БМО 2004

1. Низата реални броеви $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ја задоволува релацијата
$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}, \text{ за секои } m, n \in \mathbb{N}, m \geq n.$$
Ако $a_1 = 3$, пресметај го a_{2004}.

Решение. *Прв начин*. За $m = n = 0$ добиваме $a_0 = 1$. Понатаму, за $n = 0$ добиваме $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$. Сега релацијата од условот на задачата го добива видот
$$a_{m+n} + a_{m-n} = 2(a_m + a_n - n - 1).$$
Оттука за $n-1$ добиваме $a_{m+1} - 2a_m + a_{m-1} = 2$, односно $b_m = b_{m-1} + 2$, за секој m, каде $b_m = a_{m+1} - a_m$. Од $b_0 = 2$, следува $b_m = 2m + 2$, па затоа
$$a_m = a_0 + b_0 + b_1 + \ldots + b_{m-1} = 1 + (2 + 4 + \ldots + 2m) = m^2 + m + 1,$$
т.е. $a_{2004} = 2004^2 + 2005$.

Втор начин. За $m = n = 0$ добиваме $a_0 = 1$. Понатаму, за $n = 0$ добиваме $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$. Понатаму, со индукција лесно се докажува дека $a_{2m} = (2m)^2 + 2m + 1$, па затоа $a_m = \frac{a_{2m}+2m+3}{4} = m^2 + m + 1$, за $m \in \mathbb{N}$. Непосредно се проверува дека оваа низа го задоволува словот на задачата. Затоа $a_{2004} = 2004^2 + 2005$

2. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$x^y - y^x = xy^2 - 19.$$

Решение. Од малата теорема на Ферма следува $x^y \equiv x \pmod{y}$, па од дадената равенка добиваме $x \equiv -19 \pmod{y}$, т.е. $y \mid x + 19$. Слично, со сведување по модул x добиваме $x \mid y - 19$. Бидејќи равенката нема решение за $x = y$, од овде следува дека $xy \mid x - y + 19$. Притоа $x - y + 19 = 0$ не е можно, бидејќи тогаш x мора да биде парен, т.е. $x = 2$, но тогаш $y = 21$ не е прост број. Значи,
$$xy \leq |x - y + 19| < x + y + 19, \text{ т.е. } (x-1)(y-1) < 20.$$
Останува да испитаме неколку случаи:

1) $x = 2, y \leq 19$;

2) $x = 3, y \leq 7$;

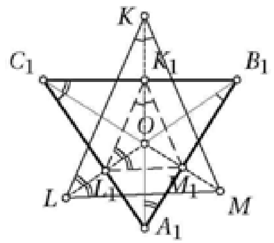
3) $y = 3, 5 \leq x \leq 7$ или

4) $y = 2, 5 \leq x \leq 19$.

Со непосредна проверка наоѓаме дека $(2,3)$ и $(2,7)$ се единствени решенија на дадената равенка.

3. Нека O е внатрешна точка на остроаголниот триаголник ABC. Кружниците со центри во средините на страните на триаголникот ABC кои минуваат низ точката O меѓусебно се сечат во точките K, L и M различни од O. Докажи дека O е центар на впишаната кружница на триаголникот KLM ако и само ако O е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC.

Решение. *Прв начин*. Со A_1, B_1, C_1 соодветно да ги означиме средините на страните BC, CA, AB. Втората пресечна точка K на кружниците $(B_1, \overline{B_1O})$ и $(C_1, \overline{C_1O})$ е симетрична на точката O во однос на B_1C_1 бидејќи $\overline{B_1K} = \overline{B_1O}$ и $\overline{C_1K} = \overline{C_1O}$. Аналогно L и M соодветно се симетрични на O во однос на C_1A_1 и A_1B_1. Средините K_1, L_1, M_1 на отсечките OK, OL, OM соодветно лежат на правите B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Да забележиме дека, ако O е надвор од $\triangle A_1B_1C_1$, тогаш O е надвор од $\triangle KLM$, па затоа не е центар на впишаната кружница во $\triangle KLM$, а не е ниту центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Затоа во натамошните разгледувања ќе претпоставиме дека точката O е внатре во $\triangle A_1B_1C_1$.



