

ММО 2009

1. Да се определат сите природни броеви x , y и z за кои

$$1 + 2^x 3^y = z^2.$$

Решение. Лесно се проверува дека за $z=1,2,3$ дадената равенка нема решение.

Нека $z \geq 4$. Имаме $2^x 3^y = (z-1)(z+1)$. Најмногу еден од $z-1$ и $z+1$ се дели со 3, бидејќи ако $3|z-1$ и $3|z+1$ следува $3|(z+1)-(z-1)=2$, што не е можно. Исто така бидејќи $2|(z-1)(z+1)$ добиваме дека и $z-1$ и $z+1$ се делат со 2 и само еден од нив може да се дели со 4, бидејќи ако $4|z-1$ и $4|z+1$ следува дека $4|(z+1)-(z-1)=2$, што не е можно.

Поради ова ги имаме следниве случаи:

1° $z+1=2 \cdot 3^y$, $z-1=2^{x-1}$ и

2° $z+1=2^{x-1}$, $z-1=2 \cdot 3^y$.

Случај 1° Нека $z+1=2 \cdot 3^y$, $z-1=2^{x-1}$.

Со одземање на дадените равенки имаме

$$2 \cdot 3^y - 2^{x-1} = 2 \text{ т.е. } 3^y - 2^{x-2} = 1.$$

За $x=2$ лесно се проверува дека дадената равенка нема решение.

За $x=3$ имаме $3^y = 1+2=3$ т.е. $y=1$ и лесно се добива $z=5$.

Значи едно решение е $(x, y, z) = (3, 1, 5)$.

Ако $x \geq 4$, имаме $3^y \equiv 1 \pmod{4}$ па следува дека y е парен т.е. $y = 2y_1$, $y_1 \in \mathbb{N}$.

Сега имаме $3^{2y_1} - 1 = 2^{x-2}$ т.е. $(3^{y_1} - 1)(3^{y_1} + 1) = 2^{x-2}$, од каде лесно се добива дека $3^{y_1} - 1 = 2$ и $3^{y_1} + 1 = 2^{x-3}$ т.е. т.е. $y_1 = 1$ односно $y = 2$, сега лесно се добива дека $x = 5$ и $z = 17$.

Значи решение е $(x, y, z) = (5, 2, 17)$.

Случај 2° Нека $z+1=2^{x-1}$, $z-1=2 \cdot 3^y$ тогаш $2^{x-1} - 2 \cdot 3^y = 2$, т.е.

$$2^{x-2} - 3^y = 1.$$

За $y=1$ имаме $x=4$ и $z=7$, па решение е $(x, y, z) = (4, 1, 7)$.

Ако $y \geq 2$ тогаш имаме $2^{x-2} \equiv 1 \pmod{3}$ т.е. $x-2$ мора да е парен број па нека $x-2 = 2x_1$. Па имаме $3^y = 2^{2x_1} - 1 = (2^{x_1} - 1)(2^{x_1} + 1)$, од каде

следува дека $2^{x_1} - 1 = 1$ или 3. Ако $2^{x_1} - 1 = 1$ добиваме $x_1 = 1$ т.е. $x = 4$, па го добиваме решението $(4, 1, 7)$.

Ако $2^{x_1} - 1 = 3$ следува $x_1 = 2$ т.е. $x = 6$ и добиваме $3^y = 15$, што не е можно.

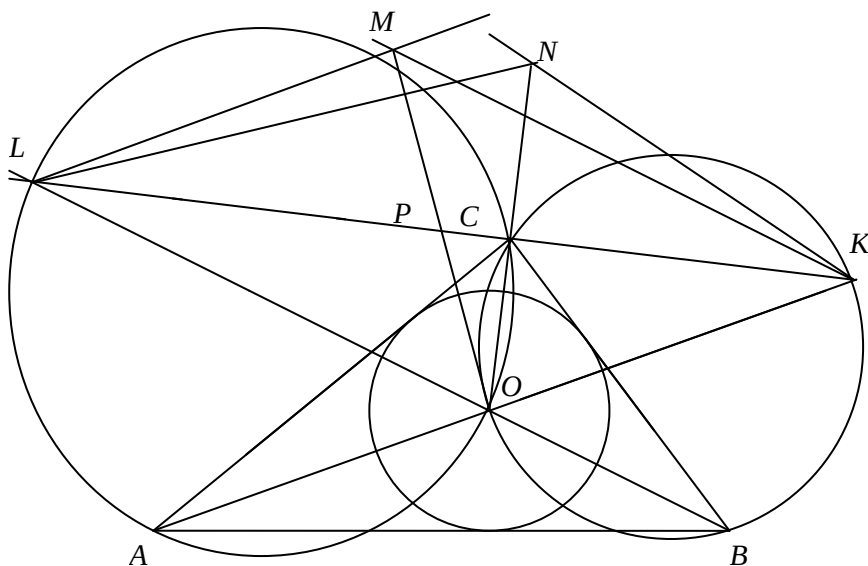
Значи решенија на дадената равенка се $(x, y, z) = (3, 1, 5), (5, 2, 17), (4, 1, 7)$.

2. Нека O е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC . Точките K и L се пресечни точки на кружниците опишани околу триаголниците BOC и AOC соодветно со симетралите на аглите во A и B соодветно, P е средина на отсечката KL , M е симетрична на O во однос на P и N е симетрична на O во однос на правата KL . Докажи дека четириаголникот $KLMN$ е тетивен.

