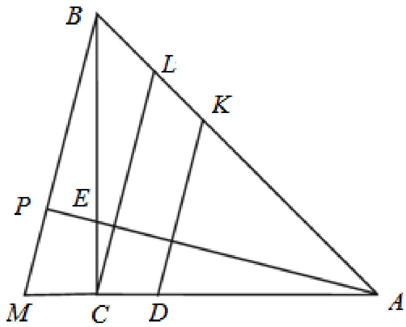
# ЈММО 2005

1. На катетите $CA$ и $CB$ на рамнокракиот правоаголен $\triangle ABC$ се избрани точки $D$ и $E$, соодветно, такви што $\overline{CD}=\overline{CE}$. Од точките $D$ и $E$ се повлечени нормали на правата $AE$ кои ја сечат хипотенузата $AB$ во точките $K$ и $L$, соодветно. Докажи дека $\overline{KL}=\overline{LB}$.

   **Решение.** На полуправата $AC$ избираме точка $M$ таква што $\overline{CM}=\overline{CE}$. Тогаш $\triangle ACE \cong \triangle BCM$, па правата $MB$ е нормална на правата $AE$. Значи, правата правата $MB$ е паралелна на правата $CL$. Сега, од $\overline{CM}=\overline{CE}=\overline{CD}$ и паралелноста на правите $DK, CL$ и $MB$ следува $\overline{KL}=\overline{LB}$.




2. Нека $x, y$ се реални броеви такви што

$$x^2+y^2=2 \text{ и } (x^3+y^3)^2=8.$$

   Пресметај ја вредноста на изразот $x^4+y^4$.

   **Решение.** Имаме:

$$8=(x^2+y^2)^3=x^6+y^6+3x^2y^2(x^2+y^2)=x^6+y^6+6x^2y^2$$

$$8=(x^3+y^3)^2=x^6+y^6+2x^3y^3,$$

   па затоа

$$6x^2y^2-2x^3y^3=0,$$

   односно

$$x^2y^2(3-xy)=0.$$

   Ако $x=0$, тогаш $y^2=2$, па затоа $x^4+y^4=0+2^2=4$.

   Ако $y=0$, тогаш $x^2=2$, па затоа $x^4+y^4=2^2+0=4$.

   Ако $3-xy=0$, тогаш

$$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=2-2\cdot 3=-4<0,$$

   што е противречност.

   Конечно, од претходните разгледувања следува $x^4+y^4=4$.

3. Нека $x,y,z\in[0,1]$. Докажи дека

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\leq\frac{1}{3}.$$

**Решение.** Од условот на задачата и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува:

$$\begin{aligned}\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3} &\leq \frac{x}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{y}{6+z^3+y^3+x^3}+\frac{z}{6+x^3+y^3+z^3}\\ &=\frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3}\\ &=\frac{x+y+z}{(1+1+x^3)+(1+1+y^3)+(1+1+z^3)}\\ &\leq\frac{x+y+z}{3\sqrt[3]{x^3}+3\sqrt[3]{y^3}+3\sqrt[3]{z^3}}\\ &=\frac{x+y+z}{3x+3y+3z}\\ &=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$.

4. Десетцифрен природен број $n=\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ е запишан со различни цифри и е делив со 11.

а) Ако $S_1=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$ и $S_2=a_0+a_2+a_4+a_6+a_8$, докажи дека или $S_1$ или $S_2$ е делив со 7.

б) Нека во записот на $n$ меѓу 0 и 1 има парен број цифри, а меѓу 8 и 9 има непарен број цифри. Меѓу кои две цифри во записот на $n$, различни од 0, 1, 8 и 9, секогаш има парен број цифри?

**Решение.** а) Од критериумот за деливост со 11 имаме $11\,|\,S_2-S_1$. Понатаму, бидејќи

$$S_2-S_1\leq 9+8+7+6+5-(4+3+2+1+0)=25 \text{ и}$$
$$S_2-S_1\geq 4+3+2+1+0-(9+8+7+6+5)=-25,$$

добиваме $S_2-S_1\in\{-22,-11,0,11,22\}$. Сега, $S_1+S_2=45$ и како $S_2+S_1$ и $S_2-S_1=S_2+S_1-2S_1$ се со иста парност, заклучуваме дека $S_2-S_1$ е непарен, па затоа $S_2-S_1=11$ или $S_2-S_1=-11$. Значи, или

$$\begin{cases}S_2-S_1=11\\ S_2+S_1=45\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} S_2 - S_1 = -11 \\ S_2 + S_1 = 45 \end{cases}$$

Според тоа, или $S_2 = 28$, $S_1 = 17$ или $S_2 = 17$, $S_1 = 28$, што значи или $S_2$ или $S_1$ е делив со 7.

б) Меѓу две цифри во записот на $n$, на пример $a_i$ и $a_j$ има парен (непарен) број цифри ако и само ако $i$ и $j$ се со различна (иста) парност. Оттука следува дека:

б1) цифрите 9, 8 и 0 се во иста група чиј збир на цифри мора да е 28, а цифрата 1 е во другата група чиј збир на цифри мора да е 17.

б2) цифрите 9, 8 и 1 се во иста група чиј збир на цифри мора да е 28, а цифрата 0 е во другата група чиј збир на цифри мора да е 17.

Лесно се гледа дека од б1) и б2) следуваат следниве четири можќи случаи на распорд на цифрите:

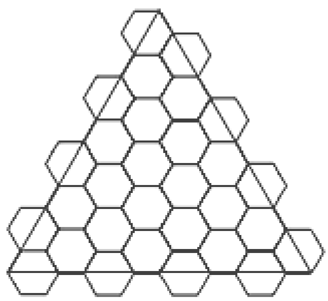
| Прва група | Втора група |
|---|---|
| 0,8,9,4,7 | 1,2,3,5,6 |
| 0,8,9,5,6 | 1,2,3,4,7 |
| 1,8,9,3,7 | 0,2,4,5,6 |
| 1,8,9,4,6 | 0,2,3,5,7 |

Притоа, единствено во сите четири случаи цифрите 6 и 7 се во различни групи што значи дека меѓу овие две цифри во записот на $n$ секогаш има парен број цифри.

5. Во рамностран триаголник со должина на страна 54 се дадени 2005 точки. Докажи дека меѓу овие точки постојат две кои се на растојание помало или еднакво на 1.

**Решение.** Ќе го покриеме триаголникот со шестаголници со должина на страна $0,5$ (како што е прикажано на цртежот десно за триаголник со должина на страна 6). Тогаш надвор од триаголникот излегуваат

$$\frac{54}{1,5} \cdot 3 = 3 \cdot 36 = 108$$



половинки на шестаголниците. Понатаму, ако во внатрешноста на триаголникот имаме $n$ шестаголници, тогаш за плоштината на триаголникот добиваме

$$\frac{54^2\sqrt{3}}{4}=P=(\frac{108}{2}+n)\frac{3\cdot(\frac{1}{2})^2\sqrt{3}}{2},$$

од каде добиваме $n=1890$. Според тоа, вкупната покривна фигура содржи $1890+108=1998$ шестаголници. Понатаму, дадени се 2005 точки, па од принципот на Дирихле следува дека постои шестаголник во кој има најмалку две од дадените точки. Сега, бидејќи секој шестаголник е впишан во кружница со дијаметар 1, добиваме дека меѓу дадените точки постојат две точки кои се на растојание помало или еднакво на 1.