Самоил Малчески, Скопје
Ристо Малчески, Скопје

СТЕПЕНИ ВО АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

1. Вовед

Низата реални броеви со својство, почнувајќи од нејзиниот втор член, разликата меѓу секој член и претходниот член да е константна ја нарекуваме *аритметичка прогресија* или *аритметичка низа*.

Значи, $\{a_n\}$ е аритметичка прогресија ако и само ако

$$a_{k+1}-a_k=d \text{ , за } k\geq 1 .$$

односно

$$a_{k+1}=a_k+d \text{ , за } k\geq 1 . \tag{1}$$

Притоа, a_1 го нарекуваме *почетен член* на прогресијата, а d *разлика* на аритметичката прогресијата.

Ако го знаеме почетниот член и разликата на аритметичката прогресија, тогаш користејќи ја формулата (1) можеме да го пресметаме секој член на прогресијата. Меѓутоа, овие пресметувања можат да бидат долги и напорни, ако треба да го пресметаме 555-от член на прогресијата зададена, на пример со $a_1=\frac{2}{3}$ и $d=\frac{7}{19}$. Во следнава теорема ќе ја докажеме формулата за наоѓање како на општиот член a_k на аритметичка прогресија, така и на збирот S_k на првите k нејзини членови.

Теорема 1. Нека $\{a_n\}$ е аритметичка прогресија со разлика d. Тогаш

$$a_k=a_1+(k-1)d , \tag{2}$$

$$S_k=\frac{k}{2}[2a_1+(k-1)d]. \tag{3}$$

Доказ. Прво ќе ја докажеме формулата (2). За $k=1$ имаме

$$a_1=a_1+0=a_1+(1-1)d ,$$

т.е. формулата (2) е точна. Нека претпоставиме дека за $k=i$ важи

$$a_i=a_1+(i-1)d .$$

Тогаш, за $k=i+1$ добиваме

$$a_{i+1}=a_i+d=[a_1+(i-1)d]+d=a_1+(i+1-1)d ,$$

па до принципот на математичка индукција следува дека формулата (2) важи за секој природен број k.

Да ја докажеме формулата (3). За $k=1$ имаме

$$S_1=a_1=\frac{1}{2}[2a_1+(1-1)d],$$

т.е. формулата (3) е точна. Нека претпоставиме дека за $k=i$ важи

$$S_i=\frac{i}{2}[2a_1+(i-1)d] .$$

Тогаш, за $k = i+1$ добиваме

$$S_{i+1} = S_i + a_{i+1} = \tfrac{i}{2}[2a_1 + (i-1)d] + [a_1 + id] = (i+1)a_1 + id[\tfrac{i-1}{2} + 1]$$
$$= (i+1)a_1 + \tfrac{i(i+1)}{2} d = \tfrac{i+1}{2}[2a_1 + id] = \tfrac{i+1}{2}[2a_1 + (i+1-1)d],$$

па до принципот на математичка индукција следува дека формулата (3) важи за секој природен број k. ■

Забелешка. Ако ја искористиме формулата (2), тогаш од формулата (3) ја добиваме следнава формула за пресметување на збирот на првите k членови на аритметичката прогресија

$$S_k = \tfrac{k}{2}[2a_1 + (k-1)d] = \tfrac{k}{2}[a_1 + a_1 + (k-1)d] = \tfrac{k}{2}(a_1 + a_k)\,. \tag{4}$$

Пример 1. Пресметај го збирот на првите n членови на аритметичката прогресија $a, 2a-b, 3a-2b, 4a-3b, ...$.

Решение. Од условот на задачата, за разликата d на прогресијата наоѓаме $d = a_2 - a_1 = 2a - b - a = a - b$. Понатаму, од формулата (3) за збирот на првите n членови на оваа прогресија наоѓаме

$$S_n = \tfrac{n}{2}[2a + (n-1)(a-b)] = \tfrac{n}{2}[2a + (n-1)a] - \tfrac{n(n-1)}{2} b = \tfrac{n(n+1)}{2} a - \tfrac{n(n-1)}{2} b\,. \ ■$$

Пример 2. Определи ја аритметичната прогресија за која се знае дека $a_7 = 21$ и $S_7 = 105$.

