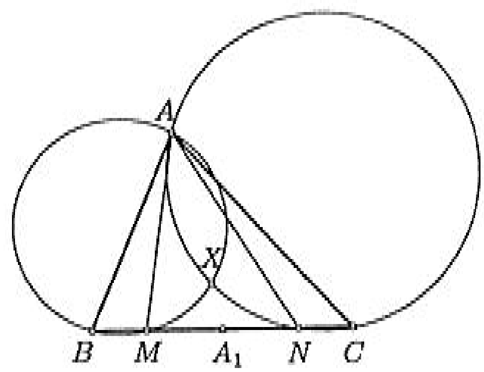
ПОТРЕБНИ И ДОВОЉНИ УСЛОВИ ДА ТРОУГАО БУДЕ ЈЕДНАКОКРАК

Марко Кошчица, **Београд**

У овом чланку навешћемо неколико потребних и довољних услова да троугао буде једнакокрак.

Теорема 1. На страници BC троугла ABC дате су различите тачке M и N такве да је $BM = CN$. Нека је X пресечна тачка кругова описаних око $\triangle ABM$ и $\triangle ACN$, различита од тачке A. Тада је $AX \perp BC$ ако и само ако је $AB = AC$.

Доказ. Претпоставимо да је $B - M - N - C$. Случај $B - N - M - C$ се доказује аналогно.



Нека је тачка A_1 средиште странице BC, а k_1 и k_2 кругови описани редом око $\triangle ABM$ и $\triangle ACN$. Означимо са $p(A_1, k_1)$, одн. $p(A_1, k_2)$ потенцију тачке A_1 у односу на k_1, односно k_2. Како је

$$p(A_1, k_1) = A_1M \cdot A_1B = A_1N \cdot A_1C = p(A_1, k_2),$$

тачка A_1 припада (радикалној оси кругова k_1 и k_2) правој AX, па је:

$$AX \perp BC \Leftrightarrow AA_1 \perp BC \Leftrightarrow AB = AC.$$

Овим је доказ завршен. $\square$

Теорема 2. Нека је ABC произвољан троугао и нека су:

- a, b, c редом дужине страница BC, CA, AB;
- h_a, h_b редом дужине висина из A и B;
- t_a, t_b редом дужине тежишних дужи из A и B;
- ℓ_a, ℓ_b редом дужине одсечака симетрала углова из A и B;
- h'_a, h'_b редом растојања ортоцентра $\triangle ABC$ од темена A и B;

- t'_a, t'_b редом растојања тежишта $\triangle ABC$ од темена A и B;
- ℓ'_a, ℓ'_b редом растојања центра уписане кружнице $\triangle ABC$ од темена A и B.

Тада важи:

(i) $a = b$ ако и само ако $t_a = t_b$;

(ii) $a = b$ ако и само ако $t'_a = t'_b$;

(iii) $a = b$ ако и само ако $h_a = h_b$;

(iv) $a = b$ ако и само ако $h'_a = h'_b$;

(v) $a = b$ ако и само ако $\ell_a = \ell_b$;

(vi) $a = b$ ако и само ако $\ell'_a = \ell'_b$.

Тврђење (v) претходне теореме познато је као Штајнер–Лемусова теорема. У доказу теореме користићемо следеће три леме, од којих су прве две добро познате са редовне наставе. Доказ треће леме није компликован, па предлажемо читаоцима да самостално докажу ово тврђење.

Лема 1. [Теорема о тежишту троугла] Ако су A_1, B_1 и C_1 средишта страница BC, CA и AB троугла ABC, а тачка T његово тежиште, тада је

$$AT : TA_1 = BT : TB_1 = CT : TC_1 = 2 : 1.$$

Лема 2. [Теорема о симетрали угла] Ако симетрала $\sphericalangle BAC$ у троуглу ABC сече страницу AB у тачки M, онда је $AM : MB = AC : CB$.

Лема 3. [Стјуартова теорема] Дат је троугао ABC и на страници AB тачка D. Ако су a, b, c, d, m и n редом дужине дужи BC, AC, AB, CD, AD и DB, тада је

$$d^2 = \frac{m}{c}a^2 + \frac{n}{c}b^2 - mn.$$

Доказ теореме 2. Доказаћемо (i), (ii), (v) и (vi) и то „рачунски". Доказе остала два тврђења остављамо читаоцима за вежбу.