Решение. Аглите LCA и LOA се еднакви како тетивни над ист кружен лак. Аголот LOA е еднаков на збирот од аглите OAB и OBA , како надворешен агол на триаголникот ABO , па оттука следува дека:

$$\begin{aligned}\angle LCO &= \angle LCA + \angle OCA \\ &= \angle LOA + \angle OCA \\ &= \angle OAB + \angle OBA + \angle OCA \\ &= \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB) \\ &= 90^\circ.\end{aligned}$$

Аналогно и $\angle KCO = 90^\circ$, па точката C лежи на правата KL , и точката



C е средина на отсечката ON . Правата PC е паралелна на MN како средна линија.

Четириаголникот $LOKM$ е паралелограм, бидејќи неговите дијагонали се преполовуваат во точката P . Следува дека, аглите MLK и OKL се еднакви.

Од друга страна триаголникот OKN е рамнокрак со основа ON (KC е висина и тежишна линија во него), па KC е симетрала на аголот OKN , то ест аглите OKC и NKC се еднакви.

Следува дека $\angle MLK = \angle NKL$, па четириаголникот $KLMN$ е рамнокрак трапез, т.е. тетивен. (Ако точката P се наоѓа од другата страна на точката C , ги разгледуваме аглите MKL и NLK).

3. Македонската математичка олимпијада се одржува во две соби означени со броеви 1 и 2. На почетокот сите натпреварувачи влегуваат во соба бр. 1. Краен распоред на натпреварувачите по соби се добива на следниот начин: листа со имиња на неколку од натпреварувачите се чита на глас; кога едно име ќе биде прочитано, тој натпреварувач и сите негови познаници меѓу останатите натпреварувачи ја променуваат просторијата во која моментално се наоѓаат. Така на секоја листа имиња одговара по еден краен распоред на натпреварувачите по соби. Покажи дека вкупниот број на можни крајни распореди не е еднаков на 2009. (Познанство меѓу натпреварувачи е симетрична релација).

Решение. Ќе покажеме дека вкупниот број можни крајни распореди е парен, па затоа не може да биде 2009. Доволно е да се покаже дека постои листа имиња на некои од натпреварувачите со која сите натпреварувачи од соба бр. 1 се префрлаат во соба бр. 2. (ако ова важи тогаш за секој можен краен распоред и обратниот распоред во кое секој натпреварувач е во другата соба е можен, па имаме спарување на можните крајни распореди) .

Тврдењето ќе го покажеме со индукција по n , каде n е бројот на натпреварувачи.

За $n=1$ тврдењето очигледно важи.

Нека претпоставиме дека за n натпреварувачи тврдењето важи.

Да го разгледаме случајот со $n+1$ натпреварувачи: за секои n меѓу нив постои листа имиња со која се префрлаат во соба бр. 2; доколку со некоја таква листа и преостанатиот натпреварувач се префрла во соба бр. 2 тогаш тврдењето важи; затоа да претпоставиме дека за секој од $n+1$ -те натпреварувачи постои т.н. негова добра листа со која преостанатите n се префрлаат во соба бр. 2, а тој натпреварувач останува во соба бр. 1; ќе разгледаме два случаи:

- (i) n е непарен; тогаш со големата листа составена од ваквите $n+1$ добри листи сите натпреварувачи се префрлаат во соба бр.2;
- (ii) n е парен; тогаш меѓу $n+1$ -те натпреварувачи постои барем еден со парен број на познаници меѓу преостанатите; името на таков натпреварувач ни е прво во новоформираната листа; по прочитувањето на тоа име во собата бр. 2 има непарен број натпреварувачи, па ги додаваме нивните добри листи; така е конструирана листа со која сите натпреварувачи од соба бр. 1 се префрлаат во соба бр. 2.

Со тоа индуктивниот доказ е комплетиран.

4. Во множеството цели броеви да се реши равенката

$$x^{2010} - 2006 = 4y^{2009} + 4y^{2008} + 2007y.$$

Решение. Лема 1. Нека $x \in \mathbb{Z}$, тогаш секој прост делител на $x^2 + 1$ е од облик $4k + 1$.

Доказ: Нека $p \mid x^2 + 1$, и јасно $\text{НЗД}(x, p) = 1$. Тогаш

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}, \text{ т.е. } x^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Ако двете страни ги кренеме на степен $\frac{p-1}{2}$, добиваме

$$(x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

т.е.

$$x^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Од друга страна, од *Малата Теорема на Ферма* имаме $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

па значи $\frac{p-1}{2} = 2k$, од каде следува дека $p = 4k + 1$. ■

Сега дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$x^{2010} + 1 = 4y^{2009} + 2007y + 4y^{2008} + 2007,$$

т.е.

$$x^{2010} + 1 = (4y^{2008} + 2007)(y + 1).$$

Бројот $4y^{2008} + 2007 = 4y^{2008} + 2008 - 1$ е од облик $4k - 1$, па мора да има прост делител од облик $4k - 1$, бидејќи ако сите делители се од облик $4k + 1$ тогаш и тој самиот е од таков облик.

Значи $(x^{1005})^2 + 1$ има делител од облик $4k - 1$, што не е можно поради Лема 1.

Значи дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.