Alija Muminagić
Данска

БАБИЛИЕРОВА ТЕОРЕМА

Во оваа статија ќе дадеме два докази (не така чести), од многу познатите, за една теорема позната како Babilierova (Babilier) теорема.

Теорема. Во секој триаголник е точно равенството:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r\ ,$$

каде

- R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот,
- r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот,
- r_a, r_b, r_c се радиуси на припишаните кружници (тоа се кружници кои допираат една страна и продолженијата на другите две страни на триаголникот) на триаголникот.

Доказ 1. Во доказот ќе ги користиме познатите формули

$$r_a = \frac{P}{s-a}\ , \quad r_b = \frac{P}{s-b}\ , \quad r_c = \frac{P}{s-c}\ , \quad P = sr$$

каде s е полупериметар на триаголникот, т.е. $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Според претходните формули, ако на првите три ги собереме левите и десните страни соодветно го добиваме равенството:

$$r_a + r_b + r_c = P\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}\right),$$

и по средување на последниот израз, го добиваме равенството

$$r_1 + r_b + r_c = \frac{s}{P}[3s^2 - s(2a+2b+2c) + bc + ac + ab] = \frac{s}{P}(-s^2 + ab + bc + ca\ )\ .$$

Заради равенството $ab + bc + ca = r^2 + s^2 + 4Rr$ (кое лесно се докажува), конечно добиваме

$$r_a + r_b + r_c = \frac{s}{P}(-s^2 + r^2 + s^2 + 4Rr) = \frac{s}{sr}\cdot r(r+4R) = r + 4R\ .$$

Последица. Заради $R \geq 2r$, добиваме дека $r_a + r_b + r_c \geq 9r$. (Докажи дека $R \geq 2r$).

Доказ 2. Претходно ќе ја докажеме точноста на равенствата (кои се интересни и само по себе)

а) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \dfrac{r}{R}$

б) $-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \dfrac{r_a}{R} - 1$, в) $\cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r_b}{R} - 1$,

г) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = \frac{r_c}{R} - 1$.

Ќе ја докажеме точноста на тврдењето под б). Од $abc = 4RP$ имаме $R = \frac{abc}{4P}$ и ако замениме во равенството

$$-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r_a}{R} - 1,$$

добиваме $-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1 = \frac{r_a}{\frac{abc}{4P}} \Leftrightarrow -\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1 = \frac{4r_a P}{abc}$ односно го добиваме равенството

$$2abc(-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1) = 8Pr_a.$$

Нека е $L = 2abc(-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1)$ и $D = 8Pr_a$. Заради косинусна теорема, равенствата

$$2bc\cos\alpha = -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2ac\cos\beta = -b^2 + a^2 + c^2, \quad 2ab\cos\gamma = -c^2 + a^2 + b^2,$$

се точни при што

$$\begin{aligned} L &= -a(-a^2 + b^2 + c^2) + b(a^2 - b^2 + c^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) + 2abc \\ &= a^3 + a^2(b+c) - a(b^2 + c^2 - 2bc) - b^3 + b^2c + bc^2 - c^3 = (*) \end{aligned}$$

Ако го искористиме равенството

$$b^3 - b^2c - bc^2 + c^3 = (b-c)^2(b+c), \tag{*}$$

добиваме

$$\begin{aligned} (*) &= a^2(a+b+c) - (b-c)^2(a+b+c) = (a+b+c)[a^2 - (b-c)^2] \\ &= (a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 2s(2s-2b)(2s-2c) \\ &= 8s(s-b)(s-c) = \frac{8P^2}{s-a} = 8Pr_a = D. \end{aligned}$$

Да забележиме дека

$$\frac{8P^2}{s-a} = \frac{8r_a^2(s-a)^2}{s-a} = 8r_a(s-a)r_a = 8Pr_a.$$

На ист начин ги докажуваме и останатите две равенства в) и г). Сега имаме

$$-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r_a}{R} - 1 \tag{1}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r_b}{R} - 1, \tag{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = \frac{r_c}{R} - 1. \tag{3}$$

Со собирање на равенствата (1), (2) и (3) добиваме

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{1}{R}(r_a+r_b+r_c)-3$$

и заради равенството а), добиваме

$$1+\frac{r}{R}=\frac{1}{R}(r_a+r_b+r_c)-3 \quad\Leftrightarrow\quad R+r=r_a+r_b+r_c-3R \quad\Leftrightarrow\quad r_a+r_b+r_c=4R+r\ .$$

Во наредниот дел на статијата ќе разгледаме некои примени на оваа теорема.

Пример 1. За аглите на остроаголен триаголник се точни неравенствата:

1) $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 1$,

2) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\geq\sqrt{3}$.

Решение. Ќе го искористиме равенството $r_a+r_b+r_c=4R+r$, $R\geq 2r$ и равенствата $r_a=s\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, $r_b=s\ \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$, $r_c=s\ \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$, (провери ја точноста на овие равенства). Нека

$$S_1=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} \text{ и } S_2=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\ .$$

Непосредно, користејќи ги претходните равенства, добиваме

$$S_1=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r_a}{s}+\frac{r_b}{s}+\frac{r_c}{s}=\frac{r_a+r_b+r_c}{s}=\frac{4R+r}{s}\geq\frac{9s}{r} \tag{4}$$

Знак за равенство важи ако и само ако триаголникот е рамностран и заради тоа

$$r=\frac{\sqrt{3}}{6}a=\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{2}{3}s=\frac{\sqrt{3}}{9}s\ ,$$

па заради тоа, ако замениме во (4), добиваме:

$$S_1\geq\frac{9\frac{\sqrt{3}}{9}s}{s}=\sqrt{3}\ .$$

Од точноста на равенството

$$S_1=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$$

со квадрирање добиваме

$$S_1^2=S_2+2(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2})\ ,$$

и заради точноста равенството

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=1$$

(докажи!) добиваме $S_1^2=S_2+2$. Според тоа $S_2=S_1^2-2\geq(\sqrt{3})^2-2=1$.

Точноста на равенството (*) се добива од

$$-b^3+b^2c+bc^2-c^3=bc(b+c)-(b^3+c^3)=bc(b+c)-(b+c)(b^2-bc+c^2)$$
$$=(b+c)(bc-b^2+bc-c^2)=-(b+c)(b^2-2bc+c^2)$$
$$=-(b+c)(b-c)^2.$$

За крај на читателот му предлагам да докаже:

1. $r_a=\dfrac{P}{s-a}$, $P=sr$, $abc=4RP$, $R\geq 2r$, $r_a=s\ \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ и

$$ab+bc+ca=r^2+s^2+4Rr\,. \qquad (**)$$

Доказ на (**).

$$r^2+s^2+4Rr=\frac{P^2}{s^2}+s^2+\frac{abc}{s}=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}+s^2+\frac{abc}{s}$$
$$=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)+s^3+abc}{s}$$
$$=2s^2-s(a+b+c)+ab+bc+ca$$
$$=2s^2-s\cdot 2s+ab+bc+ca$$
$$=ab+bc+ca.$$

2. $r_a+r_b+r_c=4R+r$, на уште некој начин.

3. $\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\dfrac{\gamma}{2}\geq 1$ и $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2}\geq\sqrt{3}$ каде α,β,γ се агли на остроаголен триаголник. Докажи на друг начин, различен од презентираниот овде.

4. Обопшти го, ако може, истиот проблем во простор (тетраедар и припишани топки).

Statijata prv pat e objavena vo spisanieto SIGMA na SMM