Решение. Ако ја искористиме (4), од условот на задачата добиваме

$$105 = \tfrac{7}{2}(a_1 + 21)$$

од каде наоѓаме $a_1 = 9$. Сега, со замена во (2) добиваме

$$21 = 30 + (7-1)d\,,$$

т.е. $d = -\frac{1}{2}$. Според тоа, прогресијата е зададена со почетен член $a_1 = 9$ и разлика $d = -\frac{1}{2}$. ■

Пример 3. Определи ја аритметичката прогресија ако $S_3 = 30$ и $S_5 = 75$.

Решение. Од условот на задачата и од формулата (3) го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 30 = \tfrac{3}{2}[2a_1 + 2d], \\ 75 = \tfrac{5}{2}[2a_1 + 4d], \end{cases}$$

кој е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} 10 = a_1 + d. \\ 15 = a_1 + 2d. \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата добиваме $d = 5$, па затоа $a_1 = 5$. ■

Пример 5. Колку членови на аритметичката прогресија зададена со $a_1 = 41$ и $d = 2$ треба да се соберат за да се добие збир $S_k = 4784$.

Решение. Од условот на задачата, ако замениме во (3) ја добиваме равенката $4784 = \frac{k}{2}[2 \cdot 41 + (k-1)2]$, која е еквивалентна на равенката $k^2 + 40k - 4784 = 0$.

Решенија на последната квадратна равенка се $k_1 = -92$ и $k_2 = 52$ и како k е природен број, добиваме $k = 52$, што значи дека се собрани 52 члена од дадената прогресија. ■

2. Точни квадрати во аритметичка прогресија

Да ги запишеме првите неколку членови на артиметичката прогресија $7k+1$, $k = 0,1,2,3,...$:

1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85, 92, 99, 106, 113, 120,
127, 134, 141, 148, 155, 162, 169, 176, 183, 190, 197, 204, 211, ...

Забележуваме дека $1 = 1^2, 36 = 6^2$ и $169 = 13^2$, а растојанијата меѓу квадратите се зголемуваат. Затоа логично е да се запрашаме дали оваа прогресија има конечно или бесконечно многу квадрати на природни броеви. Сега да разгледаме неколку членови на аритметичката прогресија $7k+2$, $k = 0,1,2,3,...$. Имаме:

2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58, 65, 72, 79, 86, 93, 100, 107, 114, 121.
128, 135, 142, 149, 156, 163, 170, 177, 184, 191, 198, 205, 212, ...

Забележуваме дека $9 = 3^2, 16 = 4^2, 100 = 10^2$ и $121 = 11^2$, а растојанијата меѓу квадратрите се зголемуваат. Затоа логично е да се запрашаме дали оваа прогресија има конечно или бесконечно многу квадрати на природни броеви. Слично се добива и за прогресијата $7k+4$, $k = 0,1,2,...$, како и за прогресијата $7k, k = 1,2,3,...$

Ќе запишеме неколку членови на прогресијата $7k+3$, $k = 0,1,2,...$. Имаме:

3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 81, 94, 101, 108, 111, 122.
129, 136, 143, 150, 157, 164, 171, 178, 185, 192, 199, 206, 213, ...

Се чини дека во оваа прогресија нема квадрати на природни броеви. Изгледа дека слично е и за низите $7k+5$, $k = 0,1,2,...$ и $7k+6$, $k = 0,1,2,...$, а додека во низата $7k$, $k = 1,2,...$ членот $7k$ е квадрат на природен број ако и само ако $k = 7n^2$, за $n = 1,2,...$ и притоа важи $7k = 7 \cdot 7n^2 = (7n)^2$. Тоа значи дека низата $7k$, $k = 1,2,...$ има бесконечно многу квадрати.