(i) Применом Стјуартове теореме неопсредно се добија да је

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \text{ и } t_b^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2),$$

одакле је $t_b^2 - t_a^2 = \dfrac{3}{4}(a^2 - b^2)$, па заиста важи $a = b \Leftrightarrow t_a = t_b$.

(ii) На основу леме 1 је $t'_a = \dfrac{2}{3}t_a$ и $t'_b = \dfrac{2}{3}t_b$, па је

$$t_b'^2 - t_a'^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 (t_b^2 - t_a^2) = \frac{1}{3}(a^2 - b^2),$$

одакле је $a = b \Leftrightarrow t'_a = t'_b$.

(v) Ако са s означимо полуобим $\triangle ABC$, тј. $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, онда се непосредно из Стјуартове теореме и теореме о симетрали угла добија:

$$\ell_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)} \quad \text{и} \quad \ell_b = \frac{2\sqrt{ca}}{c+a}\sqrt{s(s-b)},$$

па је

$$\begin{aligned}
\ell_b^2 - \ell_a^2 &= \frac{4ca}{(c+a)^2}s(s-b) - \frac{4bc}{(b+c)^2}s(s-a) = 4cs\left(\frac{a(s-b)}{(c+a)^2} - \frac{b(s-a)}{(b+c)^2}\right)\\
&= 4cs\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a(c+a-b)}{(c+a)^2} - \frac{b(b+c-a)}{(b+c)^2}\right)\\
&= 2cs\left(\frac{a}{c+a} - \frac{b}{b+c} + \frac{ab}{(b+c)^2} - \frac{ab}{(c+a)^2}\right)\\
&= 2cs\left(\frac{ab+ac-bc-ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{ab(a^2-b^2+2c(a-b))}{(b+c)^2(c+a)^2}\right)\\
&= 2cs\left(\frac{(a-b)c}{(b+c)(c+a)} + \frac{ab(a-b)(a+b+2c)}{(b+c)^2(c+a)^2}\right)\\
&= 2cs(a-b)\left(\frac{c}{(b+c)(c+a)} + \frac{ab(a+b+2c)}{(b+c)^2(c+a)^2}\right).
\end{aligned}$$

Израз у великој загради строго је већи од нуле, па је

$$\ell_b^2 - \ell_a^2 = 0 \Leftrightarrow a - b = 0,$$

тј. $a = b \Leftrightarrow \ell_a = \ell_b$.

(vi) Овај доказ тривијално следи из тврђења да се у сваком троуглу наспрам једнаких страница налазе једнаки углови, као и тврђења да се у сваком троуглу наспрам једнаких углова налазе једнаке странице, примењених на $\triangle ABC$ и $\triangle ABS$, где је S центар уписаног круга троугла ABC.

Изразимо ипак $\ell_b'^2 - \ell_a'^2$ преко a, b и c. Применимо ли два пута теорему о симетрали угла, добијамо

$$\ell_a' = \frac{b+c}{a+b+c}\ell_a \quad \text{и} \quad \ell_b' = \frac{c+a}{a+b+c}\ell_b,$$

па је

$$\begin{aligned}
\ell_b'^2 - \ell_a'^2 &= \frac{(c+a)^2}{(a+b+c)^2}\frac{4ca}{(c+a)^2}s(s-b) - \frac{(b+c)^2}{(a+b+c)^2}\frac{4bc}{(b+c)^2}s(s-a)\\
&= \frac{c}{s}a(s-b) - \frac{c}{s}b(s-a)\\
&= c(a-b). \quad (1)
\end{aligned}$$

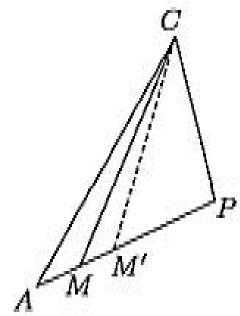
Одавде непосредно следи да је $a = b \Leftrightarrow \ell_a' = \ell_a'$. $\square$

Теорема 3. У унутрашњости $\triangle ABC$ код кога је $AC \leqslant BC$, изабрана је тачка P таква да је $CP < AC$. Круг k са центром у тачки C и полупречника r за који је $CP < r < AC$, сече дужи AP и BP редом у тачкама M и N. Ако је

$$0 \leqslant BP^2 - AP^2 \leqslant BC^2 - AC^2,$$

онда је $AM = BN$ ако и само ако је $BC = AC$.

