА И КРУГ

1. Паровите точки A и A_1, B и B_1 се симетрични во однос на правата l. Докажи, дека овие четири точки или лежат на една кружница или лежат на една права.

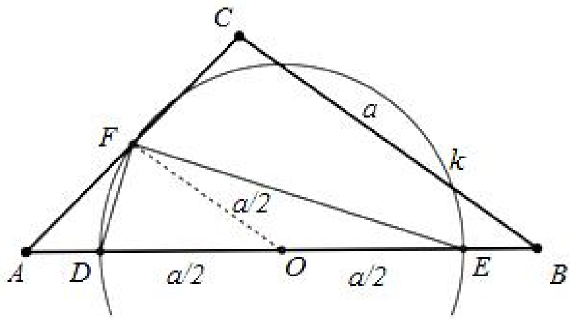
Решение. Очигледно, ако точките A и B лежат на права која е нормална на правата l, тогаш четирите точки лежат на таа права.



Нека точките A и B не припаѓаат на права која е нормална на правата l. Ја конструираме симетралата на отсечката AB, која минува низ точката $C \in AB$ и ја сече правата l во точката O. Тогаш l е симетрала на AA_1 и BB_1, па затоа важи $\overline{A_1O} = \overline{AO} = \overline{BO} = \overline{B_1O}$, т.е. точките A, A_1, B и B_1 лежат на една кружница.

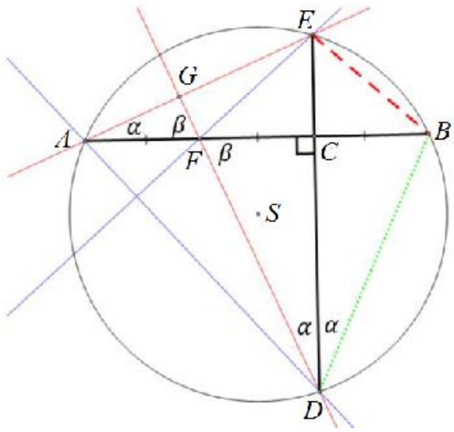
2. На страната AB на триаголникот ABC, $\overline{AB} > \overline{BC}$ се избрани точките D и E такви што $\overline{DE} = \overline{BC}$ и $\overline{AD} = \overline{BE}$ (D е меѓу A и E). Ако F е средината на страната AC, докажи дека $\measuredangle DFE = 90^\circ$.

Решение. Нека O е средина на страната AB, т.е. $\overline{AO} = \overline{BO}$ и нека $\overline{DE} = \overline{BC} = a$ (види цртеж).



Од $\overline{DO} = \overline{AO} - \overline{AD} = \overline{BO} - \overline{BE} = \overline{EO}$, следува дека точката O е средина на отсечката DE, односно $\overline{DO} = \overline{EO} = \frac{a}{2}$. Понатаму, O е средина на страната AB и F е средината на страната AC, па затоа FO е средна линија на триаголникот ABC, од каде следува дека $\overline{OF} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{a}{2}$. Сега, од $\overline{DO} = \overline{EO} = \overline{OF} = \frac{a}{2}$ следува дека точката F припаѓа на кружницата k чиј дијаметар е отсечката DE. Според тоа, $\measuredangle DFE$ е периферен агол во кружницата над дијаметар DE, па затоа $\measuredangle DFE = 90^\circ$.

3. На тетивата AB на кружницата k е земена точка C таква што $\overline{AC} = 2\overline{CB}$. Тетивата DE минува низ точката C и е нормална на тетивата AB. Точката F е средина на отсечката AC. Докажи дека $DF \perp AE$ и $EF \perp AD$.



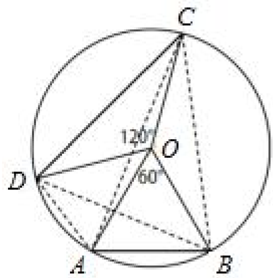
Решение. За правоаголните $\triangle DBC$ и $\triangle DCF$ важи: страната DC е заедничка и $\overline{CB} = \overline{FC}$, па од признакот САС следува $\triangle DBC \cong \triangle DCF$. Според тоа, важи $\measuredangle BDC = \measuredangle CDF = \sim$. Нека $DF \cap AE = \{G\}$.

Понатаму $\measuredangle GAF = \measuredangle BDC = \sim$ (периферини агли над тетивата BE, па како $\measuredangle BDC = \measuredangle CDF = \sim$, добиваме $\measuredangle GAF = \measuredangle CFD = \sim$. Од друга страна $\measuredangle GFA = \measuredangle DFC =$ (накрсни агли). Според тоа, $\triangle GAF$ и $\triangle CFD$ имаат два пара еднакви по големина агли, па затоа важи $\measuredangle AGF = \measuredangle FCD = 90^\circ$, односно $DF \perp AE$, што и требаше да се докаже.

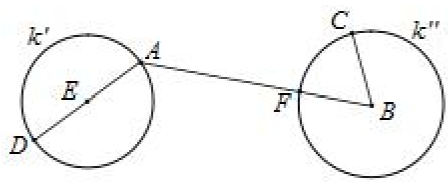
Да го разгледаме $\triangle ADE$. Од условот на задачата имаме $AC \perp DE$, а погоре докажавме дека $DG \perp AE$. Според тоа, DG и AC се висини во овој триаголник, па затоа $DG \cap AC = \{F\}$ е ортоцентар на $\triangle ADE$. Но, висината повлечена од темето E мора да минува низ ортоцентарот F, па затоа $EF \perp AD$, што и требаше да се докаже.

4. Дадени се отсечките AB и CD. Отсечката AB се гледа од точките C и D под агол од 30°. Отсечката CD се гледа од точките A и B под агол од 60°. Определи ја должината на отсечката AB, ако должината на отсечката CD е еднаква на $10\sqrt{3}\ cm$.

Решение. Отсечката AB се гледа од точките точките C и D под ист агол, па затоа точките A,B,C,D лежат на една кружница $k(O,r)$ (цртеж десно). Сега, важи $\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB = 60^\circ$ и $\measuredangle COD = 2\measuredangle CAD = 120^\circ$, што значи дека $\overline{AB} = r$ и $\overline{CD} = r\sqrt{3}$. Значи, $r\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$, т.е. $r = 10\ cm$. Конечно, $\overline{AB} = 10\ cm$.



5. На дадениот цртеж точката E е центар на кружницата k', а точката B е центар на кружницата k''. Ако радиусот на кружницата k' е еднаков на $13\,cm$, отсечката AB е долга $53\,cm$ и искршената линија $DABC$ е долга $1\,m$, определи ја должината на отсечката AF.

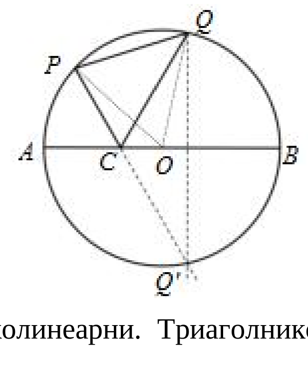


Решение. Нека r е радиусот на кружницата k''. Бидејќи $\overline{DA} = 26\ cm$, $\overline{AB} = 53\,cm$ и должината на искршената линија $DABC$ е еднаква на $\overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BC} = 1\,m$, добиваме $1\,m = 26\ cm + 53\ cm + r$, од каде добиваме $r = 21\,cm$. Конечно, $\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{BF} = \overline{AB} - r = 32\ cm$.

6. На дијаметарот AB на кружницата k избрана е произволна точка C. Точките P и Q на кружницата k се од иста страна на дијаметарот AB и се такви што $\measuredangle ACP = \measuredangle PCQ = \measuredangle QCB = 60^\circ$. Докажи дека должината на тетивата PQ не зависи од изборот на точката C.

Решение. Нека O е центарот на кружницата и нека Q' е точката симетрична на точката Q во однос на дијаметарот AB. Од својствата на симетријата следува $\measuredangle BCQ' = \measuredangle BCQ = 60^\circ$. Според тоа,

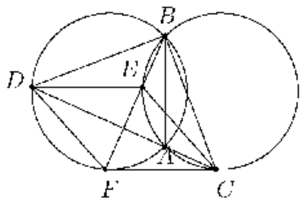
$$\measuredangle PCQ' = \measuredangle PCQ + \measuredangle QBC + \measuredangle BCQ'$$
$$= 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$



што значи дека точките P,C и Q' се колинеарни. Триаголникот

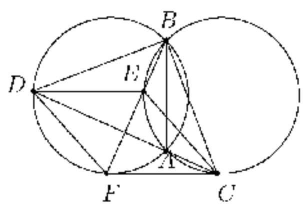
CQQ' е рамнокрак со агол при врвот $\measuredangle QCQ'=120^\circ$, што значи дека периферниот агол над тетивата PQ е $\measuredangle PQ'Q=\measuredangle CQ'Q=30^\circ$. Зна-чи, централниот агол над тетивата PQ е $\measuredangle POQ=60^\circ$, па затоа три-аголникот POQ е рамностран. Според тоа, должината на тетивата PQ е еднаква на радиусот на кружницата, т.е. таа не зависи од изборот на точката C.

7. Две кружници со еднакви радиуси се сечат во точките A и B. Низ точката A е повлечена права која не е нормална на AB и која по втор пат ги сече кружниците во точките C и D, а низ точката B е повлечена права нормална на CD, која ги сече кружниците во точките E и F. Докажи дека точките C,D,E,F се темиња на делтоид.



Решение. Имаме $\measuredangle DCB=\measuredangle CDB$, па затоа $\triangle CDB$ е рамнокрак. Но, $BF\perp CD$ и BF ја сече CD во точката O. Бидејќи E и F лежат на симетралата BF на CD, добиваме $\overline{CE}=\overline{DE}$ и $\overline{CF}=\overline{DF}$. Според тоа, четириаголникот $CFDE$ има заемно нормални дијагонали и два пара еднакви соседни страни, па затоа тој е делтоид.

8. Две кружници со еднакви радиуси се сечат во точките A и B. Низ A е повлечена права која по втор пат ги сече кружниците во точките C и D, а низ B права нормална на CD која ги сече кружниците во точките E и F. Докажи дека точките C,D,E,F се темиња на ромб.



Решение. Кружниците имаат еднакви радиуси, па затоа аглите над заедничката тетива AB се еднакви, т.е. $\measuredangle BDC=\measuredangle BCD$. Според тоа, $\triangle DCB$ е рамнокрак. Значи, BE ја преполовува отсечката CD, односно EF е симетрала на DC, па затоа $\overline{DE}=\overline{EC}$ и $\overline{DF}=\overline{FC}$. Понатаму, триаголниците DCE и DCF се рамнокраки, па затоа

$$\measuredangle ABE=\measuredangle ACE=\measuredangle ADE \text{ и } \measuredangle ABF=\measuredangle ADF=\measuredangle FCA.$$

Според тоа,

$$\measuredangle ECD = \measuredangle CDE = \measuredangle ADE = \measuredangle ABE = \measuredangle ABF = \measuredangle FCA = \measuredangle FCD,$$

па затоа CD е симетрала на EF. Значи, дијагоналите на четириаголникот $CEDF$ се заемно нормални и се преполовуваат, што значи дека тој е ромб, т.е. точките C, D, E, F се темиња на ромб.

9. Дадени се $\triangle ADC$ со страна $\overline{AC} = 1$ и кружници $k_1(A)$ и $k_2(C)$, кои се сечат во точката D. Произволна права низ точката D по втор пат ги сече кружниците k_1 и k_2 соодветно во точките M и N.

   а) Докажи дека симетралите на отсечките MN минуваат низ една иста точка.

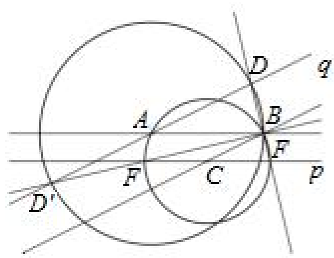
   б) Определи ја најголемата можна должина на отсечката MN.

   Решение. а) Ако DA_1 и DC_1 се дијаметри соодветно на k_1 и k_2, тогаш точките M, N, A_1, C_1 се темиња на трапез (евентуално дегенериран) со основи MA_1 и NC_1, нормални на MN (а таа е крак или дијагонала на трапезот). Тогаш симетралата на MN ја содржи средната линија на трапезот, која минува низ средината на A_1C_1, што значи дека симетралите на отсечките MN минуваат низ една иста точка.