Ќе докажеме дека аритметичките прогресии

1) $7k+3$, $k = 0,1,2,...$;
2) $7k+5$, $k = 0,1,2,...$ и
3) $7k+6$, $k = 0,1,2,...$

не содржат точни квадрати на природни броеви. За таа цел доволно е да забележиме дека секој природен број може да се запише во видот $7k+i$, $i=0,1,2,3,4,5,6$ и да ги разгледаме равенствата:

$$\begin{aligned}
&(7k)^2 = 49k^2 = 7\cdot(7k^2),\\
&(7k+1)^2 = 49k^2+14k+1 = 7(7k^2+2k)+1,\\
&(7k+2)^2 = 49k^2+28k+4 = 7(7k^2+4k)+4,\\
&(7k+3)^2 = 49k^2+42k+9 = 7(7k^2+6k+1)+2,\\
&(7k+4)^2 = 49k^2+56k+16 = 7(7k^2+8k+2)+2,\\
&(7k+5)^2 = 49k^2+70k+25 = 7(7k^2+10k+3)+4,\\
&(7k+6)^2 = 49k^2+84k+36 = 7(7k^2+12k+5)+1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Од равенствата (4) следува дека:

- ако бројот е делив со 7, тогаш и неговиот квадрат е делив со 7,
- ако природниот број при делење со 7 дава остаток 1 или 6, тогаш неговиот квадрат при делење со 7 дава остаток 1,
- ако природниот број при делење со 7 дава остаток 3 или 4, тогаш неговиот квадрат при делење со 7 дава остаток 2, и
- ако природниот број при делење со 7 дава остаток 2 или 5, тогаш неговиот квадрат при делење со 7 дава остаток 4.

Со тоа докажавме:

а) Во низата $7k$, $k=1,2,...$ има бесконечно многу точни квадрати. Бројот од видот $7k$, $k=1,2,...$ е точен квадрат ако и само ако $k=7n^2$, за $n=1,2,...$.

б) Во низата $7k+1$, $k=0,1,2,...$ има бесконечно многу точни квадрати. Бројот од видот $7k+1$, $k=0,1,2,...$ е точен квадрат ако и само ако е од видот $(7n+1)^2$ или $(7n+6)^2$, за $n=1,2,...$.

в) Во низата $7k+2$, $k=0,1,2,...$ има бесконечно многу точни квадрати. Бројот од видот $7k+1$, $k=0,1,2,...$ е точен квадрат ако и само ако е од видот $(7n+3)^2$ или $(7n+4)^2$, за $n=1,2,...$.

г) Во низата $7k+4$, $k=0,1,2,...$ има бесконечно многу точни квадрати. Бројот од видот $7k+4$, $k=0,1,2,...$ е точен квадрат ако и само ако е од видот $(7n+2)^2$ или $(7n+5)^2$, за $n=1,2,...$.

д) низите $7k+3$, $k=0,1,2,...$; $7k+5$, $k=0,1,2,...$ и $7k+6$, $k=0,1,2,...$ не содржат точни квадрати.

Нека $a,d\in\mathbb{N}$. Во врска со точните квадрати во аритметичката прогресија $a+dn$, $n=0,1,2,...$ ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 2. Нека $a, d \in \mathbb{N}$. Ако аритметичката прогресија $a+dn$, $n=0,1,2,...$ содржи барем еден точен квадрат, тогаш таа содржи бесконечно многу точни квадрати. Една подниза на точни квадрати во прогресијата $a+dn$, $n=0,1,2,...$ е $(dk+y)^2$, $k=0,1,2,...$, каде y^2 е точен квадрат содржан во прогресијата $a+dn$, $n=0,1,2,...$.

Доказ. Нека y^2 е точен квадрат содржан во прогресијата $a+dn$, $n=0,1,2,...$. Тогаш $y^2=a+dr$, за некој $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ако во равенството

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2,$$

ставиме $x=dk$, $k=0,1,2,...$ и $y^2=a+dr$, добиваме

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (dk)^2+2dky+y^2 = (dk)^2+2dky+a+dr \\ &= d(dk^2+2ky+r)+a.\end{aligned}$$

Тоа значи дека точните квадрати $(x+y)^2=(dk+y)^2$, $k=0,1,2,...$ се членови на прогресијата $a+dn$, $n=0,1,2,...$, т.е. таа содржи бесконечно многу точни квадрати и една подниза од точни квадрати во прогресијата е дадена со $(dk+y)^2$, $k=0,1,2,...$. ■

3. Точни *s*-ти степени, *s*>2 во аритметичка прогресија

Да ги запишеме првите неколку членови на аритметичката прогресија $5k+1$, $k=0,1,2,3,...$:

1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, 86, 91, 96, 101,
106, 111, 116, 121, 126, 131, 136, 141, 146, 151, 156, 161, 166, 171, 176, ...

Меѓу запишаните броеви само еден е точен куб на природен број, и тоа е бројот 1. Но, тоа не значи дека во оваа низа нема други точни кубови на природни броеви. Логично е да претпоставиме дека важи аналогно тврдење на тврдењето кое го докажавме во теорема 2. Ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 3. Нека $a, d \in \mathbb{N}$. Ако аритметичката прогресија $a+dn$, $n=0,1,2,...$ содржи барем еден точен куб, тогаш таа содржи бесконечно многу точни кубови. Една подниза на точни кубови во прогресијата $a+dn$, $n=0,1,2,...$ е $(dk+y)^3$, $k=0,1,2,...$, каде y^3 е точен куб содржан во прогресијата $a+dn$, $n=0,1,2,...$.

Доказ. Нека y^3 е точен куб содржан во прогресијата $a+dn$, $n=0,1,2,...$. Тогаш $y^3=a+dr$, за некој $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ако во равенството

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,$$

ставиме $x = dk$, $k = 0,1,2,...$ и $y^3 = a + dr$, добиваме

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (dk)^3 + 3(dk)^2 y + 3dky^2 + y^3\\ &= (dk)^3 + 3(dk)^2 y + 3dky^2 + a + dr\\ &= d(dk^3 + 3dk^2 y + 3ky^2 + r) + a.\end{aligned}$$

Значи, точните кубови $(x+y)^3 = (dk+y)^3$, $k = 0,1,2,...$ се членови на прогресијата $a+dn$, $n = 0,1,2,...$, т.е. таа содржи бесконечно многу точни кубови и една подниза од точни кубови во прогресијата е дадена со $(dk+y)^3$, $k = 0,1,2,...$. ■

На крајот од нашите разгледувања ќе докажеме дека за секој природен степен s важи теорема која е аналогна на теоремите 2 и 3. Притоа теоремата може да се докаже користејќи ја Њутновата биномна формула, но ние ќе дадеме друг доказ за кој сметаме дека е поприфатлив за учениците од помала возраст.

Теорема 4. Нека $s,a,d \in \mathbb{N}, s > 3$. Ако аритметичката прогресија $a+dn$, $n = 0,1,2,...$ содржи барем еден точен $s-$ти степен, тогаш таа содржи бесконечно многу точни $s-$ти степени. Една подниза на точни $s-$ти степени во прогресијата $a+dn$, $n = 0,1,2,...$ е $(dk+y)^s$, $k = 0,1,2,...$, каде y^s е точен $s-$ти степен содржан во прогресијата $a+dn$, $n = 0,1,2,...$.

Доказ. Нека y^s е точен $s-$ти степен содржан во прогресијата $a+dn$, $n = 0,1,2,...$. Тогаш $y^s = a + dr$, за некој $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ако во равенството

$$x^s - y^s = (x-y)(x^{s-1} + x^{s-2}y + ... + xy^{s-2} + y^{s-1})$$

ставиме $x = dk + y$, $k = 0,1,2,...$ и $y^s = a + dr$, добиваме

$$\begin{aligned}&(dk+y)^s - a - dr = dk((dk+y)^{s-1} + (dk+y)^{s-2} y + ... + (dk+y)y^{s-2} + y^{s-1})\\ &(dk+y)^s = d(kA + r) + a,\end{aligned}$$

каде

$$A = (dk+y)^{s-1} + (dk+y)^{s-2} y + ... + (dk+y)y^{s-2} + y^{s-1} . \tag{5}$$

Значи, точните $s-$ти степени $(dk+y)^s$, $k = 0,1,2,...$ се членови на прогресијата $a+dn$, $n = 0,1,2,...$, т.е. таа содржи бесконечно многу точни $s-$ти степени и една подниза од точни $s-$ти степени во прогресијата е дадена со

$$(dk+y)^s = d(kA + r) + a , k = 0,1,2,...$$

каде A е даден со (5). ■