Точката O е центар на впишаната кружница во $\triangle KLM$ ако и само ако

$$\measuredangle OB_1A_1 = \measuredangle OK_1M_1 = \measuredangle OKM = \measuredangle OKL = \measuredangle OK_1L_1 = \measuredangle OC_1A_1$$

и слично $\measuredangle OA_1B_1 = \measuredangle OC_1B_1$ и $\measuredangle OA_1C_1 = \measuredangle OB_1C_1$, т.е. ако и само ако важи

$$\measuredangle OA_1B_1 = \measuredangle OC_1B_1,\ \measuredangle OA_1C_1 = \measuredangle OB_1C_1,\ \measuredangle OB_1A_1 = \measuredangle OC_1A_1. \qquad (1)$$

Ако O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, т.е. ортоцентар на $\triangle A_1B_1C_1$, тогаш важи (1), бидејќи на пример

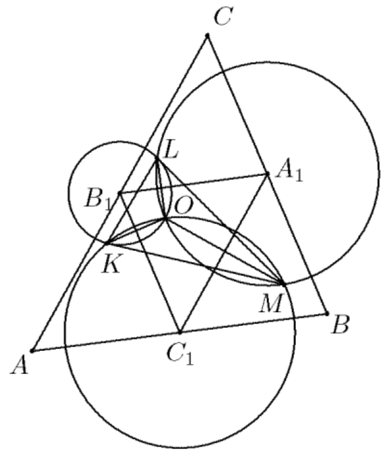
$$\measuredangle OA_1B_1 = \measuredangle OC_1B_1 = 90^\circ - \measuredangle A_1B_1C_1.$$

Од друга страна, ако важи (1), тогаш

$$\begin{aligned}\measuredangle B_1OC_1 &= 180^\circ - \measuredangle OB_1C_1 - \measuredangle OC_1B_1\\ &= 180^\circ - \measuredangle OA_1C_1 - \measuredangle OA_1B_1\\ &= 180^\circ - \measuredangle B_1A_1C_1\end{aligned}$$

и аналогно $\measuredangle C_1OA_1 = 180^\circ - \measuredangle C_1B_1A_1$, па затоа O е ортоцентар на $\triangle A_1B_1C_1$, т.е. O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Втор начин. Со A_1, B_1, C_1 соодветно да ги означиме средините на страните BC, CA, AB. Бидејќи заедничката тетива на две кружници е нормална на отсечката која ги поврзува центрите на кружниците и оваа отсечка ја полови заедничката тетива, заклучуваме дека средините K_1, L_1, M_1 соодветно на отсечките Ok, OL, OM се ортогонални проекции на O врз страните на $\triangle A_1B_1C_1$. Како што е познато, оттука следува дека точката O е ортоцентар на остроаголниот $\triangle A_1B_1C_1$, т.е. центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ ако и само ако е центар на впишаната кружница на $\triangle K_1L_1M_1$ (Докажи!). Од друга страна, хомотетијата со центар O и коефициент 2 го пресликува $\triangle K_1L_1M_1$ во $\triangle KLM$, па затоа O е центар на впишаната кружница во $\triangle K_1L_1M_1$ ако и само ако е центар на впишаната кружница во $\triangle KLM$. Со тоа задачата е решена.

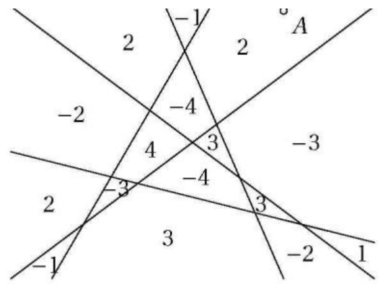


4. Рамнината е поделена на области со конечен број прави, такви што не постојат три прави кои минуваат низ иста точка. За две области ќе велиме дека се соседни ако нивната заедничка граница е отсечка, полуправа или права. Во секоја област е запишан цел број така што се исполенти следниве услови:
   1) производот на броевите во соседните области е помал од нивниот збир,
   2) збирот на сите броеви од секоја страна на произволна права е еднаков на нула.

   Докажи, дека тоа е можно ако и само ако сите прави не се паралелни.

   Решение. Ако сите прави се паралелни, тогаш од условот 2) следува дека сите броеви мора да бидат еднакви на нула, но тогаш не важи условот 1), па значи не е можно да се запишат цели броеви така што се исполенти условите 1) и 2).

   Сега ќе го конструираме бараното запишување на броевите при кое се исполнети условите 1) и 2). На почетокот во рамнината да фиксираме точка A која не лежи ниту на една од дадените прави. За произволна област R земаме точка B внатре во



областа. Јасно, бројот k_R на прави кои ја сечат отсечката AB не зависи од изборот на точката B. Освен тоа, за секои две соседни области R и S важи $k_R = k_S \pm 1$.

На областа R и го доделуваме бројот $u_R(-1)^{k_R}$, каде u_R е бројот на аглите на областа R (на пример, види цртеж). Ќе докажеме дека ова доделување на целите броеви ги задоволува условите на задачата.

1) По конструкција, броевите a и b доделени на две соседни области се со различен знак, да кажеме $a < 0 < b$, па затоа $ab \le a < a + b$.

2) Во секој агол на секоја област R го запишуваме бројот $(-1)^{k_R}$. Збирот на броевите во областите од една страна на права p е еднаков на збирот на броевите во сите агли на таа страна на правата. Бидејќи во секоја пресечна точка збирот на броевите во аглите (имаме 2 или 4 броја) е еднаков на 0, добиваме дека вкупниот збир исто така е еднаков на 0.