Пре него што докажемо ову теорему, испитајмо да ли круг k заиста сече поменуте дужи и ако их сече, да ли је пресек са сваком од њих једна тачка. Показаћемо најпре ово друго за дуж AP (за дуж BP доказује се аналогно). Претпоставимо супротно, тј. да круг k сече дуж AP у двема различитим тачкама M и M' тако да је $A - M - M' - P$.

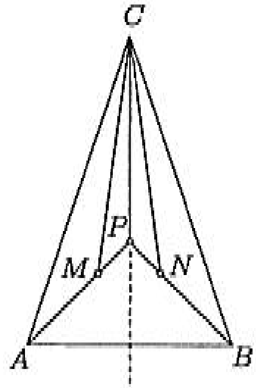


Тада је $CM = CM' = r$, па је $\triangle CMM'$ једнакокрак, па је $\sphericalangle CMM' = \sphericalangle CM'M$. Ова два угла морају бити оштра, па је $\sphericalangle CM'P = 180^\circ - \sphericalangle CM'M$ туп и тиме уједно и највећи угао у $\triangle CM'P$. Како се у сваком троуглу наспрам највећег угла налази највећа страница, то је $CP > CM'$, што је у контрадикцији са $r > CP$. Дакле, ако пресек круга k и дужи AP није празан, онда он мора бити једна тачка. Да бисмо доказали да круг k сече AP разликоваћемо три случаја:
1) $\sphericalangle APC$ је оштар; 2) $\sphericalangle APC$ је туп; 3) $\sphericalangle APC$ је прав.
Доказујемо само први случај случај (а преостала два остављамо за вежбу).

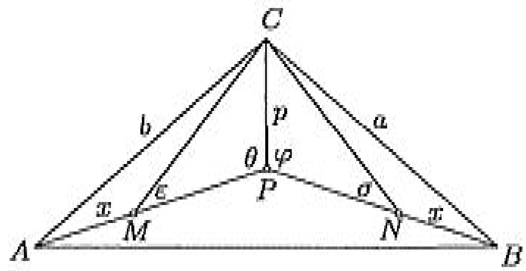
Нека је D подножје висине $\triangle APC$ из темена C. Како је $CP < AC$, самим тим је $\sphericalangle CAP < \sphericalangle APC < 90^\circ$, па важи $A - D - P$. Нека је M тачка полуправе чији је почетак D и која садржи A таква да је $DM = \sqrt{r^2 - CD^2}$ ($r^2 - CD^2 > 0$, јер је $r > CP > CD$). Како је $DA = \sqrt{AC^2 - CD^2} > \sqrt{r^2 - CD^2} = DM$, онда је $A - M - D$, па је $A - M - P$, а како је $CM = \sqrt{DM^2 + CD^2} = r$, то круг k сече дуж AP у тачки M.

ДОКАЗ ТЕОРЕМЕ 3. ($\Longleftarrow$) Претпоставимо најпре да је $BC = AC$.

Тада је $BC^2 - AC^2 = 0$, па је $0 \leqslant BP^2 - AP^2 \leqslant 0$, одакле је $BP^2 - AP^2 = 0$, па је $BP = AP$. Одавде закључујемо да је CP симетрала основице AB, а уједно и оса симетрије троугла ABC (тачке A, C, P се осном симетријом у односу на CP пресликавају редом у тачке B, C, P). Како осна симетрија чува углове, то је $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC$. При томе ови углови морају бити тупи, јер би у супротном $\sphericalangle APB$ био већи или једнак 180°, што је немогуће. Троуглови MPC и NPC су подударни на основу става ССУ ($\sphericalangle CMP$ и $\sphericalangle CNP$ су оштри, дакле, оба истог типа). Из подударности је $MP = NP$, па је $AM = AP - MP = BP - NP = BN$.



($\Longrightarrow$) Претпоставимо да је $AM = BN$.



