Драгољуб Милошевиќ
Прањани

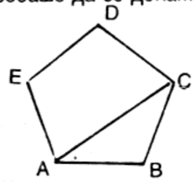
НЕКОИ ТЕОРЕМИ ВО ВРСКА СО ПРАВИЛНИОТ ПЕТАГОЛНИК

Познато ви е дека многуаголник (полигон) кај кој сите страни и сите агли се еднакви, се нарекува правилен многуаголник. Тука ќе стане збор за правилниот петаголник. Ќе дадеме неколку теореми во врска со него.

Теорема 1. Дијагоналите на правилниот петаголник се еднакви меѓу себе.

Доказ: Бидејќи триаголниците ABC, BCD, CDE, DEA и EAB се складни (правило САС) црт. 1, тогаш $\overline{AC} = \overline{BD} = \overline{CE} = \overline{DA} = \overline{EB}$, што требаше да се докаже.

Црт. 1



Црт. 2

Теорема 2. Секоја дијагонала го дели правилниот петаголник на еден рамнокрак триаголник и еден рамнокрак трапез.

Ќе докажеме дека дијагоналата AC правилниот петаголник ABCDE го дели на рамнокрак триаголник ABC и рамнокрак трапез ACDE црт. 2.

Доказ: Бидејќи $\overline{AB} = \overline{BC}$, следува дека триаголникот ABC (црт. 2) е еднаквокрак. Сега треба да се докаже дека AC е паралелна со ED, т.е. дека $\sphericalangle CAE = 180^0 - \sphericalangle AED$. Од рамнокракиот триаголник ABC следува дека $\sphericalangle BAC = (180^0 - 108^0):2 = 36^0$, па $\sphericalangle CAE = 72^0$. Според тоа, аглите $\sphericalangle CAE$ и $\sphericalangle AED$ се суплементни. Поради фактот што тие два агли имаат заеднички крак заклучуваме дека другите два крака се паралелни, т.е. AC II ED. Но бидејќи $\overline{AE} = \overline{CD}$, трапезот ACDE е рамнокрак. Со овој доказ теоремата 2 е окончана.

Теорема 3. Петаголник што има барем две оски на симетријата е правилен.

Доказ: Петаголникот ABCDE нека има две оски на симетријата (црт. 3). Секоја од нив минува низ едно од темињата и низ средината на спротивната страна. Ако едната од нив минува низ темето A и низ средината на страната CD, имаме

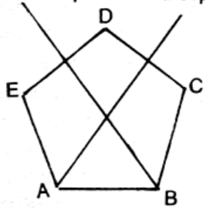
$$\overline{AB} = \overline{AE},\ \overline{BC} = \overline{DE}, \qquad (1)$$

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle DEA,\ \sphericalangle BCD = \sphericalangle EDC.$$

Ако другата оска на симетрија минува низ темето B и низ средината на страната DE заклучуваме дека

$$\overline{BC} = \overline{AB},\ \overline{CD} = \overline{AE}, \qquad (2)$$

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAE,\ \sphericalangle CDE = \sphericalangle DEA.$$



Црт. 3

На основа на равенството (1) и (2) произлегува дека петаголникот ABCDE е правилен.

На читателите им препорачуваме да ги докажат следните теореми:

1. Секоја од дијагоналите на правилниот петаголник е паралелна со една негова страна.

2. Дијагоналите на правилниот петаголник образуваат одново правилен петаголник.

Драгољуб Милошевиќ
Прањани

ПРИМЕНА НА ЕВКЛИДОВОТО НЕРАВЕНСТВО

Нека се a и b два позитивни броја; тогаш очигледно дека $(a-b)^2 \geqslant 0$, а оттаму и

$$a^2-2ab+b^2 \geqslant 0,$$

при што знакот за еднаквост важи само во случајот кога a = b.

Ако додадеме на обете страни $4ab$, се добива $a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab$, а оттаму $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, т.е.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

при што знакот за еднаквост важи само во случајот кога $a = b$. Ова неравенство потекнува од стариот грчки математичар Евклид 365. – 275. година п.н.е.). Тоа неравенство може да се искаже и на следниот начин:

– Аритметичката средина на два броја не е помала од нивната геометриска средина.

Сега на два примери ќе покажеме како тоа неравенство се користи.

Пример 1. Од сите правоаголници со зададена дијагонала, најголема плоштина има квадратот.

Решение: Нека a и b се двете страни на правоаголникот, а d неговата дијагонала. Според Питагоровата теорема, имаме

$$a^2+b^2 = d^2.$$

Од Евклидовото неравенство, пак, имаме:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$
$$(a+b)^2 \geqslant 4ab,$$
$$a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab,$$
$$a^2+b^2 \geqslant 2ab,$$

а оттука и

$$d^2 \geqslant 2ab,$$

односно за $a = b$ имаме $d^2 = 2a^2$, значи $a^2 = \dfrac{d^2}{2}$ = P, каде што P е плоштина на квадратот.

Пример 2. Да се определи најголемата вредност на функцијата

$$y = \frac{x}{9+4x^2} \qquad (x > 0).$$

Решение: Со примена на Евклидовото неравенство имаме:

$$9+4x^2 \geq 2\sqrt{9 \cdot 4x^2} = 12x,$$

сега, имаме

$$y \leq \frac{x}{12x} = \frac{1}{12}$$

Според тоа, најголемата вредност што може да ја достигне функцијата y е $\frac{1}{12}$.

Задачи:

1. а) Од сите правоаголни триаголници со зададена хипотенуза c најголема плоштината има рамнокракиот правоаголен триаголник.

б) Од сите правоаголници впишани во зададена кружница со радиус r најголема плоштина има квадарот.

2. Определи ја најмалата вредност на секоја од функциите.

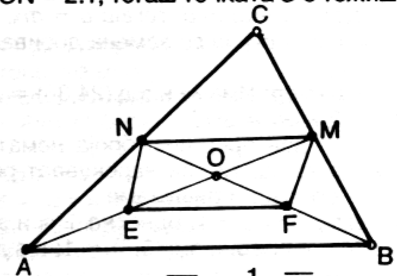
а) $y = x+\frac{4}{x}$ $(x > 0)$, б) $y = \frac{x}{4+x^2}$

3. Бројот 252 растави го на два множители, така што нивниот збир да биде најмал.

ЕДНА ТЕОРЕМА ЗА ТРИАГОЛНИК

Во шесто одделение се запознавме со својството на тежиштето на триаголникот. Тежиштето во триаголникот секоја тежишна линија ја дели во однос 2:1, сметајќи од темето кон спротивната страна. Тука ќе ја докажеме обратната теорема на наведената т.е.

Теорема: Ако точките M и N припаѓаат соодветно на страните BC и AC од триаголникот ABC и отсечките AM и BM се сечат во точката O така што $\overline{AO}:\overline{OM} = \overline{BO}:\overline{ON} = 2:1$, тогаш точката O е тежиште на триаголникот ABC.



Доказ. Нека E и F се соодветно средини на отсечките AO и BO. Дијагоналите на четириаголникот EFMN заемно се половат, што значи дека тој четириаголник е паралелограм. Оттука заклучуваме дека е $\overline{EF} = \overline{MN}$ како спротивни страни во паралелограмот. Отсечката EF е средна линија во триаголникот ABO, па е $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Тогаш е и $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, што значи дека MN е средна линија во триаголникот ABC. Поради тоа што точките M и N соодветно со средини на страните BC и AC, произлегува дека AM и BN се тежишни линии во триаголникот ABC, па точката O како нивен пресек претставува тежиште на триаголникот ABC.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус