Два уопштења једног задатка о правилном седмоуглу

Драгољуб Милошевић, **Горњи Милановац**

У Тангенти 65/1 (2011/12), стр. 12–17, дато је осам решења следећег задатка: *Доказати да у правилном седмоуглу $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ важи једнакост*

$$\frac{1}{A_0A_1}=\frac{1}{A_0A_2}+\frac{1}{A_0A_3}. \tag{$*$}$$

Уопштење 1. Ако је $A_0A_1\dots A_{2k}$ правилан $(2k+1)$-угао, доказати да важи

$$\frac{A_0A_2}{A_0A_1}-\frac{A_0A_{k-1}}{A_0A_k}=1. \tag{1}$$

Доказ. Обележимо са R дужину полупречника описане кружнице око правилног $(2k+1)$-угла и са α величину периферијског угла над страницом тог многоугла. Тада имамо

$$A_0A_1=2R\sin\alpha,\ A_0A_2=2R\sin2\alpha,\ A_0A_{k-1}=2R\sin(k-1)\alpha,\ A_0A_k=2R\sin\alpha.$$

Сада је једнакост (1) еквивалентна са $\dfrac{\sin2\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha}=1$, тј. са

$$\sin2\alpha\cdot\sin k\alpha-\sin\alpha\cdot\sin(k-1)\alpha=\sin\alpha\cdot\sin k\alpha. \tag{2}$$

Применом тригонометријске идентичности

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))\quad(x,y-\text{ реални бројеви}) \tag{3}$$

Једнакост (2) се трансформише у

$$\cos k\alpha-\cos(k+2)\alpha=\cos(k-1)\alpha-\cos(k+1)\alpha. \tag{4}$$

Како је $(2k+1)\alpha=\pi$, имамо

$$\cos(k+1)\alpha=\cos((2k+1)\alpha-k\alpha)=\cos(\pi-k\alpha)=-\cos k\alpha$$

и

$$\cos(k+2)\alpha=\cos((2k+1)\alpha-(k-1)\alpha)=-\cos(k-1)\alpha.$$

Сада једнакост (4) има облик $\cos k\alpha+\cos(k-1)\alpha=\cos(k-1)\alpha+\cos k\alpha$, што је очигледно тачно. Овим је доказана једнакост (2), а самим тим и једнакост (1).

Напомена 1. За правилан седмоугао ($k=3$) имамо $\dfrac{A_0A_2}{A_0A_1}-\dfrac{A_0A_2}{A_0A_3}=1$, што је еквивалентно са једнакошћу ($*$).

Напомена 2. За правилан петоугао ($k=2$) добијамо $\dfrac{A_0A_2}{A_0A_1}-\dfrac{A_0A_1}{A_0A_2}=1$ или

$$\frac{d}{a}-\frac{a}{d}=1, \tag{5}$$

где је $a=A_0A_1$ (страница) и $d=A_0A_2$ (дијагонала).

Уопштење 2. Доказати да у правилном $(3k+1)$-углу $A_0A_1\dots A_{3k}$ важи једнакост

$$\frac{A_0A_1}{A_0A_k}+\frac{A_0A_{k-1}}{A_0A_{k+1}}=1. \tag{6}$$

Доказ. Нека су R и α као у претходном решењу, али за правилан $(3k+1)$-угао. Тада је $A_0A_1=2R\sin\alpha$, $A_0A_{k-1}=2R\sin(k-1)\alpha$ и $A_0A_k=2R\sin k\alpha$, $A_0A_{k+1}=2R\sin(k+1)\alpha$. Због тога је једнакост (6) еквивалентна са $\dfrac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}+\dfrac{\sin(k-1)\alpha}{\sin(k+1)\alpha}=1$, тј. са

$$\sin\alpha\cdot\sin(k+1)\alpha+\sin k\alpha\cdot\sin(k-1)\alpha=\sin k\alpha\cdot\sin(k+1)\alpha. \tag{7}$$

Применом формуле (3) једнакост (7) се претвара у

$$\cos(2k+1)\alpha-\cos(k+2)\alpha=\cos(2k-1)\alpha-\cos k\alpha. \tag{8}$$

Коришћењем тригонометријске идентичности

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\quad (x,y-\ \text{реални бројеви})$$

једнакост (8) добија облик

$$\sin\frac{3k+3}{2}\alpha=\sin\frac{3k-1}{2}\alpha. \tag{9}$$

С обзиром на то да је $(3k+1)\alpha=\pi$, имамо

$$\sin\frac{3k+3}{2}\alpha=\sin\left(\frac{3k+1}{2}+1\right)\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

и

$$\sin\frac{3k-1}{2}\alpha=\sin\left(\frac{3k+1}{2}-1\right)\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Будући да је једнакост $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ тачна, то је тачна и једнакост (9), а самим тим и једнакост (7), односно (6).

Напомена 3. За правилан седмоугао ($k=2$) имамо $\dfrac{A_0A_1}{A_0A_2}+\dfrac{A_0A_1}{A_0A_3}=1$, што је еквивалентно са једнакошћу $(*)$.

Напомена 4. За правилан тринаестоугао ($k=4$) је $\dfrac{A_0A_1}{A_0A_4}+\dfrac{A_0A_3}{A_0A_5}=1$, тј.

$$\frac{a}{d}+\frac{c}{e}=1,$$

где је $a=A_0A_1$, $c=A_0A_3$, $d=A_0A_4$ и $d=A_0A_5$.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2013/14 година