   б) Ако избереме права $MN \parallel AC$, добиениот трапез е правоаголник (евентуално дегенериран) и $\overline{MN} = \overline{A_1C_1} = 2\overline{AC} = 2$ (AC е средна линија). Во сите останати случаи должината на MN е помала, бидејќи е нормала, а $\overline{A_1C_1} = 2$ не е нормала.

10. Нека A и B се две точки на кружницата $k_1(C, r)$ кои не се дијаметрално спротивни. Правата p минува низ точката C и е паралелна на правата AB, а правата q минува низ точката A и е паралелна на правата BC. Нека D е пресечната точка на правата q и кружницата $k_2(A, \overline{AB})$. Докажи дека p и DB се сечат на кружницата k_1.

    Решение. Нека F е пресечната точка на правите p и BD. Страните на триаголниците ABD и CFB се паралелни, што значи дека нивните внатрешни агли се еднакви, т.е. овие триаголници се слични. Бидејќи $\overline{AB} = \overline{AD}$, од сличноста следува $\overline{CF} = \overline{CB} = r$, што значи дека точката F



припаѓа на кружницата k_1. Аналогно се докажува дека D е втората пресечна точка на правата q и кружницата $k_2(A,\overline{AB})$, која на цртежот е означена со D'.

11. Матеа од лист хартија со димензии $148\,mm \times 210\,mm$ исекла два круга со дијаметар $10\,cm$ и четири круга со дијаметар $4\,cm$. Останатиот дел од листот останал неискористен. Колку проценти од листот искористила Матеа?

Решение. Плоштината на листот е $14{,}8 \cdot 21 = 210{,}8\,cm^2$. Збирот на плоштините на круговите кои ги исекла Матеа е

$$2\text{®} \cdot 5^2 + 4\text{®} \cdot 2^2 = 66\text{®} \approx 207{,}345\,cm^2.$$

Матеа приближно искористила $\frac{207{,}345}{310{,}8} \cdot 100 \approx 66{,}71\%$ од листот.

12. Во рамнокрак правоаголен триаголник ABC со катети $\overline{AC} = \overline{BC} = 1\,cm$ е впишана полукружница k со центар на катетата AC. Оваа полукружница го содржи темето C и ја допира хипотенузата AB. Определи ја должината на радиусот r на k.

Решение. Нека O е центарот на вписаната полукружница (цртеж десно). Од условот на задачата последователно добиваме:

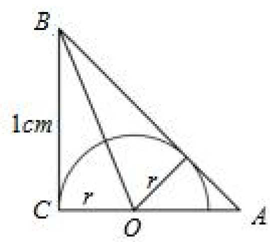
$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AOB} + P_{\triangle OCB},$$

$$\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{r \cdot 1}{2},$$

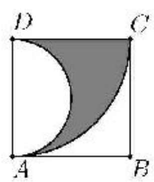
$$r(\sqrt{2} + 1) = 1,$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}+1}\,cm,$$

$$r = (\sqrt{2} - 1)\,cm.$$



13. Во квадрат $ABCD$ со страна се конструирани лак со центар D и радиус $2\,dm$ и полукружница со дијаметар AD, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ги периметарот и плоштината на обоениот дел од квадратот.



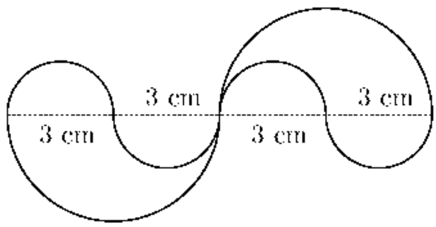
Решение. Плоштината на обоениот дел од квадратот се добива кога од плоштината на четвртина круг со радиус $2\,dm$ е одземе плоштината на половина круг со радиус $1\,dm$. Според тоа, бараната плоштина е

$$P=\frac{1}{4}\cdot 2^2® - \frac{1}{2}\cdot 1^2® = \frac{®}{2}\ cm^2 .$$

Периметарот на обоениот дел од квадратот е составен од отсечка со должина $2\ dm$, полукружница со радиус $1\ dm$ и четвртина од кружница со радиус $2\ dm$. Периметарот е

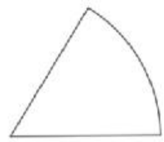
$$L = 2+\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2® + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2® = 2(® + 1)\ dm .$$

14. Определи ја плоштината на фигурата прикажана на цртежот десно.



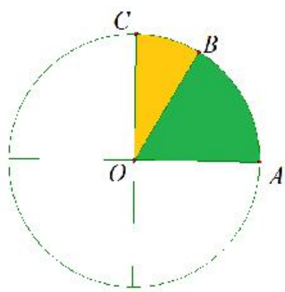
Решение. Ако фигурата ја расечеме по испрекинатата линија, тогаш од добиените четири фигури дека може да се состави круг со радиус $3\ cm$. Значи, плоштината на фигурата е $P=3^2® = 9®$.

15. На училишното игралиште е нацртан голем круг. Средината на кругот е точката O, а на работ се означени точките A, B и C. Притоа аглите $\measuredangle AOB$ и $\measuredangle BOC$ се остри, а отсечките OA и OB се заемно нормални.



Делот од кругот ограничен со отсечките OA, OB и кружниот лак $\overset{\frown}{AB}$ е обоен зелено, а делот ограничен со отсечките OB, OC и кружниот лак $\overset{\frown}{BC}$ е обоен портокалово. Андреј со своите стапала измерил дека периметарот на кругот е 240 стапала и дека периметарот на зелениот дел е за 18 стапала поголем од периметарот на портокаловиот дел. Ако плоштината на целиот круг е $72\ m^2$, колкава е плоштината на портокаловиот дел?

Решение. Двата обоени дела заедно формираат четвртина од кругот, кој е ограничен со два радиуса и делот од кружницата долг $240:4=60$ стапала. Во периметарот на двата дела, зелениот и портокаловиот, по два пати се јавува радиусот на кружницата, па затоа разликата на периметрите на двата дела е еднаква на разликата на должината на



кружните лаци $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$. Ако со x и y ги означиме должините на кружните лаци $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$, соодветно, тогаш $x+y=60$ и $x-y=18$. Ако ги собереме добиените равенки, наоѓаме $2x=78$, т.е. $x=39$ стапала. Значи, $y=60-39=21$ стапало.

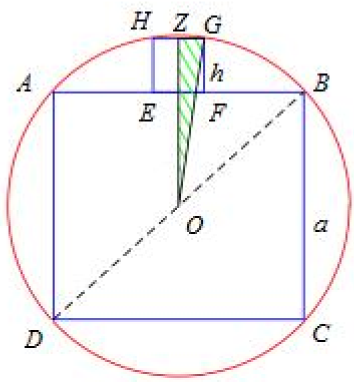
Плоштината на кругот е еднаква на $72\,m^2$, па како неговата должина е еднаква на 240 стапала, на едно стапало соодветствува кружен исечок со плоштина $73:240=0,3\,m^2$. Конечно, плоштината на портокаловиот дел е еднаква на $21\cdot 0,3=6,3\,m^2$.

16. Даден е квадрат $ABCD$ околу кој е опишана кружница. Конструираме нов квадрат $EFGH$ така што темињата E и F се наоѓаат на страната AB на квадратот $ABCD$, а темињата G и H на лакот $\overset{\frown}{AB}$ на опишаната кружница. Определи го односот на плоштините на двата квадрати.

Решение. Нека a е должината на страната на квадратот $ABCD$, а h е должината на страната на квадратот $EFGH$. Нека Z е подножјето на нормалата повлечена на страната HG од центарот O на кружницата опишана околу квадратот $ABCD$. Јасно, радиусот на опишаната кружница е со должина $r=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и важи $\overline{OZ}=h+\frac{a}{2}$. Од триаголникот OGZ следува

$$\overline{OG}^2=\overline{ZG}^2+\overline{OZ}^2,$$

односно



$$(\tfrac{a\sqrt{2}}{2})^2=(\tfrac{h}{2})^2+(h+\tfrac{a}{2})^2,$$

$$\tfrac{a^2}{2}=\tfrac{h^2}{4}+h^2+ah+\tfrac{a^2}{4},$$

$$a^2=5h^2+4ah,$$

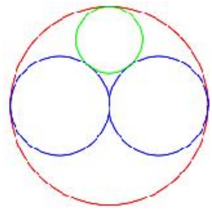
$$\tfrac{a^2}{h^2}-4\tfrac{a}{h}+4=9,$$

$$(\tfrac{a}{h}-2)^2=3^2,$$

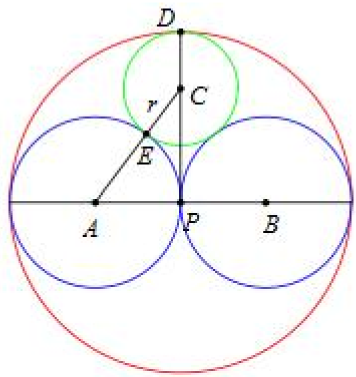
$$\tfrac{a}{h}=5.$$

Конечно, $\frac{P_{ABCD}}{P_{EFGH}}=\frac{a^2}{h^2}=25$.

17. На цртежот десно се прикажани четири кружници такви што секоја од нив ги допира преостанатите три кружници. Најголемата кружница има радиус $2\,cm$, а секоја од двете средни кружници има радиус $1\,cm$. Определи го радиусот на најмалата од четирите кружници.



Решение. Нека A, B, P и C се центрите на дадените кружници. Точката P е допирната точка за двете по големина средни кружници и нивната заедничка тангента во точката P минува низ центарот на C најмалата кружница и допирната точка D меѓу најмалата и најголемата кружница. Понатаму отсечката AC минува низ допирната точка E на најмалата и една од средните кружници. Со r да го означиме радиусот на најмалата кружница и да го разгледаме триаголникот APC. Имаме $\overline{AP} = 1\,cm$ и



$$\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} = 1 + r\ .$$

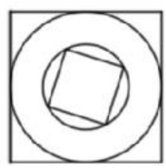
Од друга страна

$$\overline{PC} = \overline{PD} - \overline{CD} = 2 - r\ ,$$

па со примена на Питагоровата теорема последователно добиваме

$$(1+r)^2 = 1^2 + (2-r)^2$$
$$1 + 2r + r^2 = 1 + 4 - 4r + r^2,$$
$$6r = 4,$$
$$r = \tfrac{2}{3}\,cm.$$

18. Дадени се две концентрични кружници k_1 и k_2 со радиуси R и r ($R > r$). Околу поголемата кружница е опишан квадрат, а во помалата кружница е впишан квадрат како на цртежот десно. Односот на плоштините на кружниот прстен и квадратниот прстен (геометриската фигура меѓу двата квадрати) е $\frac{®}{10}$.



а) Пресметај го односот на плоштините на помалиот и поголемиот круг.

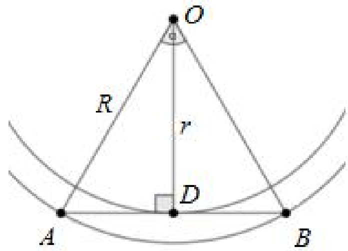
б) Докажи дека постои правилен многуаголник таков што k_1 и k_2 се соодветно неговите опишана и впишана кружница.

Решение. а) Опишаниот квадрат има должина на страна $2R$, а впишаниот квадрат има должина на страна $r\sqrt{2}$. Според тоа, $\frac{\text{®}}{10}=\frac{\text{®}R^2-\text{®}r^2}{4R^2-2r^2}$,

од каде добиваме $10(R^2-r^2)=4R^2-2r^2$, односно $3R^2=4r^2$. Затоа

$$\frac{P_{k_1}}{P_{k_2}}=\frac{\text{®}r^2}{\text{®}R^2}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{4}{3}.$$

б) Нека O е центарот на кружниците и AB е отсечката со крајни точки на k_1 што ја допира k_2 во точката D. Од $OD\perp AB$, што значи дека OD е висина во рамнокракиот $\triangle ABO$, па затоа е симетрала на $\measuredangle AOB$. Сега, од Питагоровата теорема следува



$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{OD}^2}=\sqrt{R^2-\tfrac{3}{4}R^2}=\tfrac{1}{2}R=\tfrac{1}{2}\overline{AO}.$$

Според тоа, во правоаголниот триаголник AOD катетата AD е половина од хипотенузата, што значи дека тој е половина од рамностран триаголник. Затоа $\measuredangle AOB=60^\circ$, а тоа е централен агол на правилен шестаголник.

