VII олимпијада

1. Определи ги сите реални броеви $x \in [0, 2\pi]$ за кои е исполнето неравенството
$$2\cos x \leq |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}| \leq \sqrt{2} .$$
Решение. Имаме:
$$1 \pm \sin 2x = \sin^2 x \pm 2\sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x \pm \cos x)^2 .$$
Со квадрирање на десната страна на неравенството се добива неравенството
$$2 - 2\sqrt{(1+\sin 2x)(1-\sin 2x)} \leq 2$$
кое точно. Левата страна на неравенството ќе ја запишеме во облик
$$2\cos x \leq || \sin x + \cos x | - | \sin x - \cos x || . \qquad (1)$$
За $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, $\cos x \leq 0$, па според тоа неравенството е исполнето.
За $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ исполнето е
$$|| \sin x + \cos x | - | \sin x - \cos x || = 2\sin x < 2\cos x ,$$
па според тоа неравенството не е исполнето.
За $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, десната страна на неравенство (1) е
$$|| \sin x + \cos x | - | \sin x - \cos x || = 2\cos x$$
па според тоа неравенството е исполнето. Слично се покажува дека неравенството е исполнето за $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$, а не е исполнето за $\frac{7\pi}{4} < x \leq 2\pi$. Значи, двете неравенства се исполнети за $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$.

2. Даден е системот равенки
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$
чии коефициентите ги задоволуваат условите:
а) a_{11}, a_{22}, a_{33} се позитивни,
б) сите преостанати коефициенти се негативни,
в) во секоја равенка збирот на коефициентите е позитивен.
Докажи дека $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ е единствено решение на системот.
Решение. *Прв начин.* Од условот на задачата следува дека постојат позитивни броеви b_1, b_2, b_3 такви што:
$$a_{11} = b_1 - a_{12} - a_{13},\ a_{22} = b_2 - a_{21} - a_{23},\ a_{33} = b_3 - a_{31} - a_{32} .$$
Со замена на овие изрази во детерминантата на системот и нејзино пресметување се добива дека таа е различна од нула. Сега, бидејќи системот е хомоген, добиваме дека единствено негово решение е $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Втор начин. Нека (x_1, x_2, x_3) е решение на дадениот систем, такво што

$$|x_1| \geq |x_2| \geq |x_3|.$$

Останатите случаи се сведуваат на аналогни разгледувања, при што е потребно само да се изврши замена на индексите.

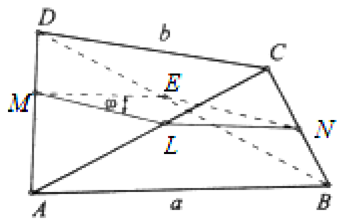
Ако $x_1 = 0$, тогаш $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ако $|x_1| > 0$, тогаш

$$\begin{aligned}
|a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3| &= |x_1| \cdot |a_{11} + a_{12}\tfrac{x_2}{x_1} + a_{13}\tfrac{x_3}{x_1}| \\
&\geq |x_1| (a_{11} - |a_{12}| \tfrac{|x_2|}{|x_1|} - |a_{13}| \tfrac{|x_3|}{|x_1|} \quad . \\
&\geq |x_1| (a_{11} - |a_{12}| - |a_{13}|) \\
&= a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0.
\end{aligned}$$

Последното противречи на условот на задачата, па затоа $|x_1| = 0$, т.е. единствено решение на разгледуваниот систем е $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

3. Даден е тетраедар $ABCD$. Работ AB има должина a, CD има должина b, растојанието меѓу разминувачките прави AB и CD е d и аголот меѓу нив е еднаков на ω. Нека рамнина π, која е паралелна со правите AB и CD, го дели тетраедарот на два дела. Пресметај го односот на волумени на двата дела ако се знае дека односот на растојанието од AB до π и растојанието од CD до π е еднаков на k.

Решение. На цртежот десно е прикажан тетраедарот $ABCD$ и неговиот пресек со рамнината π. Од паралелноста на рамнината π со рабовите AB и CD следува $AB \| LN \| ME$ и $CD \| ML \| EN$, односно дека четириаголникот $EMLN$ е паралелограм и дека аголот меѓу неговите страни ML и ME е еднаков на аголот меѓу правите AB и CD. Нека растојанието меѓу рамнината π и правата CD е x. Тогаш плоштина на паралелограмот $EMLN$ е



$$\overline{MN} \cdot \overline{ME} \cdot \sin\omega = \frac{a\,x}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d} \cdot \sin\omega .$$

Според тоа

$$V_1 = \int_0^x \frac{a\,t}{d} \cdot \frac{b(d-t)}{d} \sin\omega\, dt = \left(\frac{a\,b\,x^2}{2d} - \frac{a\,b\,x^3}{3d^2}\right)\sin\omega. .$$

Аналогно се добива

$$V_2 = \left(\frac{aby^2}{2d} - \frac{aby^3}{3d^2}\right)\sin\omega$$

каде y е растојание меѓу AB и π.

