Tri zadatka o trapezu

STANKO PRVANOVIĆ, Beograd

Izložićemo rešenja tri konstruktivna zadatka koje učenici i studenti ili ne mogu rešiti ili rešavaju na vrlo zaobilazan, »neelegantan« način.

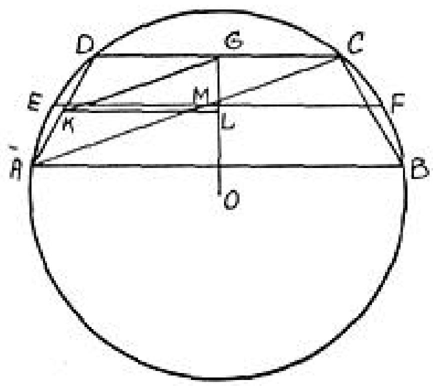
1. U datu kružnu liniju upisati trapez kome je data visina a jednak je datom kvadratu

1° Neka je duž PQ stranica datog kvadrata, HH' data visina, a MN zbir paralelnih stranica trapeza. Tada se iz

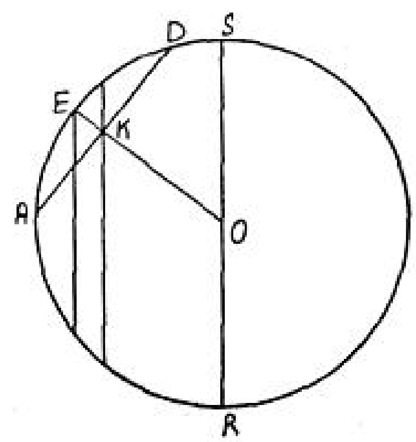
$$\frac{HH'}{2} \times MN = PQ \times PQ$$

t. j. iz proporcije $\frac{HH'}{2} : PQ = PQ : MN$ konstruiše duž MN na poznati način.

Prema tome, zadatak se svodi na konstrukciju jednakokrakog trapeza upisanog u datoj kružnoj liniji, kad su mu dati zbir paralelnih stranica i visina.



Sl. 1.



Sl. 2.

2° Neka je $ABCD$ (sl. 1.) traženi trapez. Povucimo OG kroz sredine njegovih paralelnih stranica a EF i KL paralelno tim stranicama pri čemu je E sredina luka AD a K sredina stranice AD. Tada je $KL = \frac{1}{4}(AB + CD) = \frac{1}{4}MN$ i, prema tome, poznata duž. Isto tako poznata je i duž GL (jer je jednaka polovini visine), pa, dakle, i GK (kao hipotenuza $\triangle KLG$).

Kako su lukovi AE i CF jednaki, to su jednaki i lukovi ADC i EDF. Iz toga sledi $AC = EF$, a samim tim i $EM = GK$ (jer je $EM = \frac{1}{2}EF$, a $KG = \frac{1}{2}AC$ kao srednja linija $\triangle ACD$).

3º Odatle sledi ova konstrukcija:

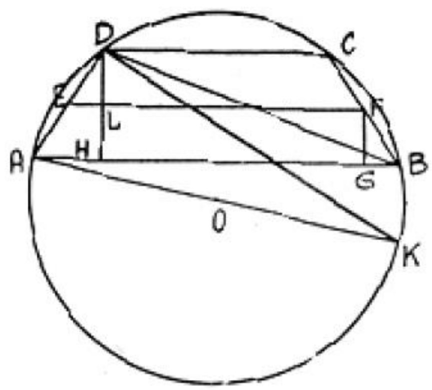
Paralelno proizvoljnom prečniku *RS* date kružne linije (sl. 2.) povući dve prave: jednu na otstojanju *GK*, drugu na otstojanju *KL*. Neka prva prava seče kružnu liniju u *E*, a druga neka seče *EO* u *K*. Kroz tačku *K* povući pravu normalu na *EO*. Ona seče kružnu liniju u *A* i *D*. *AD* je jedna neparalelna stranica traženog trapeza. — Dovrši konstrukciju!