Уведимо ознаке $BC = a$, $AC = b$, $CP = p$, $AP = m$, $BP = n$, $AM = BN = x$, $\measuredangle APC = \theta$, $\measuredangle CPN = \varphi$, $\measuredangle CMP = \varepsilon$ и $\measuredangle CNP = \sigma$. Тада је $MP = m - x$ и $NP = n - x$. Како је $CM = CN = r$, $p < R$ (2) и $0 \leqslant n^2 - m^2 \leqslant a^2 - b^2$ (3), закључујемо да је $m - x \leqslant n - x$ (4). Применом косинусне теореме на $\triangle MPC$ и $\triangle NPC$ добијамо

$$\cos\theta = \frac{(m-x)^2 + p^2 - r^2}{2(m-x)p} = \frac{m-x}{2p} + \frac{p^2 - r^2}{2(m-x)p}$$

и

$$\cos\varphi = \frac{(n-x)^2 + p^2 - r^2}{2(n-x)p} = \frac{n-x}{2p} + \frac{p^2 - r^2}{2(n-x)p}.$$

Из (2) и (4) имамо да је $\cos\varphi \geqslant \cos\theta$. Један од углова φ и θ мора бити туп, јер би у противном било $\measuredangle APB \geqslant 180°$. Ако θ не би био туп, било би $\cos\theta \geqslant 0$, па би било $\cos\varphi \geqslant 0$ и то би значило да угао φ није туп, што је немогуће. Закључујемо да је угао θ туп, па је $\cos\theta < 0$. Применом косинусне теореме на $\triangle APC$ добијамо

$$\cos\theta = \frac{m^2 + p^2 - b^2}{2mp},$$

па је $m^2 + p^2 - b^2 < 0$ (5). На основу (3) закључујемо да је $n^2 + p^2 - a^2 \leqslant m^2 + p^2 - b^2$, па из (5) следи $n^2 + p^2 - a^2 < 0$ (6). Применом косинусне теореме на $\triangle BPC$ је

$$\cos\varphi = \frac{n^2 + p^2 - a^2}{2np},$$

па је на основу (6) $\cos\varphi < 0$, одакле следи да је угао φ такође туп.

Како је $\cos\varphi \geqslant \cos\theta$, а фунција косинус је опадајућа на $(0, \pi)$, то је $\theta \geqslant \varphi > 90^\circ$, а како је синус опадајућа функција на $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, то је $\sin\varphi \geqslant \sin\theta$ (7). Применом синусне теореме редом на $\triangle MPC$ и $\triangle NPC$ важи:

$$\sin\varepsilon = \frac{CP}{CM}\sin\theta = \frac{p}{r}\sin\theta \quad \text{и} \quad \sin\sigma = \frac{CP}{CN}\sin\varphi = \frac{p}{r}\sin\varphi,$$

па је из (7) $\sin\varepsilon \leqslant \sin\sigma$. Како су углови θ и φ тупи, то су углови ε и σ оштри, а како је функција синус растућа на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то је $\varepsilon \leqslant \sigma < 90^\circ$, па је $\cos\varepsilon \geqslant \cos\sigma$ (8). Применом косинусне теореме $\triangle AMC$ је

$$\cos\varepsilon = -\cos(180^\circ - \varepsilon) = \frac{b^2 - x^2 - r^2}{2xr}, \tag{9}$$

а применом на $\triangle BNC$ је

$$\cos\sigma = -\cos(180^\circ - \sigma) = \frac{a^2 - x^2 - r^2}{2xr}. \tag{10}$$

Из (8), (9) и (10) следи да је $b^2 \geqslant a^2$, тј. $b \geqslant a$, а како је по претпоставци теореме $a \leqslant b$, то је $a = b$.

Смер ($\Longleftarrow$) се може доказати и без употребе тригонометрије.

Користићемо наредна три једноставна тврђења.

Лема 4. Дати су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ такви да је $AB \leqslant A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$. Тада је $\sphericalangle ABC \geqslant \sphericalangle A_1B_1C_1$.

Лема 5. Дат је троугао ABC. Угао ABC је туп ако и само ако је $AB^2 + BC^2 - AC^2 < 0$.

Лема 6. Дати су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ такви да је $\sphericalangle BAC \geqslant \sphericalangle B_1A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$. Тада је $BC \geqslant B_1C_1$.