Значи, односот на волумените е $\frac{V_2}{V_1}=\frac{3dy^2-2y^3}{3dx^2-2x^3}$, и бидејќи $x=\frac{d}{k+1}$, $y=\frac{dk}{k+1}$ добиваме $\frac{V_2}{V_1}=k^2\,\frac{k+3}{3k+1}$.

4. Определи реални броеви x_1,x_2,x_3,x_4 такви што збирот на секој од нив со производот на преостанатите три броја е еднаков на 2.

Решение. *Прв начин.* Од условот на задачата добиваме дека броевите x_1,x_2, x_3,x_4 го задоволуваат системот равенки

$$\begin{aligned} x_1+x_2x_3x_4&=2\\ x_2+x_1x_3x_4&=2\\ x_3+x_1x_2x_4&=2\\ x_4+x_1x_2x_3&=2 \end{aligned}\qquad (*)$$

Ако овие равенки ги помножиме со x_1,x_2,x_3,x_4 соодветно, и ставиме $p=x_1x_2x_3x_4$, добиваме квадратна равенка $\lambda^2-2\lambda+p=0$, што значи дека меѓу броевите x_1,x_2,x_3,x_4, кои се нејзини решенија, може да има најмногу два различни броја u и v.

1° За $x_1=x_2=x_3=x_4$, добиваме $x_1^3+x_1=2$ и како функцијата $f(x)=x^3+x$ е строго растечка функција добиваме дека единствено решение е $x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

2° Ако $x_1=u$, $x_2=x_3=x_4=v$, тогаш $u+v^3=2$ и $v+uv^2=2$. Ако последните две равенки ги одземеме добиваме $(u-v)(1-v^2)=0$. За $v=1$ се добива веќе добиеното решение од 1°, а за $v=-1$, $u=3$ се добива ново решение $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=-1$.

3° Ако $x_1=x_2=u$ и $x_3=x_4=v$ се добива системот равенки $u+uv^2=2$ и $v+vu^2=2$. Ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $(u-v)(1-uv)=0$. За $u=v$ се добива решението од 1°. За $uv=1$ од $u+uv^2=2$ добиваме $u+v=2$, од каде добиваме $u=v=1$, како и во случајот 1°.

Сите решенија на системот се подредените четворки:

$$(1,1,1,1),\ (3,-1,-1,-1),\ (-1,3,-1,-1),\ (-1,-1,3,-1),\ (-1,-1,-1,3).$$

Втор начин. Како и во првиот начин го добиваме сиостемот (*). Ако првата равенка во (*) ја помножиме со x_1, втората со x_2, по нивното одземање ја добиваме равенката

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)=0.$$

На сличен начин ги добиваме равенките

$$(x_1-x_3)(x_1+x_3-2)=0,$$
$$(x_1-x_4)(x_1+x_4-2)=0,$$
$$(x_2-x_3)(x_2+x_3-2)=0,$$
$$(x_2-x_4)(x_2+x_4-2)=0,$$
$$(x_3-x_4)(x_3+x_4-2)=0.$$

Нивното решавање доведува до решенијата добиени како при првиот начин на решавање.

5. Даден е $\triangle OAB$ со $\measuredangle BOA=\alpha$ ($\alpha<90^\circ$). Низ точка M , $M\not\equiv O$, на триаголникот се повлечени нормали MP на OA и MQ на OB. Нека H е ортоцентар на триаголникот OPQ. Определи го геометриското место на H ако

а) M припаѓа на страната AB,

б) M припаѓа на внатрешноста на $\triangle OAB$.