19. Во внатрешноста на $\measuredangle AOB=90^\circ$ е земена точка P. Конструирани се две еднакви кружници $k_2(O_2)$ и $k_1(O_1)$ така, што k_2 ги допира полуправите OA и OP соодветно во точките K и M, а k_1 ги допира полуправите OB и OP соодветно во точките N и Q. Нека $\overline{O_1M}\cap\overline{OA}=T$. Ако $O_2\in KQ$ и $\overline{QM}:\overline{MO_1}=q$, определи го односот $\overline{QT}:\overline{O_2O_1}$.

Решение. Отсечките MO_2 и QO_1 се паралелни и еднакви, па затоа четириаголникот MO_2QO_1 е паралелограм. Според тоа, $TO_1\perp OA$ и затоа четириаголникот OTO_1N е правоаголник. Добиваме, дека $\triangle MO_1Q\cong\triangle MOT$, па затоа $\overline{MQ}=\overline{MT}$. Да означиме $\overline{MO_2}=r$, $\overline{QO_2}=a$ и $\overline{QM}=aq$. Тогаш од Питагоровата теорема за $\triangle MO_2Q$ добиваме $r=a\sqrt{1-q^2}$. Ако сега со помош на Питагоровата теорема ги изразиме

$\overline{O_1O_2}$ и $\overline{QT}$, добиваме дека бараниот однос е

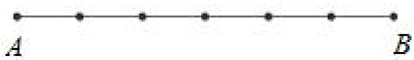
$$\sqrt{\frac{2-2q^2+2q\sqrt{1-q^2}+2\sqrt{1-q^2}}{2-q^2+2q-2\sqrt{1-q^2}}}\ .$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

12. ПРЕБРОЈУВАЊЕ НА ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

1. Колку отсечки постојат на отсечка на која заедно со крајните точки се означени $n+1$ точка?

Решение. Секоја отсечка AB е определена со две точки A и B. Почетната точка на отсечката AB можеме да ја избереме на $n+1$ начини, а крајната точка на n начини. На тој начин добиваме $n(n+1)$ отсечки. Но, отсечките AB и BA се една иста отсечка, што значи дека секоја отсечка е броена два пати. Затоа добиениот број треба да го поделиме со 2, т.е. вкупниот број отсечки определени со означените $n+1$ точка е $\frac{n(n+1)}{2}$.

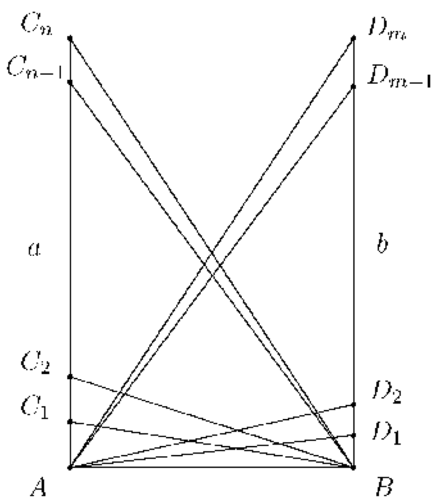


2. На цртежот десно полуправите a и b се нормални на правата AB. Нека $C_1, C_2, ..., C_n$ и $D_1, D_2, ..., D_m$ се такви точки соодветно на a и b, што

$$\measuredangle ABC_1 = \measuredangle C_1BC_2 = ... = \measuredangle C_{n-1}BC_n = 5^\circ,$$

$$\measuredangle BAD_1 = \measuredangle D_1AD_2 = ... = \measuredangle D_{m-1}AD_m = 3^\circ,$$

каде n и m се најголемите природни броеви, за кои тоа е можно. Определи го бројот на триаголниците со темиња A и B и некои од пресечните точки на полуправите AD_j и BC_i, $j=1,2,...,m$, $i=1,2,...,n$. Колку од овие триаголници се рамнокраки со основа AB, а колку се правоаголни со хипотенуза AB.



Решение. Од условот на задачата следува дека n и m се најголемите природни броеви за кои важи $5n<90$ и $3m<90$, па затоа $n=17$ и $m=29$. Бараниот број триаголници е еднаков на бројот на пресечните точки на означените полуправи, т.е. е еднаков на $17\cdot 29=493$. Ако некои од овие триаголници се рамнокраки, тогаш аголот при основата треба да е делив со 15°. Такви агли се вкупно 5, т.е. имаме 5 рамнокраки триаголници. Од $5k+3p=90^\circ$ следува дека $3|k$ и $5|p$, $k=3k'$ и $p=5p'$, односно $k'+p'=6$, каде $k',p'\in\mathbb{N}$. Лесно се добива дека оваа равенка има 5 решенија, што значи дека и бројот на правоаголните триаголници е 5.

3. На страната AB на правоаголникот $ABCD$ се избрани неколку точки, на страните BC и DA се избрани по четири точки, а на страната CD се избрани 5 точки. Ниту една од избраните точки не е теме на дадениот правоаголник. Користејќи ги избраните точки како темиња може да се нацртаат точно 4040 четириаголници такви што најмногу едно теме припаѓа на страната AB. Колку точки се избрани на страната AB.

Решение. Нека n е бројот на точките кои се избрани на страната AB. Бидејќи најмногу едно теме на разгледуваните четириаголници припаѓа на страната AB, можни се два случаја:

а) на страната AB не припаѓа ниту едно теме,

б) на страната AB припаѓа точно едно теме.

Да забележиме дека на една страна може да има најмногу две темиња на четириаголник. Две темиња на страната BC или на страната DA може да се изберат на $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ начини, а две темиња на страната CD може да се изберат на $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ начини.

а) На страната AB не припаѓа ниту едно теме. Тогаш темињата на четириаголникот може да се распоредени:

а1) по две на две страни на правоаголникот и тоа:

- по две темиња на страните BC и CD и такви четириаголници има $6\cdot 10=60$,
- по две темиња на страните BC и DA и такви четириаголници има $6\cdot 6=36$,
- по две темиња на страните CD и DA и такви четириаголници има $10\cdot 6=60$,

а2) две темиња на една страна и по едно на другите две страни и тоа:

- две темиња на BC, по едно теме на CD и DA и такви четириаголници има $6\cdot 5\cdot 4=120$,

- две темиња на CD, по едно теме на BC и DA и такви четириаголници има $10\cdot4\cdot4=160$,
- две темиња на DA, по едно теме на CD и BC и такви четириаголници има $6\cdot5\cdot4=120$.

Значи, ако на страната AB не припаѓа ниту едно теме, тогаш имаме $60+36+60+120+160+120=556$ четириаголници.

б) На страната AB припаѓа точно едно теме. Тогаш темињата на четириаголникот може да бидат распоредени:

б1) по едно теме на секоја од другите две страни и такви четириаголници имаме $n\cdot5\cdot4\cdot4=80n$,

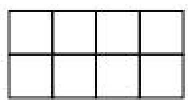
б2) две темиња на една страна, едно на страната AB и едно на другите две страни и тоа:

- две темиња на страната BC, едно на страната AB и едно на страната CD или DA, и такви четириаголници се
$$6n(5+4)=54n,$$
- две темиња на страната CD, едно на страната AB и едно на страната BC или DA, и такви четириаголници се
$$10n(4+4)=80n,$$
- две темиња на страната DA, едно на страната AB и едно на страната CD или BC, и такви четириаголници се
$$6n(5+4)=54n.$$

Значи, ако на страната AB припаѓа точно едно теме, тогаш имаме $54n+80n+54n+80n=268n$ четириаголници.

Вкупниот број четириаголници е 4040, па затоа $556+268n=4040$, т.е. $n=13$. Според тоа, на страната AB се избрани 13 точки.

4. Осум еднакви квадрати се наредени во правоаголни (цртеж десно). Збирот на плоштините на сите квадрати кои може да се забележат на цртежот е $80\,cm^2$.



Определи го збирот на плоштините на сите правоаголници, кои не се квадрати, а кои може да се воочат на дадениот цртеж.

Решение. На дадениот цртеж имаме 8 од дадените квадрати и уште 3 квадрати кои се составени од по 4 дадени квадрати. Според тоа, плоштината на сите квадрати кли може да се воочат на цртежот е еднаква на плоштината на $8+3\cdot4=20$ дадени квадрати. Затоа плоштината на еден од дадените квадрати е еднаква на $80:20=4\,cm^2$, па должината на неговата страна е еднаква на $2\,cm$.

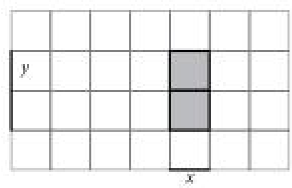
Понатаму, на дадениот цртеж имаме:

- 10 правоаголници со должини на страни $2\,cm$ и $4\,cm$, чија вкупна плоштина е $10 \cdot 2 \cdot 4 = 80\,cm^2$,
- 4 правоаголници со должини на страни $2\,cm$ и $6\,cm$, чија вкупна плоштина е $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48\,cm^2$,
- 2 правоаголници со должини на страни $2\,cm$ и $8\,cm$, чија вкупна плоштина е $2 \cdot 2 \cdot 8 = 32\,cm^2$,
- 2 правоаголници со должини на страни $4\,cm$ и $6\,cm$, чија вкупна плоштина е $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48\,cm^2$, и
- 1 правоаголник со должини на страни $4\,cm$ и $8\,cm$, чија вкупна плоштина е $4 \cdot 8 = 32\,cm^2$.

Конечно, збирот на плоштините на сите правоаголници кои не се квадрати е $80+48+32+48+32=240\,cm^2$.

5. Колку правоаголници се определени со правоаголна $m \times n$ мрежа?

Решение. Било кој правоаголник во $m \times n$ мрежа е определен со различно избраните должини x и y (цртеж десно).

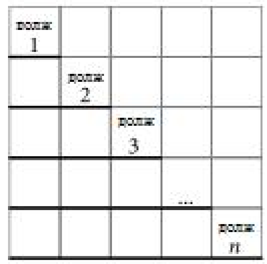


На секоја вертикална линија можеме да избереме $\frac{m(m+1)}{2}$ отсечки, а на секоја хоризонтална линија можеме да избереме $\frac{n(n+1)}{2}$ отсечки. Секоја вертикална отсечка во комбинација со секоја хоризонтална отсечка определува точно еден правоаголник. Според тоа, бараниот број правоаголници е $\frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$.

6. Колку правоаголници се определени со квадратна $n \times n$ мрежа?

Решение. *Прв начин*. Квадратна $n \times n$ мрежа всушност е правоаголна $m \times n$ за која важи $m = n$. Според претходната задача во оваа мрежа се определени $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ правоаголници.

Втор начин. На секоја хоризонтална линија имаме n отсечки со должина 1, $n-1$ отсечка со должина 2, $n-2$ отсечки со должина 3, ..., 2 отсечки со должина $n-1$ и 1 отсечка со должина 1 (на цртежот десно должините 1, 2, 3, ..., n се означени со задебелена линија). Според тоа, во оваа мрежа има вкупно



$$n+(n-1)+...+3+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

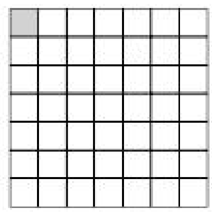
должини. На секоја вертикална линија исто така постојат

$$n+(n-1)+...+3+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

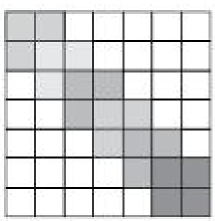
должини. Според тоа, вкупниот број правоаголници во квадратна $n\times n$ мрежа е еднаков на $\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

7. Колку квадрати се определени во квадратна $n\times n$ мрежа?

Решение. Лесно се гледа дека квадрат со големина 1×1 во $n\times n$ мрежа може да се најде во $n\cdot n=n^2$ положби, т.е. во мрежата имаме n^2 квадрати со големина 1×1. На цртежот десно тоа е прикажано за $n=7$.



За квадратот со големина 2×2 состојбата е малку поинаква. Да замислиме дека горниот лев агол на квадратната мрежа и горниот лев агол на квадратот со големина 2×2 се совпаѓаат. Сега темето на тој агол на 2×2 квадратот хоризонтално може да се најде во $n-1$ позиција при што квадратот останува внатре во мрежата, а исто така може да се најде вертикално во $n-1$ позиција при што квадратот останува внатре во мрежата. Според тоа, во мрежата имаме $(n-1)\cdot(n-1)=(n-1)^2$ квадрати со големина 2×2. На цртежот лево тоа е прикажано за $n=7$.



Продолжувајќи ја постапката добиваме дека во мрежата имаме $(n-2)^2,(n-3)^2,...,2^2,1^2$ квадрати соодветно со големина 3×3, 4×4, ..., $(n-1)\times(n-1)$, $n\times n$. Според тоа, вкупниот број квадрати во квадратна $n\times n$ мрежа е:

$$1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Последното равенство може да се докаже со помош на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

8. Колку квадрати се определени во правоаголна $m\times n$ мрежа?

