БМО 2001

1. Нека n е природен број. Ако a и b се природни броеви поголеми од 1 и такви што $ab = 2^n - 1$, докажи дека бројот $ab-(a-b)-1$ е од видот $2^{2m}k$, каде k е непарен природен број, а m е природен број.

   Решение. *Прв начин*. Нека $a = 2^r a_1 - 1$ и $b = 2^s b_1 + 1$, каде a_1 и b_1 се непарни природни броеви и $r, s \geq 1$. Тогаш
   $$2^n - 1 = ab = (2^r a_1 - 1)(2^s b_1 + 1) = 2^{r+s} a_1 b_1 + 2^r a_1 - 2^s b_1 - 1,$$
   па затоа $2^r \mid 2^s b_1$ и $2^s \mid 2^r a_1$, што е можно ако и само ако $r = s$. Според тоа,
   $$ab-(a-b)-1 = (a+1)(b-1) = 2^{2r} a_1 b_1,$$
   каде $a_1 b_1$ е непарен природен број.

   Втор начин. За секој природен број c со $\deg_2(c)$ го означуваме најголемиот ненегативен цел број d за кој 2^d е делител на c. Бидејќи
   $$A = ab - a + b - 1 = (a+1)(b-1) > 0$$
   и a е непарен број добиваме
   $$\deg_2(A) = \deg_2((a+1)(b-1)a) = \deg_2((a+1)(2^n - a - 1)).$$
   Бидејќи $a+1 \in (0, 2^n)$ е парен, лесно се добива дека
   $$\deg_2(a+1) = \deg_2(2^n - (a+1)) > 0.$$
   Според тоа, $\deg_2(A) = 2\deg_2(a+1)$ е парен број, со што задачата е решена.

2. Конвексниот петаголник ги задоволува условите
   1) сите внатрешни агли се еднакви, и
   2) должините на сите страни се рационални броеви.

   Докажи дека петаголникот е правилен.

   Решение. *Прв начин*. Нека $A_1A_2A_3A_4A_5$ е дадениот петаголник и нека $\overline{A_iA_{i+1}} = a_i$, $(A_6 = A_1)$. Должините на проекцијата на петаголникот на правата нормална на страната A_1A_2 е еднаква на $a_2 \sin 72^\circ + a_3 \sin 36^\circ$, а исто така е еднаква и на $a_5 \sin 72^\circ + a_4 \sin 36^\circ$, па затоа
   $$a_4 - a_3 = 2(a_2 - a_5)\cos 36^\circ.$$
   Но, $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ е ирационален број, па затоа мора да важи $a_4 = a_3$. Аналогно се добива дека $a_4 = a_5 = a_1 = a_2$, што значи дека петаголникот е правилен.

   Втор начин. Нека петаголникот $A_1A_2A_3A_4A_5$ ги задоволува условите на задачата. Тогаш неговите агли се еднакви на 108°. Ако $C = A_1A_5 \cap A_2A_3$ и $D =$

$A_1A_5 \cap A_3A_4$, тогаш

$$\overline{A_1C} = \overline{A_2C} = \frac{\overline{A_1A_2}}{2\sin 18^\circ} \text{ и } \overline{A_4D} = \overline{A_5D} = \frac{\overline{A_4A_5}}{2\sin 18^\circ}.$$

Тогаш равенствата

$$\overline{CA_2} + \overline{A_2A_3} = \overline{CA_3} = \overline{DA_3} = \overline{DA_4} + \overline{A_4A_3},$$

покажуваат дека

$$\overline{A_2A_3} - \overline{A_4A_5} = 2\sin 18^\circ (\overline{A_4A_3} - \overline{A_2A_3}).$$

Бидејќи $\sin 3\cdot 18^\circ = \cos 2\cdot 18^\circ$, важи $0 = \cos 18^\circ (4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1)$, па затоа $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ и тоа е ирационален број. Значи, $\overline{A_2A_3} = \overline{A_4A_5}$ и $\overline{A_4A_3} = \overline{A_2A_3}$. Аналогно се докажува дека сите страни на петаголникот се еднакви, па затоа тој е правилен.

Забелешка. Познато е дека тврдењето на задачата е точно за произволен $p-$ аголник, каде $p \geq 3$ е прост број. Со помош на комплексни броеви, доказот се сведува на познатиот факт дека полиномот $x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$ не може да се претстави како производ на два неконстантни полиноми со целобројни коефициенти.

3. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a + b + c \geq abc$. Докажи, дека $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}$.

Решение. *Прв начин*. Прво од неравенстото меѓу аритметичката и квадратната средина, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата следува

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \tfrac{1}{9}(a+b+c)^4 \geq 3(\tfrac{a+b+c}{3})^3(a+b+c) \geq 3abc(a+b+c) \geq 3(abc)^2,$$

т.е. $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}$.

Втор начин. Нека претпоставиме дека $a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3}$. Тогаш од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3}.$$

Значи, $abc > 3\sqrt{3}$ и тогаш од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\frac{(abc)^2}{3} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3},$$

т.е. $abc < 3\sqrt{3}$, што е противречност.

4. Коцка со димензии $3\times 3\times 3$ е поделена на 27 складни единечни коцки (клетки). Една од добиените единечни клетки е празна, а во секоја од преостанатите се наоѓа единечна коцка означена со еден од броевите 1, 2, ..., 26 (секој од овие

броеви е доделен на точно една коцка). Дозволено е единечна коцка да се премести во соседна празна клетка (две клетки се соседни ако имаат заеднички ѕид). Дали може со помош на конечно многу дозволени потези единичните коцки да се распоредат така што коцките означени со броевите k и $27-k$ ги заменат местата, за секој $k \in \{1,2,...,13\}$?

Решение. Да ја означиме секоја непразна клетка со бројот на коцката која се наоѓа во неа, а празната клетка со 0. Така позицијата во секој чекор можеме да ја опишеме со некоја пермутација σ на множеството $\{0,1,2,...,26\}$, при што почетната позиција соодветствува на идентичната пермутација

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 25 & 26 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 25 & 26 \end{pmatrix}.$$

Во секој потез реализираме транспозиција $(0,x)$ за некој $x \neq 0$, т.е. елементите 0 и x ги менуваат местата. Секоја транспозиција ја менува парноста на пермутацијата (т.е. парноста на бројот парови (i,j) такви што $i<j$ и $\sigma(i)>\sigma(j)$). Бидејќи конечната пермутација $\sigma\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 26 & 26 \\ 0 & 26 & 25 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ е непарна (како производ на 13 транспозиции $(i,26-i)$), потребен е непарен број потези.

Од друга страна, ако клетките ги обоиме наизменично црно и бело, како кај шаховската табла, добиваме дека бојата на празната клетка се менува во секој потез. Така, таа по непарен број потези не може да биде во иста боја. Тоа значи, дека празната клетка не може да остане на истото место како во почетната позиција, со што добивме противречност.