Решение. *Прв начин.* а) Нека точките $A_1,B_1,P,Q,P_1,Q_1,A_2,B_2$ се како на цртежот, при што се исполнети условите:

$$MQ\parallel AA_1\parallel PP_1\parallel BB_1\perp OB,\; MP\parallel BB_1\parallel QQ_1\parallel AA_1\perp OA$$

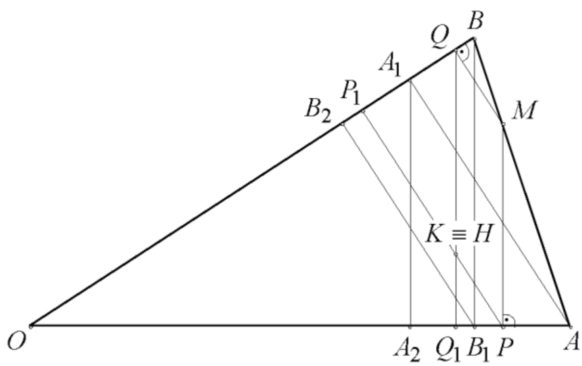
Од Талесовата теорема следува:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB_1}}=\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_2}}\quad\text{и}\quad\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{A_1Q}}{\overline{QB}}=\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1B_1}}. \qquad (*)$$

Ќе докажеме дека ортоцентарот H на триаголникот OPQ (т.е. пресекот на висините PP_1 и QQ_1) се наоѓа на отсечката A_1B_1. Нека K е пресек на висината PP_1 и правата A_1B_1. Од сличноста $\triangle B_1A_1B_2\sim\triangle KA_1P_1$ и (*) се добива

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_2}}=\frac{\overline{A_1K}}{\overline{KB_1}}\quad\text{и}\quad\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1B_1}}=\frac{\overline{A_1K}}{\overline{KB_1}}.$$

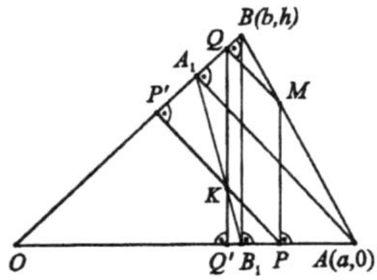
Од последните две равенства следува дека $\triangle A_1A_2B_1\sim\triangle KQ_1B_1$, па затоа $KQ_1\perp OA$, т.е. точката K се наоѓа на висината Q_1Q, што значи дека K се совпаѓа со ортоцентарот H, т.е. ортоцентарот H припаѓа на A_1B_1.



Сега не е тешко да се види дека за секоја точка K од отсечката A_1B_1 (и само за тие точки) постои точка M на AB таква што K е ортоцентар на $\triangle OPQ$, за $MP\perp OA$ и $MQ\perp OB$.

б) Ако точката M е во внатрешноста на $\triangle OAB$, тогаш постои отсечка $A'B' \| AB$ таква што M припаѓа на $A'B'$. Од сличноста на триаголниците $OA'B'$ и OAB, следува дека ортоцентарот H на триаголникот $OP'Q'$ ($MP' \perp OA'$, $MQ' \perp OB'$) е на отсечката $A_1'B_1'$ која се пресликува во отсечката A_1B_1, со хомотетија со центар во точката O и коефициент $k = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$. Сега од својствата на хомотетијата, следува дека бараното геометриско место за точката H е внатрешноста на $\triangle OA_1B_1$.

Втор начин. а) Кога точката M движејќи се по отсечката AB ги достигнува крајните точки A и B, положбата на ортоцентарот на триаголникот OPQ се стреми кон точката A_1, односно кон точката B_1 (цртеж десно). Ќе докажеме дека при произволна положба на точката M, ортоцентарот на триаголникот OPQ припаѓа на отсечката A_1B_1.



Нека координатите на темињата на дадениот триаголник се $O(0,0)$, $A(a,0)$ и $B(b,h)$. Равенките на правите OB и AB се $y = \frac{h}{b}x$ и $y = -\frac{h}{a-b}x + \frac{ha}{a-b}$, соодветно. Ако M е на AB, тогаш $M(t, \frac{h(a-t)}{a-b})$, каде $b \le t \le a$. Нормалата на правата OB која што минува низ точката M има равенка

$$y = -\frac{b}{h}(x-t) + \frac{h(a-t)}{a-b}.$$

Точката Q е пресаек на оваа нормала и правата OB, па затоа

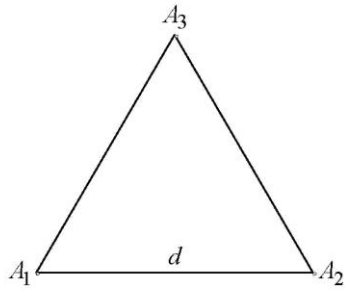
$$\frac{h}{b}x = -\frac{b}{h}(x-t) + \frac{h(a-t)}{a-b}, \text{ т.е. } x_Q = \frac{b(h^2a+(ab-b^2-h^2)t)}{(a-b)(b^2+h^2)},$$