Решение. Да претпоставимедека $m<n$, односно дека $n=m+s$, $s\geq 1$ (во спротивно имаме квадратна мрежа). Тогаш најголемата големина на квадрат во оваа мрежа може да биде $m\times m$. Со аналогни размислувања како во претходните задачи добиваме дека имаме:

- mn квадрати со големина 1×1,
- $(m-1)(n-1)$ квадрати со големина 2×2,
- $(m-2)(n-2)$ квадрати со големина 3×3,
- $(m-3)(n-3)$ квадрати со големина 4×4,
- $(m-4)(n-4)$ квадрати со големина 5×5,

....

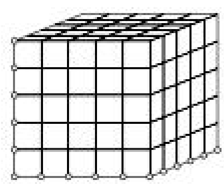
- $1\cdot(n-m+1)$ квадрати со големина $m\times m$.

Според тоа, во правоаголна $m\times n$, $m<n$ мрежа се определени

$$\begin{aligned}S&=mn+(m-1)(n-1)+(m-2)(n-2)+(m-3)(n-3)+...\\&\quad+(m-m+1)(n-m+1)\\&=mn+mn-(m+n)+1^2+mn-2(m+n)+2^2+mn-3(m+n)+3^2+...\\&\quad+mn-(m-1)(m+n)+(m-1)^2\\&=m\cdot mn-(m+n)(1+2+3+...+(m-1))+(1^2+2^2+3^2+...+(m-1)^2)\\&=nm^2-\frac{m(m-1)(m+n)}{2}+\frac{(m-1)m(2m-1)}{6}\end{aligned}$$

квадрати.

9. Колку коцки се определени во коцкаста $n\times n\times n$ мрежа. (На цртежот десно е прикажана коцкаста $5\times 5\times 5$ мрежа.)



Решение. Лесно се гледа дека коцка со големина $1\times 1\times 1$ во $n\times n\times n$ мрежа може да се најде во $n\cdot n\cdot n=n^3$ положби, т.е. во мрежата имаме n^3 коцки со големина $1\times 1\times 1$. На цртежот горе тоа е прикажано за $n=5$.

Со аналогни размислувања, при што треба да се има предвид дека поместувањата се во три правци, се добива дека коцки со големина

$2\times 2\times 2$ имаме $(n-1)\cdot(n-1)\cdot(n-1)=(n-1)^3$. Слично, имаме $(n-2)^3$, $(n-3)^3,\dots,2^3,1^3$ коцки соодветно со големина $3\times 3\times 3, 4\times 4\times 4,\dots$ $(n-1)\times(n-1)\times(n-1), n\times n\times n$. Според тоа, вкупниот број коцки во коцкаста $n\times n\times n$ мрежа е:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+(n-1)^3+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Последното равенство може да се докаже со помош на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Забелешка. Како што гледаме бројот на правоаголниците во квадратна $n\times n$ мрежа е еднаков на бројот на коцките во коцкаста $n\times n\times n$ мрежа.

10. Колку квадари се определени со тридимензионална правоаголна $m\times n\times r$ мрежа?

Решение. Според задача 5 основата на секој квадар може да се избере на $\frac{m(m+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ начини, а според задача 1 висната на квадарот може да се избере на $\frac{r(r+1)}{2}$ начини. Според тоа, со тридимензионална правоаголна $m\times n\times r$ мрежа се определени $\frac{m(m+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{r(r+1)}{2}$ квадари.

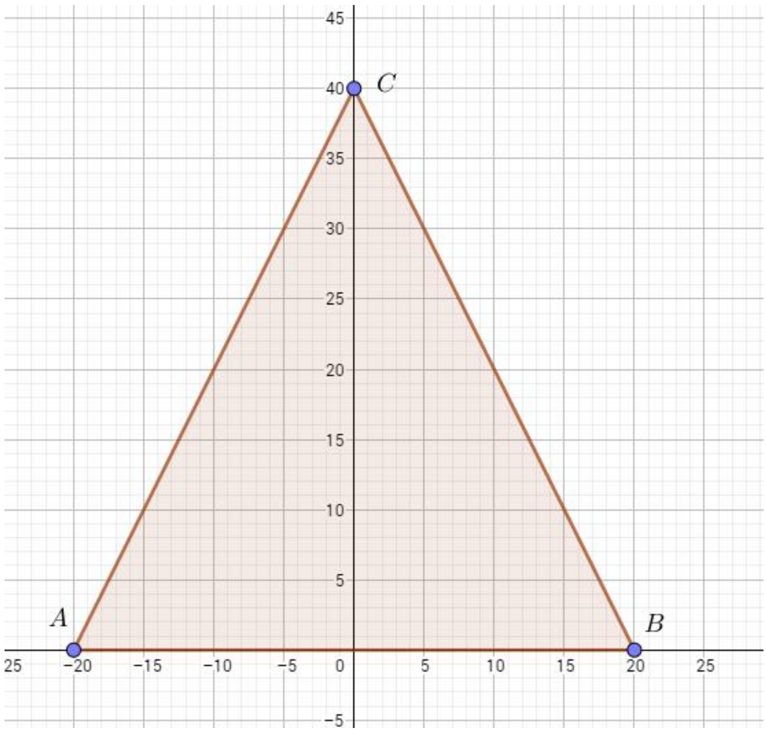
11. Колку квадари се определени со коцкаста $n\times n\times n$ мрежа?

Решение. Коцкастата $n\times n\times n$ мрежа всушност е тридимензионална правоаголна $m\times n\times r$ во која $m=n=r$. Сега од задача 10 следува дека со коцкаста $n\times n\times n$ мрежа се определени $\frac{n^3(n+1)^3}{8}$ квадари.

13. ГЕОМЕТРИСКИ ЗАДАЧИ ВО ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

1. Во правоаголен координатен систем е даден $\triangle ABC$ чии темиња се $A(-20,0)$, $B(20,0)$ и $C(0,40)$. Определи го бројот на точките со целобројни координати кои лежат внатре или на страните на $\triangle ABC$.

Решение. Ако координатите на бараните точки ги означиме со (x, y), тогаш најмалата целобројна вредност на y е 0, а најголемата е 40 (цртеж долу).



За $y = 0$ на $\triangle ABC$ лежат 41 точка со целобројни координати.

За $y = 1$ има 39 точки.

За $y = 2$ има 39 точки.

За $y = 3$ има 37 точки.

За $y = 4$ има 37 точки.

....

За $y=37$ има 3 точки.

За $y=38$ има 3 точки.

За $y=39$ има 1 точка.

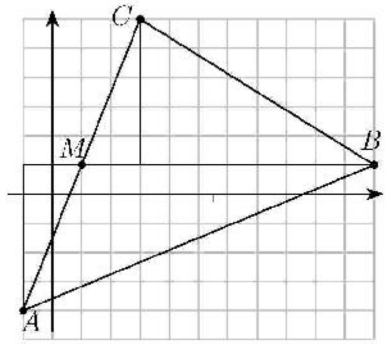
За $y=40$ има 1 точка.

Значи, вкупниот број точки со зададеното својство е:

$$\begin{aligned} n &= 41+2\cdot(1+3+5+...+35+37+39) \\ &= 41+2\cdot((1+30)+(3+37)+...+(19+21)) \\ &= 41+2\cdot\tfrac{20\cdot 40}{2} \\ &= 41+800 \\ &= 841. \end{aligned}$$

2. Во координатен систем се означени точките $A(-1,-4)$ и $B(11,1)$. Точката $M(1,1)$ е средина на отсечката AC. Определи ги координатите на точката C и пресметај ја плоштината на триаголникот ABC.

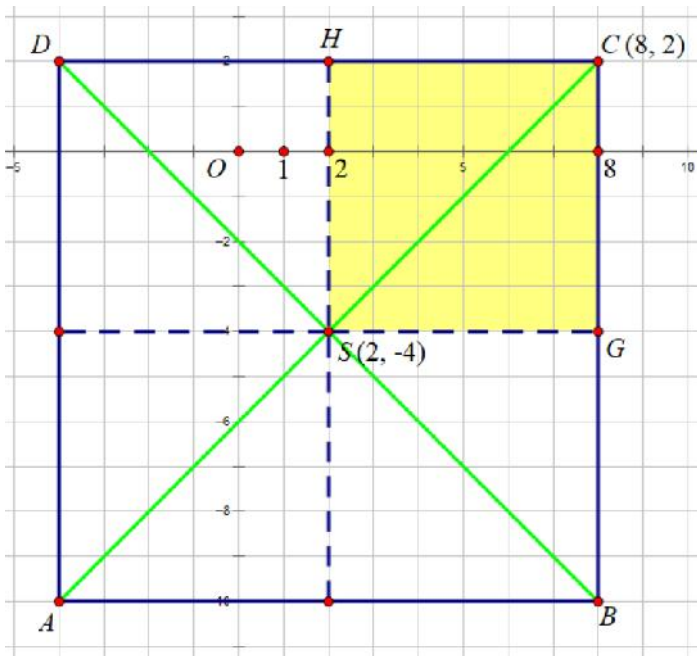
Решение. Во координатниот систем конструираме правоаголен триаголник со хипотенуза AM и катети паралелни на координатните оски (цртеж десно). Должината на катетата паралелна со апсцисата е 2 единици, а на катетата паралелна со ординатата е 5 единици. Бидејќи M е средина на AC, катетите на соодветниот правоаголен триаголник со хипотенуза MC исто така се 2 и 5. Оттука следува дека $C(3,6)$.



Имаме $\overline{BM}=11-1=10$ единици и висините спуштена на страната BM во триаголниците AMB и CMB се еднакви на 5 единици. Затоа плоштината на секој од овие триаголници е $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5=25$ квадратни единици. Конечно, плоштината на $\triangle ABC$ е 50 квадратни единици.

3. Во правоаголен координатен систем во рамнина со должина на единичната отсечка $2\,cm$ е нацртан квадрат. Определи ги периметарот и плоштината на квадратот ако точката $(8,2)$ е едно негово теме, а точката $(2,-4)$ е пресекот на неговите дијагонали.

Решение. *Прв начин*. Нека едното теме на квадратот е $C(8,2)$, а пресекот на неговите дијагонали е $S(2,-4)$. Квадратот е осносиметрична фигура во однос на симетралите на своите страни и централно симетрична фигура во однос на пресекот на неговите дијагонали. На долниот цртеж во правоаголен координатен систем се нацртани точките C и S, а потоа користејќи ги наведените својства е добиен квадратот $ABCD$, при што со оските на симетрија SG и SH е добиен квадратот $SGCH$.



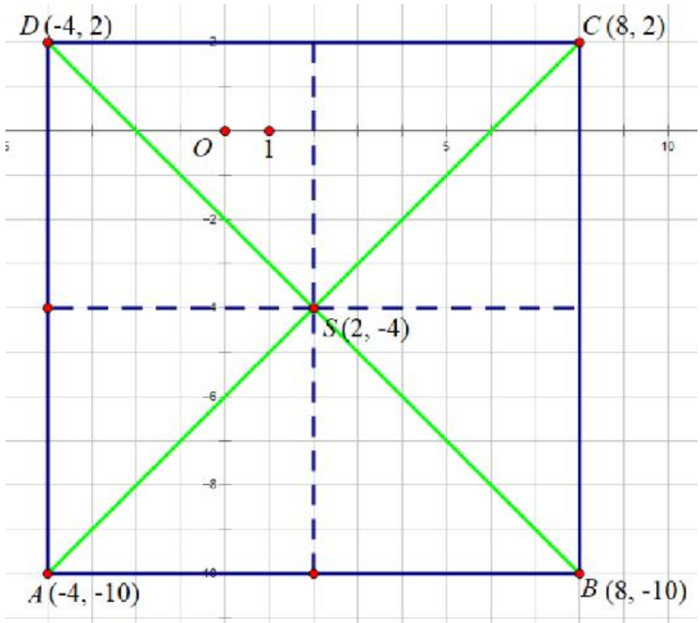
Должината на страната на квадратот $SGCH$ е $8-2=6$ единечни отсечки, односно $6\cdot 2=12\,cm$. Значи, должината на страната на квадратот $ABCD$ е $a=2\cdot 12=24\,cm$. Според тоа периметарот на квадратот $ABCD$ е

$$L=4a=4\cdot 24=96\,cm,$$

а неговата плоштина е

$$P=a\cdot a=24\cdot 24=576\,cm^2.$$

Втор начин. Нека едното теме на квадратот е $C(8,2)$, а пресекот на неговите дијагонали е $S(2,-4)$. Квадратот е осносиметрична фигура во однос на симетралите на своите страни и централно симетрична фигура во однос на пресекот на неговите дијагонали. На долниот цртеж во правоаголен координатен систем се нацртани точките C и S.