2. U datu kružnu liniju upisati trapez kad su poznati zbir paralelnih stranica i krak

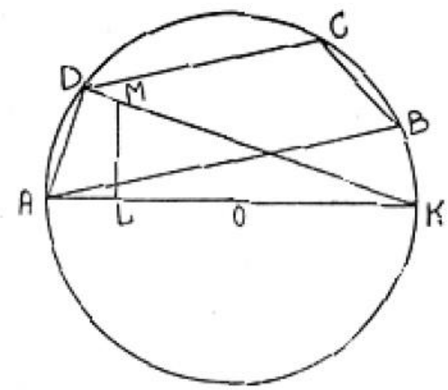
Neka je *ABCD* (sl. 3.) traženi trapez, *DH* njegova visina a *BD* dijagonala. Očigledno je da je duž *HB* jednaka poluzbiru neparalelnih stranica, jer je $\triangle DLE \cong \triangle FGB$.

Ugao *AKD* je poznat, jer je pravougli trougao *ADK* poznat. Samim tim poznat je i ugao *ABD* (jer zahvata isti luk *AD*), pa, dakle, i $\triangle ABD$.

Otuda ova konstrukcija trapeza (sl. 4.):



Sl. 3.



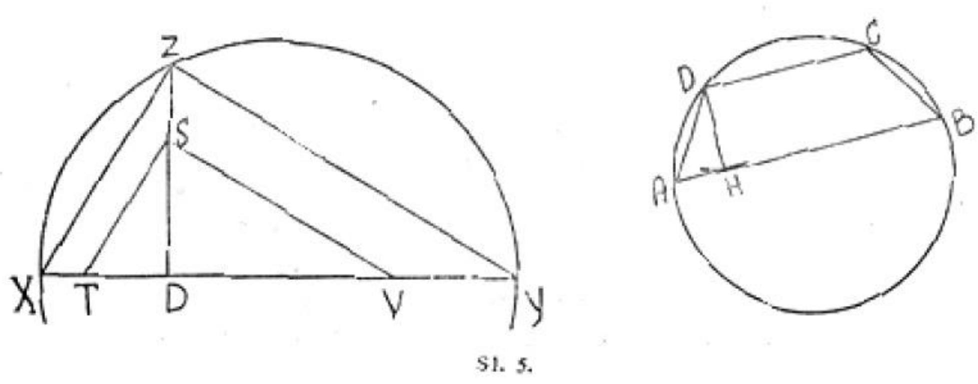
Sl. 4.

Otseći tetivu *AD* jednaku datom kraku. Odmeriti duž *KL* jednaku datom poluzbiru paralelnih stranica i kroz *L* povući normalu na *AK*. Ona seče *KD* u *M*, pa je *KM* jednaka dijagonali *BD*. Zato je dovoljno oko *D*, kao oko centra, opisati kružnu liniju poluprečnikom *KM*. Njen presek *B* s datom kružnom linijom pretstavlja treće teme traženog trapeza.

3. Dati su kvadrat, duž i kružna linija. Upisati trapez jednak datom kvadratu a čiji je krak jednak datoj duži

Neka je (sl. 3.) *ABCD* traženi trapez, *DH* njegova visina. Prema prethodnom zadatku *DK* je poznata duž. Kako su trougli *BHD* i *KDA* slični, imamo.

$$DH : HB = AD : DK$$



Sl. 5.

što znači da treba konstruisati duži DH i HB kad znamo njihovu razmeru i njihov proizvod, pretstavljen datim kvadratom čija stranica neka je PQ.

Te dve duži mogu se konstruisati ovako:

Konstruiše se $\Delta\ ADK$ (sl. 3. ili 4.). Povuče se (sl. 5.) duž $XY = AD + DK$ i nad njom, kao nad prečnikom, konstruiše se polukružna linija. U D (pri čemu je $XD = AD$) podigne se normala (na XY) koja seče polukružnu liniju u Z. Odmeri se $DS = PQ$ (stranici datog kvadrata) i povuku se ST i SV (respektivno) paralelno dužima ZX i ZY. Tada su DT i DV tražene duži DH i HB. (Zašto?)

Posle toga konstrukcija trapeza je jednostavna: Odmeri se tetiva AD jednaka datom kraku. Oko D, kao centra, opiše se kružna linija poluprečnikom DT, a iz A povuče se tangenta na tu kružnu liniju. Ta tangenta daje, u preseku sa kružnom linijom, treće teme trapeza.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математичко-физички лист на ДМФА на Хрватска 1959