Из претпоставки теореме 3 имамо да је $AP \leqslant BP$ и $AM = BN$, па је

$$MP = AP - AM \leqslant BP - BN = NP.$$

Применимо ли лему 4 на $\triangle MPC$ и $\triangle NPC$ добијамо да је $\sphericalangle MPC \geqslant \sphericalangle NPC$. Угао MPC мора бити туп, јер би у супротном било $\sphericalangle APB \geqslant 180^\circ$ што је немогуће. На основу леме 5 примењене на $\triangle APC$ (с обзиром на то да је $\sphericalangle APC$ туп) је $AP^2 + PC^2 - AC^2 < 0$, а како је, по услову теореме 3, $BP^2 - AP^2 \leqslant BC^2 - AC^2$, то је

$$BP^2 + PC^2 - BC^2 \leqslant AP^2 + PC^2 - AC^2,$$

па је $BP^2 + PC^2 - BC^2 < 0$.

На основу леме 5 примењене на $\triangle BPC$ добијамо да је $\sphericalangle BPC$ туп, тј. $\sphericalangle NPC$ је туп. Сада добијамо да су углови CMP и CNP оштри. Нека су r_1 и r_2 полупречници кругова описаних око $\triangle MPC$ и $\triangle NPC$. Како је $\sphericalangle MPC \geqslant \sphericalangle NPC > 90^\circ$ и $CM = CN$, то је $r_1 \geqslant r_2$. Из последње неједнакости следи да је $\sphericalangle CMP \leqslant \sphericalangle CNP$, одакле је $\sphericalangle AMC \geqslant \sphericalangle BNC$. Применимо ли лему 6 на $\triangle MAC$ и $\triangle NBC$, добићемо да је $AC \geqslant BC$, а како је $AC \leqslant BC$, то је $AC = BC$. $\square$

Поставља се још питање да ли постоји бар једна тачка P у унутрашњости $\triangle ABC$ таква да је $CP < AC$ и $0 \leqslant P^2 - AC^2 \leqslant BC^2 - AC^2$. Одговор је потврдан. Нека је S центар уписаног круга $\triangle ABC$. У складу са ознакама из теореме 2, нека је ℓ_c дужина одсечка симетрале која одговара темену C и $CS = \ell'_c$. Тада је $AS = \ell'_a$ и $BS = \ell'_b$. Непосредно се добија:

$$\ell_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-a)} \quad \text{и} \quad \ell'_c = \frac{a+b}{a+b+c}\cdot \ell_c = \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}},$$

па важи

$$\begin{aligned} \ell'_c < b &\Leftrightarrow \ell'^2_c < b^2 \\ &\Leftrightarrow ab(s-c) < sb^2 \\ &\Leftrightarrow a(a+b-c) < (a+b+c)b \\ &\Leftrightarrow (a+b)(a-b-c) < 0 \end{aligned}$$

Последња неједнакост је тачна на основу основне неједнакости троугла $a < b + c$, па је тачна и полазна неједнакост. Из (1), за $a \geqslant b$ се добија $\ell'^2_b - \ell'^2_a = c(a-b) \geqslant 0$. Такође, из (1) и основне неједнакости троугла $c < a + b$ се добија $\ell'^2_b - \ell'^2_a \leqslant a^2 - b^2$. Добили смо да је $CS < AC$ и $0 \leqslant BS^2 - AS^2 \leqslant BC^2 - AC^2$, а како тачка S припада унутрашњости $\triangle ABC$, то се за P може узети на пример тачка S.

Задатак. У складу са ознакама из теореме 3, показати да у општем случају $MP = NP$ не повлачи $AC = BC$, тј. не може се изоставити претпоставка

$$0 \leqslant BP^2 - AP^2 \leqslant BC^2 - AC^2.$$

Литература

[1] Н. Икодиновић, „Табличне формуле", Неке једнакости троугла, Тангента 34, 2003/04.

[2] М. Митровића, С. Огњановић, М. Вељковић, Љ. Петковић, Н. Лазаревић, Геометрија, уџбеник са збирком задатака за први разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 2000.

[3] Ђ. Дугошија, Ж. Ивановић, Л. Милин, Тригонометрија, уџбеник са збирком задатака за други разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 1999.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2015/16 година