Координатите на преостанатите три темиња се $A(-4,-10), B(8,-10)$ и $D(-4,2)$. Должината на неговата страна е $8-(-4)=12$ единечни отсечки, односно $a=12\cdot 2=24\,cm$. Според тоа, периметарот на квадратот $ABCD$ е

$$L=4a=4\cdot 24=96\,cm,$$

а неговата плоштина е

$$P=a\cdot a=24\cdot 24=576\,cm^2.$$

4. Во правоаголен координатен систем се дадени точките $A(1,5)$, $B(9,5)$ и $C(1,k)$,при што отсечките AB и AC имаат еднакви должини. Ако D е симетричната точка на точката B во однос на апсцисната оска, определи ја плоштината на четириаголникот $CDBA$.

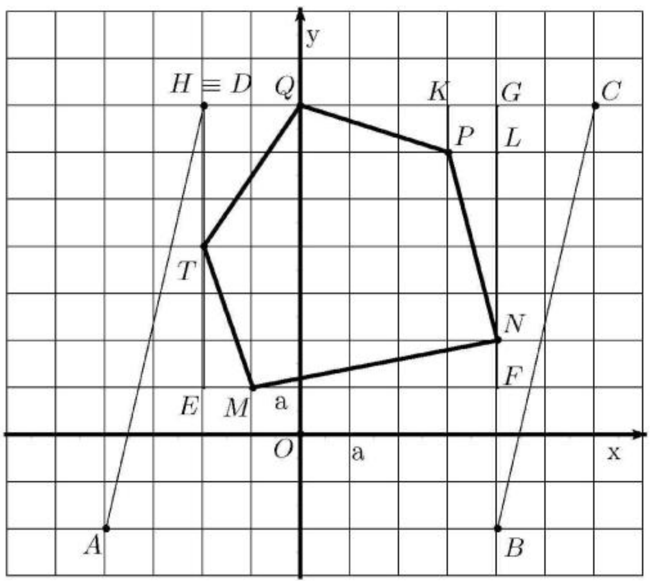
Решение. Бидејќи отсечките AB и AC имаат еднакви должини, добиваме $9-1=5-k$, т.е. $k=-3$. Значи, $C(1,-3)$. Бидејќи точката D е симетричната точка на точката B во однос на апсцисната оска, таа има координати $D(9,-5)$. Конечно, четириагоникот $CDBA$ е трапез со плоштина $P_{CDBA}=\frac{\overline{AC}+\overline{BD}}{2}\cdot\overline{AB}=\frac{8+10}{2}\cdot 8=72$. (Направи цртеж!)

5. Во кординатен систем со единечна отсечка $a\,cm$ се дадени точки

M, N, P, Q, T како што е прикажано на долниот цртеж. Плоштината на петаголникот $MNPQT$ е $98\,cm^2$. Определи ја a и пресметај ја плоштината на четириаголникот чии темиња се точките: $A(-4a,-2a)$, $B(4a,-2a), C(6a,7a), D(-2a,7a)$.

Решение. Да го разгледаме квадратот $EFGH$ во кој е сместен петаголникот $MNPQT$ (види го цртежот). За плоштината на петаголникот $MNPQT$ имаме:

$$P_{MNPQT} = P_{EFGH} - (P_{TEM} + P_{MNF} + P_{NLP} + P_{PLGK} + P_{KPQ} + P_{QTH})$$
$$= 36a^2 - (\frac{3a^2}{2} + \frac{5a^2}{2} + \frac{4a^2}{2} + a^2 + \frac{3a^2}{2} + \frac{6a^2}{2})$$
$$= 36a^2 - \frac{23a^2}{2} = \frac{49a^2}{2},$$



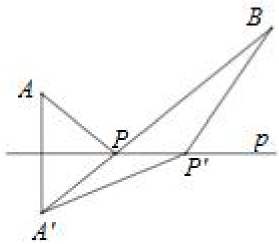
па затоа $\frac{49a^2}{2}98$, од каде добиваме $a^2 = 4$, т.е. $a = 2\,cm$.

Точките A и B, како и точките C и D имаат еднакви ординати, па затоа страните AB и CD се паралелни на апсцисната оска. Притоа важи $\overline{AB} = \overline{CD} = 8a = 16\,cm$, што значи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм. Неговата висина е $7a-(-2a) = 9a = 18\,cm$, па затоа $P_{ABCD} = 16 \cdot 18 = 288\,cm^2$.

6. Дадени се точки $A(0,4)$ и $B(-1,5)$. На правата $y = -x$ определи точка

P таква што збирот на должините на отсечките AP и BP ќе биде најмал.

Решение. Нека е дадена права p и точки A и B надвор од иста страна на правата p. Ќе докажеме дека збирот на должините на отсечките AP и BP е минимален ако $\{P\} = p \cap A'B$, каде A' е симетричната точка на точката A во однос на правата p. Нека $P' \neq P$ е точка од правата p. Тогаш од неравенството на триаголник и својствата на осната симетрија следува



$$\overline{AP'} + \overline{P'B} = \overline{A'P'} + \overline{P'B} > \overline{A'B} = \overline{A'P} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB}.$$

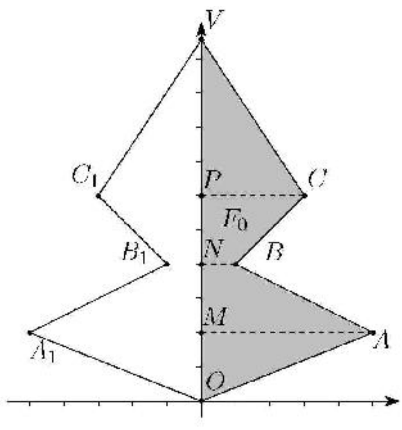
Да се вратиме на задачата. Точката симетрична на $A(0,4)$ во однос на правата $y = -x$ е $A'(-4,0)$. Равенката на правата $A'B$ е $y = \frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$, а нејзиниот пресек со правата $y = -x$ е $P(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

7. Точките A_1, B_1 и C_1 се симетрични во однос на ординатната оска соодветно на точките $A(5;2), B(1;4)$ и $C(3;6)$. Точката V припаѓа на ординатната оска и нејзината ордината е збир од аритметичките средини на координатите на секоја од точките A, B и C. Определи ја плоштината на многуаголникот $OABCVCC_1BC_1AC_1$, каде O е координатниот почеток на Декартовиот координатен систем.

Решение. Ординатата на точката V е еднаква на

$$\frac{5+2}{2} + \frac{1+4}{2} + \frac{3+6}{2} = \frac{21}{2} = 10,5,$$

т.е. $V(0;10,5)$. Фигурата Φ, чија плоштина треба да се пресмета, е симетрична во однос на ординатната оска, па затоа ќе ја пресметаме плоштината на фигурата Φ_0 со темиња O, A, B, C, V. Плоштината на Φ_0 е еднаква на збирот на плоштините на два триаголника и два трапеза. Ако $M(0;2), N(0;4), P(0,6)$, добиваме



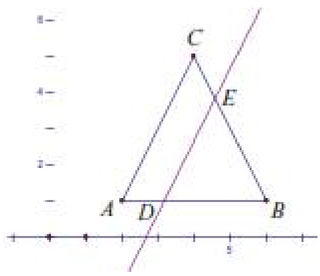
$$P_{OAM} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5, \; P_{MABN} = \frac{(5+1) \cdot 2}{2} = 6,$$

$$P_{NBCP} = \frac{(1+3) \cdot 2}{2} = 4, \; P_{PCV} = \frac{3 \cdot 4{,}5}{2} = 6{,}75$$

и затоа $P_{\Phi_0} = 5 + 6 + 4 + 6{,}75 = 21{,}75$. Конечно, $P_{\Phi} = 2P_{\Phi_0} = 43{,}5$.

8. Во координатна рамнина е даден рамнокрак $\triangle ABC$ со темиња $A(2,1)$, $B(6,1)$ и $C(4,5)$. Определи ги равенките на сите прави кои се паралелни со некој од краците и го делат триаголникот на два дела со еднакви плоштини.

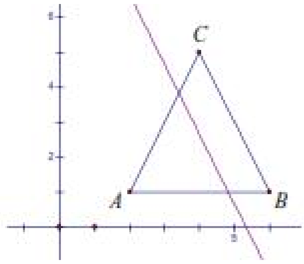
Решение. Нека правата е паралелна на кракот AC (цртеж десно). Правата го дели дадениот триаголник на трапез и рамнокрак триаголник. Од признакот АА следува дека $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ со коефициент на сличност k, а односот на плоштините е k^2. Плоштината на $\triangle ABC$ е два пати поголема од плоштината на $\triangle DBE$, па затоа $k^2 = 2$, т.е. $k = \sqrt{2}$. Од $\overline{AB} = 4$ и $k = \sqrt{2}$ следува $\overline{DB} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Според тоа, координатите на точката D се $D(6 - 2\sqrt{2}, 1)$.



Нека равенката на правата AC е $y = ax + b$. Бидејќи таа минува низ точките $A(2,1)$ и $C(4,5)$, добиваме дека $1 = 2a + b$ и $5 = 4a + b$. Го решаваме последниот систем и добиваме $a = 2, b = -3$. Значи, равенката на правата AC е $y = 2x - 3$. Бараната права е паралелна со правата AC, па затоа $a = 2$, и минува низ точката $D(6 - 2\sqrt{2}, 1)$. Значи, нејзината равенка е $y = 2x + b'$ и затоа важи $1 = 2(6 - 2\sqrt{2}) + b'$, од каде добиваме $b' = -11 + 4\sqrt{2}$.

Конечно, во овој случај равенката на правата е $y = 2x - 11 + 4\sqrt{2}$.

Аналогно се добива правата паралелна со кракот BC (цртеж десно). На потполно ист начин се добива дека оваа права минува низ точката $(2 + 2\sqrt{2}, 1)$. Равенката $y = ax + b$ на правата BC ја добиваме со решавање на системот равенки $1 = 6a + b$



и $5=4a+b$ и добиваме $a=-2, b=13$, т.е. $y=-2x+13$. Бараната права е паралелна со правата BC, па затоа $a=-2$, и минува низ точката $(2+2\sqrt{2},1)$. Значи, нејзината равенка е $y=-2x+b'$ и затоа важи $1=-2(2+2\sqrt{2})+b'$, од каде добиваме $b'=5+4\sqrt{2}$.

Конечно, во овој случај равенката на правата е $y=-2x+5+4\sqrt{2}$.

14. СТЕРЕОМЕТРИЈА

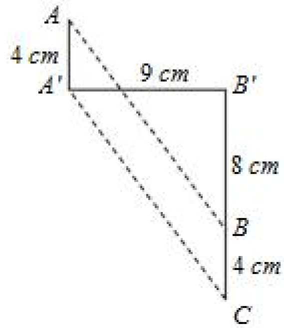
1. Паралелните прави a и b се разминувачки со правата c. Точките A, B, C припаѓаат соодветно на правите a, b, c. Кој е најголемиот можен број рамнини определен со овие три прави и три точки?
Решение. Најголемиот можен број рамнини е 6 и тоа:
$$\sim_1(a,b), \sim_2(a,C), \sim_3(b,C), \sim_4(A,c), \sim_5(B,c), \sim_6(A,B,C).$$

2. Марија се игра со модели на геометриски тела потопувајќи ги во сад во форма на квадар полн со вода. Таа има по еден модел на коцка, цилиндар и пирамида. Ако во садот ги стави коцката и цилиндарот, нивото на водата се подигнува за $5\,cm$ повеќе отколку ако ја стави само пирамидата. Ако во садот ги стави коцката и пирамидата, нивото на водата се подигнува дури за $10\,cm$ повеќе отколку ако го стави само цилиндарот. Кога во садот ќе ги стави пирамидата и цилиндарот, нивото на водата останува исто како и кога во садот ќе ја стави само коцката. За колку сантиметри ќе се подигне нивото на водата во садот ако Марија во него ги стави коцката, пирамидата и цилиндарот?
Решение. Нека k е зголемувањето на нивото на водата кога во садот со вода ќе се стави коцката, слично за цилиндарот c и за пирамидата p. Од условот на задачата следува
$$\begin{cases} k+c=p+5, \\ k+p=c+10, \\ p+c=k. \end{cases}$$
Ако ги собереме горните равенки, добиваме
$$k+c+k+p+p+c=p+15+c+k,$$
$$k+c+p=15.$$
Значи, ако Марија во садот истовремено ги стави коцката, цилиндарот и пирамидата, тогаш нивото на водата ќе се покачи за $15\,cm$.