па затоа $y_Q = \frac{h(h^2a+(ab-b^2-h^2)t)}{(a-b)(b^2+h^2)}$. Нормалата на правата OB што минува низ точката $P(t,0)$ има равека $y = -\frac{b}{h}(x-t)$. Точката K е ортоцентар на триаголникот OPQ и таа е пресек на висините PP' и QQ', па затоа

$$K\left(\frac{b(h^2a+(ab-b^2-h^2)t)}{(a-b)(b^2+h^2)}, \frac{abh(t-b)}{(a-b)(b^2+h^2)}\right).$$

Бидејќи координатите на точката K се линеарно зависни од параметарот t, геометриското место на точките K што се добиваат при преместувањето на точката M по отсечката AB е отсечка. За $t=b$ и $t=a$ точката K преминува во $B_1(b,0)$ и $A_1(\frac{ab^2}{b^2+h^2}, \frac{abh}{b^2+h^2})$, соодветно.

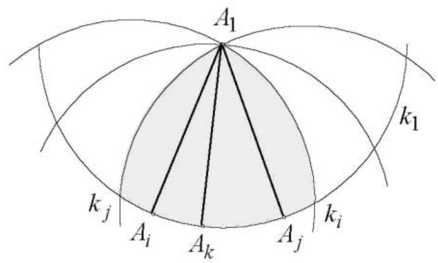
6. Во рамнина се дадени n $(n \geq 3)$ точки. Максималното растојание меѓу произволни две од овие n точки е d . Докажи дека од точките може да се формираат најмногу n парови такви што растојанието меѓу точките во секој пар е еднакво на d .



Решение. Доказот ќе го изведеме со математичка индукција. Најголемото растојание меѓу две од n дадени точки, го нарекуваме дијаметар и го означуваме со d.

а) Ако се дадени три точки тогаш бројот на дијаметри може да биде најмногу три, и тоа кога $\triangle A_1A_2A_3$ е рамностран.

б) Нека за некој $n \geq 3$ бројот на дијаметри е еднаков на n . Доволно е да докажеме дека $\{A_kA_l \mid \overline{A_kA_l} = d = \max\limits_{i,j=1,2,...,n+1} \overline{A_iA_j}\}$ има најмногу $n+1$ елемент.



Ги повлекуваме сите дијаметри во множеството од $n+1$ точки A_1, A_2, $A_3,..., A_{n+1}$. Можни се два случаи.

1° Од секоја од дадените $n+1$ точки поаѓаат најмногу два дијаметри. Тогаш, најголемиот број на дијаметри е $2(n+1)\frac{1}{2} = n+1$, бидејќи секој дијаметар се брои два пати.

2° Од една точка, на пример од A_1, поаѓаат барем три дијаметри. Нека тие дијаметри се A_1A_i, A_1A_j и A_1A_k. Бидејќи $\overline{A_1A_i} = \overline{A_1A_j} = \overline{A_1A_k} = d$, точките A_i, A_j и A_k лежат на кружница со центар A_1 и радиус d . Бидејќи $\overline{A_iA_j}$, $\overline{A_iA_k}$, $\overline{A_jA_k} \leq d$, точките A_i, A_j и A_k се наоѓаат во кружен исечок со централен агол не поголем од 60° . Ако точката A_k е на кружниот лак A_iA_j ($\measuredangle A_jA_1A_i \leq 60^\circ$), тогаш сите $n+1$ точки лежат во пресекот на кружниците k_1, k_i и k_j (k_i и k_j се кружници со радиуси d и со центри во точките A_i и A_j, соодветно). Тогаш A_1 е единствена точка од даденото множество точки која од A_k е на растојание d , т.е. од A_k поаѓа еден единствен дијаметар A_kA_1. Множеството од n точки $\{A_1, A_2, A_3,.., A_{n+1}\} \setminus \{A_k\}$ има, според индуктивната претпоставка, најмногу n дијаметри. Ако во тоа множество ја

додадеме точката A_k, од која поаѓа само еден дијаметар, добиваме множество со $n+1$ точка кое има најмногу $n+1$ дијаметар.
Да ги разгледаме уште случаите кога овој број на дијаметри се достигнува. Ако n е непарен број доволно е да се земат темињата на правилен $n-$аголник. Ако n е парен, се земаат сите темиња на правилен $(n-1)-$аголник $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ и на лакот на кружницата со центар во $A_{\frac{n}{2}}$ и дијаметар $d=\overline{A_{\frac{n}{2}}A_1}$ било која точка меѓу точките A_1 и A_{n-1}.