

КАКО САСТАВИТИ МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАТАК

Здравко Старц, Вршац

У току школовања и припрема за такмичење решавали сте многе математичке задатке. Решавање задатака захтева добро познавање теорије, упорност и сналажљивост. И поред уложених напора, понекад нисте успели да решите неки задатак. А када сте видели решење, све је деловало једноставно.

Ми се нећемо бавити решавањем задатака већ ћемо поставити друго питање: Како саставити нови задатак? У овом чланку показаћемо како смо саставили три нова задатка на основу решења једног задатка.

За ММО Мумбаи, 1996. [1] предложен је следећи задатак:

Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1.$$

Када важи неједнакост?

Решење. Имамо

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 &= (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\ &= (a+b)((a-b)^2(a^2 + ab + b^2) + a^2b^2) \geq a^2b^2(a+b) \end{aligned}$$

где једнакост важи ако је $a = b$. Олаведе следи

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b) + ab} = \frac{1}{ab(a+b) + 1} = \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{a+b+c}.$$

Ако са S обележимо цикличну суму $\sum \frac{ab}{(a^5+b^5+ab)}$, тада имамо да је

$$S \leq \frac{c}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} = 1.$$

Једнакост важи ако је $a = b = c = 1$.

У решењу овог задатка обратили смо пажњу на бином $a^5 + b^5$ и на алгебарске разломке у неједнакости. За овај бином дошли смо до две нове неједнакости

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 &= (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \leq \\ &= (a+b)(a^4 + a^2b^2 + b^4) < (a+b)(a^2 + b^2)^2, \\ a^5 + b^5 &= (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = \\ &= (a+b)((a-b)^2(a^2 + ab + b^2) + a^2b^2) > (a+b)(a-b)^2(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Ове две неједнакости искористићемо за палажење алгебарских разломака са ограничењима у облику једноставних израза. После неколико покушаја дошли смо до следећих неједнакости:

$$\begin{aligned}\frac{a^5 + b^5 + a^2 + b^2}{(a+b)(a^2+b^2)+1} &< \frac{(a+b)(a^2+b^2)^2 + a^2 + b^2}{(a+b)(a^2+b^2)+1} = \\ &= \frac{(a^2+b^2)((a+b)(a^2+b^2)+1)}{(a+b)(a^2+b^2)+1} = a^2 + b^2, \\ \frac{a^5 + b^5}{a^2 + b^2} &< \frac{(a+b)(a^2+b^2)^2}{a^2+b^2} = (a+b)(a^2+b^2) < \\ &< (a+b)(a^2+2ab+b^2) = (a+b)^3, \\ \frac{a^5 + b^5}{(a+b)(a-b)^2} &> \frac{(a+b)/(a-b)^2(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)^2} = a^2 + b^2, \\ \frac{a^5 + b^5}{(a-b)^2(a^2+b^2)} &> \frac{(a+b)/(a-b)^2(a^2+b^2)}{(a-b)^2(a^2+b^2)} = a+b.\end{aligned}$$

Сабирањем неједнакости

$$\frac{a^5 + b^5 + a^2 + b^2}{(a+b)(a^2+b^2)+1} < a^2 + b^2$$

циклично по a , b и c долазимо до задатка [2]:

Ако су a , b и c позитивни реални бројеви доказати неједнакост

$$\frac{a^5 + b^5 + a^2 + b^2}{(a+b)(a^2+b^2)+1} + \frac{b^5 + c^5 + b^2 + c^2}{(b+c)(b^2+c^2)+1} + \frac{c^5 + a^5 + c^2 + a^2}{(c+a)(c^2+a^2)+1} < 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Сабирањем неједнакости

$$\frac{a^5 + b^5}{a^2 + b^2} < (a+b)^3$$

циклично по a , b и c , уз услов да је $a+b+c=1$ долазимо до задатка [3]:

Ако су a , b и c позитивни реални бројеви тако да је $0 < a, b, c < 1$ и $a+b+c=1$, доказати неједнакост

$$\frac{a^5 + b^5}{a^2 + b^2} + \frac{b^5 + c^5}{b^2 + c^2} + \frac{c^5 + a^5}{c^2 + a^2} < 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3).$$

Слично, сабирањем неједнакости

$$\frac{a^5 + b^5}{(a+b)(a-b)^2} > a^2 + b^2,$$

односно,

$$\frac{a^5 + b^5}{(a-b)^2(a^2+b^2)} > a+b$$

циклично по a , b и c долазимо до задатка [4]:

Ако су a , b и c различити позитивни реални бројеви, доказати неједнакости

$$\frac{a^5 + b^5}{(a+b)(a-b)^2} + \frac{b^5 + c^5}{(b+c)(b-c)^2} + \frac{c^5 + a^5}{(c+a)(c-a)^2} > 2(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\frac{a^5 + b^5}{(a-b)^2(a^2 + b^2)} + \frac{b^5 + c^5}{(b-c)^2(b^2 + c^2)} + \frac{c^5 + a^5}{(c-a)^2(c^2 + a^2)} > 2(a + b + c).$$

Састављање и решавање задатака – то су, махом, два различита пута. Пут до новог задатка понекад је кратак, али махом је дуг и од аутора се захтева упорност и довитљивост. Познате чињенице и оно што су други урадили треба видети у другом светлу и из другог угла, али увек са питањима у себи: Шта бих ја могао да урадим, променим, допуним? Како да их искористим у другим околностима за састављање новог задатка?

И зато не очајавајте ако нисте успели да решите туђ задатак. Свакако, искористите решење туђег задатка за састављање новог задатка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Problems proposed by the participating teams in IMO, Mumbai, 1996., The Mathematics Teacher (India) 32 (1996) 1–2, 3 стр.
2. Aufgabe 39, Wurzel 33(1999), 191.
3. Problem 21.2.1, Menemui Matematik 21 (1999), 89.
4. Problem A:483, MatLap 3(1999), 314.

**Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на
ДМ на Србија во 1999/2000 година**