3. Точките A и B се наоѓаат од различни страни на рамнината $\sim$. Точката A од рамнината $\sim$ е оддалечена $4\,cm$, а точката B од рамнината $\sim$ е оддалечена $8\,cm$. Определи ја должината на отсечката AB, ако

должината на нејзината ортогонална проекција на рамнината ~ е еднаква на $9\,cm$.

Решение. Ортогоналните проекции на точките A и B на рамнината ~ да ги означиме со A' и B', соодветно. Нека C е точка од правата BB' таква што $\overline{BC} = 4\,cm$ и $A'CBA$ е паралелограм (цртеж десно), Тогаш $\overline{AB} = \overline{A'C}$, па од Питагоровата теорема следува

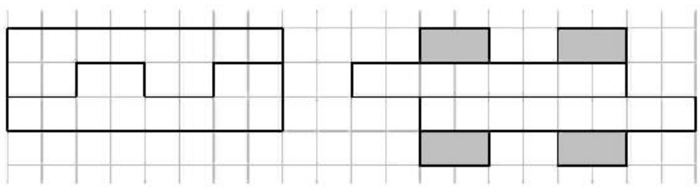


$$\overline{A'C} = \sqrt{\overline{A'B'}^2 + \overline{B'C}^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15\,cm.$$

4. Дали може правоаголник со димензии $4\,cm$ и $1{,}5\,cm$ да се расече на два дела, од кои може да се состави мрежа на коцка?

Решение. Плоштината на правоаголникот е $P = 4 \cdot 1{,}5 = 6\,cm^2$. Бидејќи коцката има 6 ѕида кои се еднакви квадрати, ако правоаголникот може да се расече на два дела така што од нив ќе се состави мрежа на коцка, тогаш плоштината на еден ѕид на коцката е еднаква на $6 : 6 = 1\,cm^2$. Значи, работ на коцката е еднаков на $1\,cm$.

Расекувањето на правоаголникот е прикажано на долниот лев цртеж, а составувањето на двата дела така што се добива мрежа на коцка со раб $1\,cm$ е прикажано на долниот десен цртеж.



5. Во аквариум во форма на коцка со раб $6\,dm$ е ставена коцка со раб $3\,dm$. Аквариумот е наполнет со вода, по што е извадена металната коцка. Определи ја висината на водата во аквариумот.

Решение. Волуменот на аквариумот е $V = 6^3 = 216\,dm^3$, а волуменот на металната коцка е $V' = 3^3 = 27\,dm^3$. Според тоа, во аквариумот има $216 - 27 = 189\,dm^3$ вода. Ако со x ја означиме висината на водата, добиваме $6^2 x = 189$, од каде наоѓаме $x = 5{,}25\,dm$.

6. Базен има форма на правоаголен паралелопипед со димензии $9\,m, 16\,m$ и $2\,m$. Базенот се полни од цевка, која има капацитет од $12\,m^3$ на час. За колку часа ќе се наполни базенот?

Решение. Волуменот на базенот е $9 \cdot 16 \cdot 2 = 288\,m^3$. Со брзина од $12\,m^3$ на час овој базен ќе се наполни за $288:12 = 24$ часа.

7. Илија расекол мермерна коцка со волумен $1\,m^3$ на помали коцки со волумен $1\,dm^3$ и добиените коцки ги наредил по должината на неговата градина така што направил патека широка $4\,dm$. Колку метри била долга градината на Илија?

Решение. При расекувањето на мермерната коцка со волумен $1\,m^3$ Илија коцката по должина, висина и ширина ја расекој на 10 делови, па така тој добил $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ коцки со волумен $1\,dm^3$. Бидејќи патеката била широка $4\,dm$, тој во секој ред ставал по 4 коцки, па така по должина патеката има $1000:4 = 250$ реда. Според тоа, градината на Илија била долга $250 \cdot 1\,dm = 250\,dm = 25\,m$.

8. Дрвен квадар со рабови 72 dm, 96 dm и 120 dm е поделен на еднакви коцки, со најголем раб, при што должината на работ е природен број. Добиените коцки се наредени една врз друга, во столб. Колку метри е висок така добиениот столб?

Решение. Должината на работ на делбените коцки е еднаква на $\text{NZD}(72, 96, 120) = 24\,dm$. Според тоа, рабовите на квадарот се поделени на $72:24 = 3, 96:24 = 4$ и $120:24 = 5$ делови, што значи дека квадарот е поделен на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ коцки. Конечно, висината на добиениот столб е еднаква на $60 \cdot 24 = 1440\,dm = 144\,m$.

9. Од паралелопипеди со димензии $4\,cm, 6\,cm$ и $2\,cm$ е составена коцка. Определи го најмалиот можен волумен на ваква коцка?

Решение. Волуменот на еден од дадените паралелопипеди е $4 \cdot 6 \cdot 2 = 48\,cm^3$. Ако должината на страната на дадената коцка е x и таа е составена од n паралелопипеди, тогаш $48n = x^3$, од каде следува дека $4|x$ $3|x$. Според тоа, $x \geq 12$ и тогаш добиваме $n=36$. Не е тешко да се конструира пример на коцка со составена 36 паралелопипеди. Имено, тоа може да се направи ако во еден ред ставиме во ширина 2 паралелопипеди и во должина 3 паралелопипеди така што висината ќе им биде $2\,cm$. Така имаме паралелопипед со димензии $12\,cm, 12\,cm$ и $2\,cm$ составен од $2 \cdot 3 = 6$ паралелопипеди, па доволно е да наредиме еден врз друг 6 вакви паралелопипеди со што ќе добиеме коцка со раб $12\,cm$. Јасно, волуменот на оваа коцка е еднаков на $12^3\,cm^3 = 1728\,cm^3$

10. Кутија има форма на правоаголен паралелопипед. Периметрите на три нејзини ѕида се $14\,cm, 10\,cm$ и $20\,cm$. Определи го волуменот на кутијата.

    Решение. Ако рабовите на паралелопипедот се a,b,c, тогаш важи $2a+2b=14, 2b+2c=10$ и $2c+2a=20$. Значи, $a+b=7, b+c=5$ и $a+c=10$. Ако ги собереме последните три равенки и добиената равенка ја поделиме со 2, наоѓаме $a+b+c=11$. Сега, лесно се добива дека $a=6\,cm, b=1\,cm, c=4\,cm$. Значи, волуменот на кутијата е $V=abc=6 \cdot 1 \cdot 4 = 24\,cm^3$.

11. Должините на рабовите на правоаголен паралелопипед, изразени во сантиметри, се три последователни природни броеви. Волуменот на паралелопипедот и збирот на должините на трите различни раба се изразени со еден ист број. Кој е тој број?

    Решение. Нека должините на рабовите на паралелопипедот се $a-1, a, a+1$. Тогаш од условот на задачата следува дека

    $$a(a-1)(a+1) = a-1+a+a+1, \text{ т.е. } a(a^2-1) = 3a.$$

    Но, $a \neq 0$, па од последната равенка следува $a^2-1=3$, т.е. $a = 4$. Според тоа, $a=2$ и бараниот број е $3a=6$.

12. Фирма произведува комплети од 12 еднакви коцки со должина на раб $5\,cm$. Коцките од секој комплет треба да се спакуваат во картонска кутија во форма на паралелопипед. Колкава е најмалата плоштина на кутија за пакување на еден комплет?

    Решение. Од 12 единечни коцки може да се наредат паралелопипедите: $1\times1\times12,\ 1\times2\times6,\ 1\times3\times4,\ 2\times2\times3$ чии плоштини соодветно се:

$$2\cdot(1\cdot1+1\cdot12+1\cdot12)=50\ cm^2,$$
$$2\cdot(1\cdot2+1\cdot6+2\cdot6)=40\ cm^2,$$
$$2\cdot(1\cdot3+1\cdot4+3\cdot4)=38\ cm^2,$$
$$2\cdot(2\cdot2+2\cdot3+2\cdot3)=32\ cm^2.$$

Бидејќи коцките имаат раб $5\,cm$, плоштината на секоја кутија за пакување ќе биде $5\cdot5=25$ пати поголема и соодветно плоштините ќе бидат $1250\ cm^2$, $1000\ cm^2$, $950\ cm^2$, $800\ cm^2$. Значи, најмалата плоштина на кутија за пакување на еден комплет е $800\ cm^2$.

13. Аквариум има форма на правоаголен паралелопипед со висина $5\,dm$, а основата му е квадрат. Колу литри собира аквариумот ако околната површина е со плоштина $0,6\ m^2$?

    Решение. Плоштината на еден околен ѕид е $0,6:4=0,15\ m^2=15\ dm^2$. Според тоа, должината на страната на основата е $15:5=3\ dm$. Значи, волуменот на аквариумот е $V=3\cdot3\cdot5=45\ dm^3$. Конечно, аквариумот собира 45 литри вода.

14. Од три дрвени коцки е составен правоаголен паралелопипед со волумен $375\ cm^3$. Определи ја плоштината на овој паралелопипед.

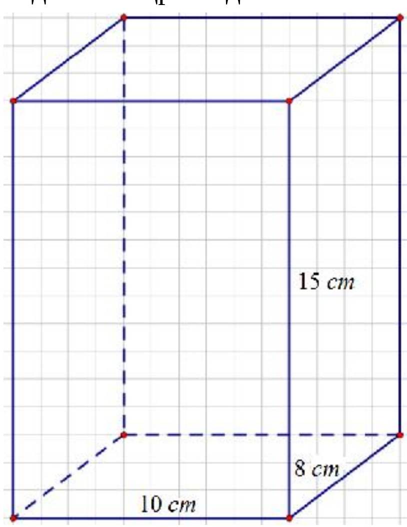
    Решение. Волуменот на една коцка е еднаков на $375:3=125\ cm^3$. Ако должината на работ на коцката е $a\ cm$, тогаш $a\cdot a\cdot a=125$. Бидејќи $125=5\cdot5\cdot5$, наоѓаме $a=5\ cm$. Значи, должините на рабовите на паралелопипедот се $5\ cm, 5\ cm$ и $15\ cm$. Конечно, плоштината на паралелопипедот е $P=2\cdot(5\cdot5+5\cdot15+5\cdot15)=350\ cm^3$.

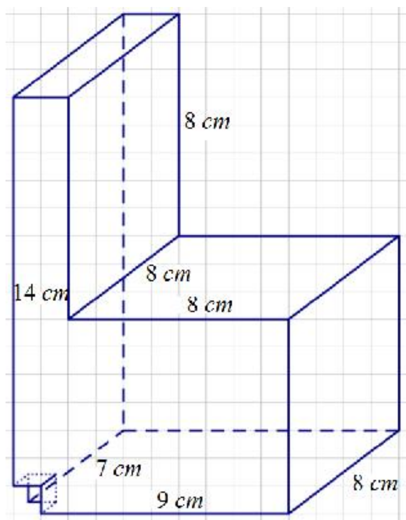
15. Андреј и Горјан направиле картонски кутии во форма на правоаголни паралелопипеди. Дното на кутијата на Андреј е квадрат со страна $4\,cm$, а дното на кутијата на Горјан е квадрат со страна $5\,cm$. Кутијата на Андреј е висока $5\,cm$ и има иста околна плоштина како кутијата на Горјан. Кое момче направило кутија со поголем волумен?

Решение. Кутијата на Андреј има околна плоштина $4\cdot4\cdot5=80\,cm^2$. Нека висината на кутијата на Горјан е h. Тогаш околната плоштина на кутијата е $4\cdot5h=20h$, па затоа $20h=80$, т.е. $h=4\,cm$. Значи, волуменот на кутијата на Андреј е $V=4\cdot4\cdot5=80\,cm^3$, а волуменот на кутијата на Горјан е $V\,'=5\cdot5\cdot4=100\,cm^3$. Според тоа, Горјан направил кутија со поголем волумен.

16. Должините на рабовите на дрвен квадар се $8\,cm, 10\,cm$ и $15\,cm$. Од две негови темиња е исечена по една коцка чии должини на рабови се природни броеви изразени во сантиметри. Прво од квадарот е исечена една коцка со најголем можен волумен, а потоа е исечена една коцка со најмал можен волумен. Колкав процент од волуменот на квадратот е исечен?

Решение. На долниот цртеж лево е прикажан дадениот квадар. Бидејќи должините на рабовите на исечените коцки се природни броеви, добиваме дека исечената коцка со најголем можен волумен има раб долг $8\,cm$, а исечената коцка со најмал можен волумен има раб долг $1\,cm$. Еден од повеќето можни начини на сечење е прикажан на долниот цртеж десно.





Волуменот на квадарот е $V=8\cdot10\cdot15=1200\,cm^3$. Волуменот на коцката со најголем можен волумен е $V_1=8^3=512\,cm^3$, а волуменот на коцката со најмал можен волумен е $V_2=1^3=1\,cm^3$. Според тоа, волуменот на исечениот дел е $V' = V_1 + V_2 = 513\,cm^3$. Значи, од квадарот се исечени $\frac{V'}{V} \cdot 100\% = \frac{513}{1200} \cdot 100\% = 42,75\%$.

17. Должините на страните на еден квадар изразени во сантиметри се различни природни броеви, а неговиот волумен е еднаков на $70\,cm^3$. Колкава е најголемата можна плоштина на овој квадар?

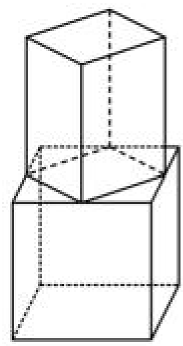
Решение. Од $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ следува дека должините на рабовите на квадарот, изразени во сантиметри, може да бидат: 2, 5 и 7; или 1, 7, 10, или 1, 5, 14; или 1, 2, 35, па соодветните плоштини се:

$$2 \cdot (2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 7) = 118,$$
$$2 \cdot (1 \cdot 7 + 1 \cdot 10 + 7 \cdot 10) = 174,$$
$$2 \cdot (1 \cdot 5 + 1 \cdot 14 + 5 \cdot 14) = 178,$$
$$2 \cdot (1 \cdot 2 + 1 \cdot 35 + 2 \cdot 35) = 214.$$

Според тоа, квадарот со должини на страни $1\,cm, 2\,cm, 35\,cm$ има најголема можна плоштина од сите квадари со волумен $70\,cm^3$ и таа плоштина е еднаква на $214\,cm^2$.

18. На коцка со раб долг $10\,cm$ е поставена правилна четиристрана призма така што темињата на основата се средините на рабовите на еден од ѕидовите на коцката. Определи го волуменот на добиеното тело ако висината на призмата е еднаква на работ на коцката.

Решение. Основата на призмата е квадрат, чија страна согласно Питагоровата теорема е долга $5\sqrt{2}\,cm$. Волуменот на коцката е



$$V' = 10^3 = 1000\,cm^3,$$

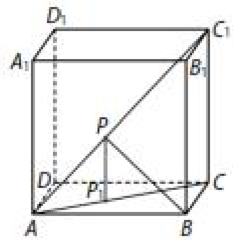
а волуменот на призмата е

$$V'' = 10 \cdot (5\sqrt{2})^2 = 500\,cm^3.$$

Конечно, волуменот на добиеното тело е

$$V = V' + V'' = 1000 + 500 = 1500\,cm^3.$$

19. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со должина на раб $1\,cm$. Точката P е на просторната дијагонала AC_1 и е таква што $BP \perp AC_1$. Определи ги плоштината и волуменот на пирамидата $ABCDP$.



Решение. Триаголникот ABC_1 е правоаголен со страни $\overline{AB}=1\,cm, \overline{BC_1}=\sqrt{2}\ cm$ и $\overline{AC_1}=\sqrt{3}\ cm$. Понатаму, BP е висина во овој триаголник, па затоа $\overline{BP}=\frac{\sqrt{6}}{3}\,cm$. Од Питагорвата теорема следува $\overline{AP}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,cm$. Нека P_1 е проекцијата на точката P на основата $ABCD$. Тогаш $P_1\in AC$, бидејќи AC_1 се проектира на AC. Понатаму, $\triangle AP_1P \sim \triangle ACC_1$, па затоа $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC_1}}=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{CC_1}}=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AC}}$. Оттука следува дека $\overline{PP_1}=\frac{1}{3}\,cm$ и $\overline{AP_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,cm$. Значи, волуменот на пирамидата е $V_{ABCDP}=\frac{1^2\cdot\frac{1}{3}}{3}=\frac{1}{9}\,cm^3$. Сега, од $\overline{AB}=\overline{AD},\ \ \overline{AP_1}=\overline{AP_1}$ и $\measuredangle BAP_1=\measuredangle DAP_1$ следува $\triangle AP_1B\cong\triangle DAP_1$ (признак САС), па затоа $\overline{BP_1}=\overline{DP_1}$. Но, од $\overline{BP_1}=\overline{DP_1},\ \ \overline{PP_1}=\overline{PP_1}$ и $\measuredangle BP_1P=\measuredangle DP_1P$ следува $\triangle BP_1P\cong\triangle DP_1P$ (признак САС), па затоа $\overline{BP}=\overline{DP}$. Оттука, според признакот ССС се складни и правоаголните триаголници ABP и ADP, па затоа $P_{ABP}=P_{ADP}=\frac{\sqrt{2}}{6}\,cm^2$. Понатаму, според признакот ССС важи $\triangle BCP\cong\triangle DCP$. Бидејќи $\overline{CP_1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\,cm$, од Питагоровата теорема следува $\overline{CP}=\sqrt{\overline{CP_1}^2+\overline{PP_1}^2}=1\,cm$. Според тоа, триаголниците BCP и DCP се рамнокраки со страни $\frac{\sqrt{6}}{3}\,cm, 1\,cm, 1\,cm$, па затоа нивната плоштина е $\frac{\sqrt{5}}{6}\,cm^2$. Конечно, за плоштината на пирамидата $ABCDP$ добиваме $P_{ABCDP}=\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}\,cm^2$.

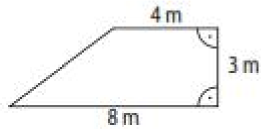
20. Основата на права призма е правоаголен триаголник со катети $3\,cm$ и $4\,cm$. Ако плоштината на омотачот на призмата е еднаква на $72\,cm^2$, определи го волуменот на оваа призма.

Решение. Должината на хипотенузата на основата е еднаква на $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5\,cm$. Ако h е висината на призмата, тогаш плоштината на омотачот на пирамидата е $M=(3+4+5)h=12h$, па затоа

$72 = 12h$, т.е. $h = 6\ cm$. Плоштината на основата на призмата е $B = \frac{3\cdot 4}{2} = 6\ cm^2$. Конечно, волуменот на призмата е

$$V = Bh = 6\cdot 6 = 36\ cm^3.$$

21. За основа на бетонски столб кој има форма на права призма, треба да се ископа дупка длабока $1,5\ m$ (основата е прикажана на цртежот десно). За колку часови дупката ќе ја ископаат три работници ако секој од нив копа по $0,75\ m^3$ на час.



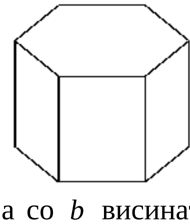
Решение. Волуменот на дупката е еднаков на $\frac{8+4}{2}\cdot 3\cdot 1,5 = 27\ m^3$. Тројцата работници за еден час копаат по $3\cdot 0,75 = 2,25\ m^3$ земја. Значи, целата дупка ќе ја ископаат за $27 : 2,25 = 12$ часови.

22. Основата на права четиристрана призма е ромб со должина на страна $12\ cm$ и остар агол 60°. Определи го волуменот на оваа призма ако нејзината висина е еднаква на половина од подолгата дијагонала на основата.

Решение. Подолгата дијагонала d_1 на основата на призмата два пати е подолга од должината на висината на рамностран триаголник со страна $12\ cm$, т.е. $d_1 = 2\cdot\frac{12\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}\ cm$, а пократкатa дијагонала е еднаква на должината на страната на ромбот, т.е. $d_2 = 12\ cm$. Според тоа, висината на призмата е $H = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ cm$, па затоа волуменот на призмата е

$$V = BH = \frac{d_1 d_2}{2}H = \frac{12\sqrt{3}\cdot 12}{2}\cdot 6\sqrt{3} = 1296\ cm^3.$$

23. Периметарот на основата на правилна шестстрана призма е за 20% поголем од периметарот на еден од ѕидовите на омотачот. Плоштината на омотачот на призмата е $225\ cm^2$. Определи го волуменот на оваа призма.



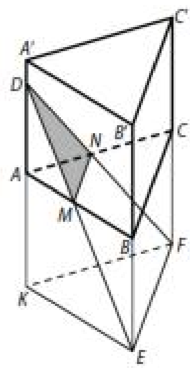
Решение. Со a да го означиме работ на основата, а со b висината призмата. Тогаш периметарот на основата е еднаков на $6a$, а периметарот на еден ѕид на омотачот е еднаков на $2a+2h$. Според тоа, $6a=1,2(2a+2h)$, од каде добиваме $h=1,5a$. Плоштината на омотачот на пирамидата е еднаква на $6ah$, па затоа $6ah=225$, од каде добиваме $6a\cdot 1,5a=225$, односно $a^2=25$, т.е. $a=5\,cm$. Значи,

$$h=1,5a=7,5\,cm.$$

Волуменот на призмата е

$$V=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}h=\frac{1125\sqrt{3}}{4}\,cm^2.$$

24. Дадена е правилна тристрана призма $ABCA'B'C'$. Нека D е точка на работ AA' таква што $\overline{AD}:\overline{DA'}=4:1$. Нека E и F се точките осно-симетрични на темињата B' и C' во однос на правата BC. Во кој однос рамнината DEF го дели волуменот на призмата.



Решение. Нека a е основниот раб, а H е висината на призмата $ABCA'B'C'$. Волуменот на призмата $ABCA'B'C'$ е $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}H$. Рамнината DEF ја дели призмата $ABCA'B'C'$ на два дела, од кои едниот е тристраната пирамида $DAMN$ (цртеж десно). Нека K е точка на правата AA' симетрична на точката A' во однос на точката A. Тогаш триаголниците ABC и KEF се складни. Нека отсечките DE и DF ги сечат рабовите AB и AC соодветно во точките M и N. Триаголниците DKE и DAM се слични (имаат заеднички агол во темето D, а аглите во темињата A и K се прави агли). Понатаму, триаголникот AMN е рамностран и неговата страна да ја означиме со x. Сега $a:x=\overline{KD}:\overline{AD}$, односно $a:x=(\frac{9}{5}H):(\frac{4}{5}H)$, па затоа $x=\frac{4}{9}a$. Значи, волуменот на пирамидата $DAMN$ е

$$V_1=\frac{(\frac{4}{9}a)^2\sqrt{3}}{4}\frac{\frac{4}{5}H}{3}=\frac{16}{1215}a^2H\sqrt{3},$$

а волуменот на остатокот од призмата е

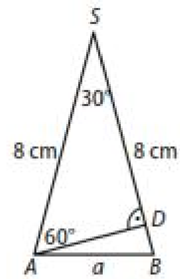
$$V_2=V-V_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H-\frac{16}{1215}a^2H\sqrt{3}=\frac{1151}{4860}a^2H\sqrt{3}.$$

Конечно, бараниот однос е $V_1:V_2=64:1151$.

25. Бочниот ѕид на правилна тристрана пирамида е рамнокрак триаголник

со агол при врвот еднаков на 30°. Должината на бочниот раб е еднаква на $8\,cm$. Пресметај ја плоштината на пирамидата.

Решение. Со a да го означиме основниот раб на пирамидата $ABCS$. Нека D е подножјето на висината повлечена кон страната BS на рамнокракиот триаголник ABS. Тогаш ADS е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{AD} = \frac{\overline{AS}}{2} = 4\,cm$. Понатаму, DS е висина во рамностран триаголник со страна $\overline{AS} = 8\,cm$, па затоа $\overline{DS} = 4\sqrt{3}\,cm$. Сега, ја применуваме Питагоровата теорема на триаголникот ABD и добиваме



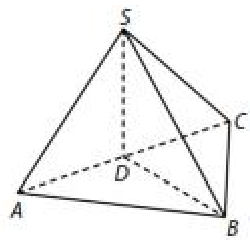
$$a^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 4^2 + (8-4\sqrt{3})^2 = 64(2-\sqrt{3})\,cm^2.$$

Конечно, за плоштината на пирамидата добиваме

$$\begin{aligned} P = M + B &= 3\frac{\overline{BS}\cdot\overline{AD}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ &= 3\cdot\frac{8\cdot 4}{2} + \frac{64(2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{4} \\ &= 48 + 32\sqrt{3} - 48 = 32\sqrt{3}\,cm^2. \end{aligned}$$

26. Основата на тристрана пирамида $ABCS$ е рамнокрак правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето B, а врвот S со нормална проекција на рамнината на основата се проектира во точката D, која е средина на работ AC. Ако бочниот ѕид ACS е правоаголен триаголник со прав агол во темето S и $\overline{SD} = \sqrt{2}\,cm$, пресметај ја плоштината на пирамидата $ABCS$.

Решение. Точката S припаѓа на симетралата на страната AC во триаголникот ACS, па затоа $\overline{AS} = \overline{CS}$. Според тоа, триаголникот ACS е рамнокрак правоаголен, што значи дека триаголниците ACS и ABC се складни и плоштината на секој од нив е еднаква на $\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} =$ $2\,cm^2$. Триаголниците SDC и SDB се рамнокраки правоаголни, па од Питагоровата теорема следува $\overline{SC} = \overline{SB} = \overline{SA} = \overline{BC} = \overline{BA} = 2\,cm$. Значи, триаголниците ABS и BCS се рамнострани и нивните плоштини се

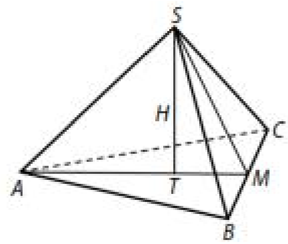


еднакви на $\sqrt{3}\,cm^2$.

Конечно, плоштината на пирамидата е $2(2+\sqrt{3})\,cm^2$.

27. Основниот раб на правилна тристрана пирамида е со должина x, а бочниот ѕид зафаќа со рамнината на основата агол од 60°. Определи го x ако мерниот број на плоштината на пирамидата е еднаков на мерниот број на волуменот на пирамидата.

Решение. Аголот меѓу бочниот ѕид и основата е аголот меѓу висината на бочниот ѕид и соодветната висина на пирамидата, односно е еднаков на $\measuredangle SMT$, каде $\overline{SM}=H$ е висината на пирамидата, а T е тежиштето на основата на пирамидата. Од $\measuredangle MST=30^\circ$



следува $\overline{SM}=2\overline{TM}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{x\sqrt{3}}{3}$ и $H^2=\overline{SM}^2-\overline{TM}^2=\frac{x^2}{4}$, односно $H=\frac{x}{2}$. Плоштината на пирамидата е

$$P=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{3}\cdot x=\frac{3x^2\sqrt{3}}{4},$$

а нејзиниот волумен е

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{x^3\sqrt{3}}{24}.$$

Конечно, од $P=V$ следува $\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{x^3\sqrt{3}}{24}$, од каде добиваме $x=18$.

28. Во сад во форма на квадар има $1,2\,l$ млеко. Висината на млекото во квадарот е $24\,cm$. Ако може да се постави да лежи на вториот ѕид, висината на млекото ќе се намали за 75%, а ако може да се постави да лежи на третиот ѕид, висината на млекото ќе се намали уште за 12,5%.

а) Колку млеко треба да се налее за да се дополни квадарот?

б) Дали млекото ќе прелее, ако во садот се стави метален цилиндар со најголем можен волумен?

Решение. а) Ако рабовите на квадарот се a,b и c, тогаш

$$2,4ab=1,2 \quad\Rightarrow\quad ab=0,5;$$

$$2,4bc\frac{25}{100}=1,2 \quad\Rightarrow\quad bc=2;$$

$$2,4ca\frac{12,5}{100}=1,2 \quad\Rightarrow\quad ca=4;$$

па затоа

$$(abc)^2 = (ab)(bc)(ca) = 0,5 \cdot 2 \cdot 4 = 4 = 2^2,$$

односно $abc = 2\ dm^3$. Значи, за да се дополни садот треба да се дотури уште $2 - 1,2 = 0,8\ l$ млеко.

б) Од равенствата $abc = 2, ab = 0,5, bc = 2, ca = 4$, добиваме $a = 1dm$, $b = 0,5\ dm$ и $c = 4\ dm$.

Ако основата на цилиндарот со најголем можен волумен се постави на ѕидот со рабови $1\,dm$ и $0,5\,dm$, тогаш радиусот на основата ќе биде $r = 0,5 : 2 = 0,25\ dm$, а висината на цилиндарот ќе биде $h = c = 4\ dm$. Волуменот на овој цилиндар ќе биде

$$V = \pi r^2 h = 0,25\pi \approx 0,785\, l < 0,8\, l,$$

па затоа млекото нема да прелее.

Во вториот случај имаме ѕид со рабови $1\,dm$ $4\,dm$, па затоа важи $r' = 1 : 2 = 0,5\ dm$ и $h' = b = 0,5\ dm$. Значи,

$$V' = \pi r'^2 h' = 0,125\pi < 0,25\pi = V.$$

Во третиот случај имаме имаме ѕид со рабови $0,5\,dm$ $4\,dm$, па затоа важи $r'' = 0,5 : 2 = 0,25\ dm$ и $h'' = a = 1\ dm$, па е

$$V' = \pi r'^2 h' = 0,0625\pi < 0,25\pi = V.$$

Значи, и во овие случаи млекото нема да прелее.

29. Две свеќи со цилиндрична форма имаат еднаков волумен. Едната свеќа има дијаметар $6\,cm$ и висина $8\,cm$. Колку е висока другата свеќа, ако нејзиниот дијаметар е $4\,cm$.

Решение. Радиусот на првата свеќа е $3\,cm$, па затоа нејзиниот волумен е $\pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi\ cm^3$. Радиусот на втората свеќа е $2\,cm$ и ако нејзината висина е h, тогаш таа има волумен $\pi \cdot 2^2 h = 4\pi h$. Според тоа, $4\pi h = 72\pi$, од каде добиваме $h = 18\ cm$.

30. Срцето ја пумпа крвта во аортата, чиј внатрешен радиус е $1,2\,cm$. Аортата се разгранува на 32 главни артерии. Ако брзината на крвта во аортата е $25\,cm/s$, определи ја брзината на крвта во 32-те главни артерии. Крвта не го менува волуменот и внатрешниот радиус на секоја главна артерија е $0,2\,cm$.

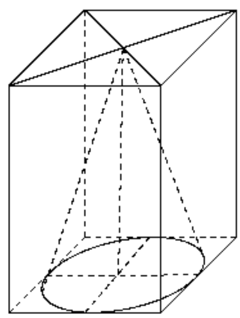
Решение. За една секунда низ аортата минува волумен на крв еднаков на волуменот на цилиндар со радиус $1,2\,cm$ и висина $25\,cm$, односно $1,2^2 \cdot 25® \; cm^3$. Оваа крв се дели во 32 артерии со радиус $0,2\,cm$. Ако брзината на крвта во артериите е x, добиваме $1,2^2 \cdot 25® = 0,2^2 \cdot x®$, од каде наоѓаме $x = 28,125\,cm/s$.

31. Бочната површина на еден конус е полукруг со дијаметар $12\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на овој конус.

Решение. Бидејќи бочната површина на конусот е полукруг со дијаметар $12\,cm$, добиваме дека изводницата на конусот е $s = 6\,cm$, а плоштината на бочната површина е $M = \frac{1}{2} \cdot 6^2® = 18®$. Од друга страна, ако радиусот на основата на конусот е r, тогаш $M = ®rs = 6®r$. Значи, $18® = 6®r$, па затоа $r = 3\,cm$. Конечно, плоштината на конусот е $P = ®r(r+s) = 3 \cdot 9® = 29® \; cm^2$.

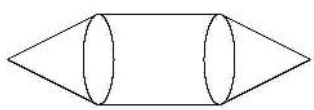
За висината на конусот имаме $h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}\,cm$, па затоа неговиот волумен е $V = \frac{®r^2h}{3} = 9\sqrt{3}® \; cm^3$.

32. Прав кружен конус е поставен во правилна четириаголна призма како што е прикажано на цртежот десно. Волуменот на призмата е еднаков на $60\,cm^3$. Определи го волуменот на конусот.



Решение. Нека радиусот на основата на конусот е r и неговата висина е H. Тогаш основата на висината е со раб $2r$ и висината на призмата е H. Оттука следува дека волуменот на примидата е $V = (2r)^2 H$, па затоа важи $(2r)^2 H = 60$, т.е. $r^2 H = 15$. Конечно, за волуменот на конусот добиваме $V' = \frac{1}{3}®r^2 H = \frac{1}{3} \cdot 15® = 5® \; cm^3$.

33. Картонски круг со радиус $12\,cm$ е поделен по еден негов дијаметар. Секој од добиените делови со селотејп е залепен во



конус без основа така што картонот не се препокрива. На ист начин конусите се залепени за цилиндар, како што е прикажано на цртежот десно. Ако волуменот на цилиндарот е еднаков на $180\text{®}\ cm^3$. Опре-дели ја плоштината на ова тело.

Решение. Плоштината на кругот е $12^2\text{®} = 144\text{®}\ cm^2$, што значи дека плоштината на обиколката на еден конус е $72\text{®}\ cm^2$. Генератрисата на конусот е $12\ cm$ и ако со r го означиме радиусот на основата, добиваме $\text{®}rs = 72\text{®}$, од каде наоѓаме $12\text{®}r = 72\text{®}$, т.е. $r = 6\ cm$. Значи, радиусот на основата на конусите и цилиндарот е $r = 6\ cm$. Сега, ако висината на цилиндарот е h, за волуменот на цилиндарот добиваме $6^2 h\text{®} = 180\text{®}$, од каде добиваме $h = 5\ cm$. Конечно, плоштината на добиеното тело е $144\text{®} + 2 \cdot 5 \cdot 6\text{®} = 204\text{®}\ cm^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Dika, N. Skočić: Povezivanje geometrijskih zadataka sa zbrojevima, Matka 18/72, Zagreb
2. M. Mitrović, S. Ognjanović, M. Veljković, Lj. Petković, N. Lazarević> Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd, 1998
3. P. Mladinić: Mozgalice sa likovima u ravni, Matka 28/110, Zagreb
4. P. Mladinić: Mozgalice sa pravokutnicima, Matka 27/107, Zagreb
5. V. Stošić: Četir točke kružnice, Matka 18/69, Zagreb
6. V. Stošić: Kutovi i kružnica, Matka 18/71, Zagreb
7. Ž. Brčić: Opseg i površina su „jednaki“, Matka 18/69, Zagreb
8. Z. Lobor: Trokut, četvorokut i krug 1, Matka 31/121
9. Z. Lobor: Trokut, četvorokut i krug 2, Matka 31/122
10. Г. Тренчевски, К. Тренчевски: Математика 7 одделение, Просветно дело, Скопје
11. Г. Тренчевски, К. Тренчевски: Математика 8 одделение, Просветно дело, Скопје
12. Г. Тренчевски: Геометрија за V одделение (трето издание), Просветно дело, Скопје, 1977
13. Г. Тренчевски: Геометрија за VI одделение (петто издание), Просветно дело, Скопје, 1980
14. Г. Тренчевски: Геометрија за VII одделение (петто дополнето издание), Просветно дело, Скопје, 1980
15. Г. Тренчевски: Геометрија за VIII одделение, Просветно дело, Скопје, 1978
16. К. Аневска: Неколку докази на Евклидовата теорема за катетата, Математички талент, Скопје, 2022
17. М. Попоска: Метод на плоштини, Математички талент, Скопје, 2022
18. М. Попоска: Правилен осумаголник, Математички талент, Скопје, 2022
19. Р. Малчески, В. Договска: Неравенства во правоаголен триаголник, Математички талент, Скопје 2021

20. Р. Малчески, К. Аневска: Неравенство на триаголник и неравенства во триаголник, Математички талент, Скопје, 2021
21. Р. Малчески, М. Доковска: Геометрија 2 (за гимназиско образование), Просветно дело, Скопје, 2002
22. Р. Малчески: Како да и помогнете на мува која не знае геометрија, Нумерус, Скопје
23. Р. Малчески: Како да и помогнете на мува која не знае геометрија (втор дел), Математички талент, Скопје, 2023
24. Р. Малчески: Како да и помогнете на мува која не знае геометрија (трет дел), Математички талент, Скопје, 2023
25. Р. Малчески: Ојлерова кружница, Математички талент, Скопје, 2021
26. Р. Малчески: Ојлерова права, Математички талент, Скопје, 2021
27. Р. Малчески: Правилен дванаесетаголник, Математички талент, Скопје, 2021
28. Р. Малчески: Признаци за паралелограми, Математички талент, Скопје, 2023
29. Р. Малчески: Примена на неравенствата меѓу средините во геометријата, Математички талент, Скопје, 2021
30. Р. Малчески: Теорема на Штајнер за трапез, Математички талент, Скопје, 2023